数理解析研究所講究録
第 1942 巻 2015 年 59-65

連続なランダムパラメータをもつランダム写像の不変測度とその評価

愛媛大学大学院理工学研究科
電気電子工学コース応用数学分野
井上友喜

Tomoki Inoue
Division of Applied Mathematics,
Department of Electrical and Electronic Engineering,
Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

1 序

いくつかの写像の族の中から一つの写像が順次ランダムに選ばれて，反復されるような力学系を考える．すなわち，W を空でない集合として，$\{\tau_t\}_{t\in W}$ という写像の族を考え，$\{\tau_t\}_{t\in W}$ の中から一つの写像が順次ランダムに選ばれ反復されるようなシステムを考える．

W の要素の数によらず，$\tau_t=\tau_0$ $(t\in W)$ であれば，決定論的な力学系と同じある．したがって，ここで考えるランダム力学系は決定論的な力学系の一般化である．また，同様に考えれば，W としては区間のような連続の濃度をもつ無限集合を考えておけば，W として有限集合や可算集合の場合を考えるまでもない．このように考えると，ランダム写像として，写像の族 $\{\tau_t\}_{t\in W}$ の中から写像 τ_t が，W 上の確率密度関数 $p(t)$ にしたがって選ばれるものを考えるのが妥当である．

さらに，より一般的な場合として，相空間 X 上の位置により，写像の選ばれる確率が異なっていてもよいようなシステム，すなわち，$x\in X$ に対して，写像 τ_t が W 上の確率密度関数 $p(t,x)$ にしたがって選ばれるようなシステム考えるのは自然である．このような写像の選ばれる確率が相空間 X 上の位置に依存してもよいようなシステムを位置依存ランダム力学系と呼ぶ．

ランダム写像についての詳細な設定を述べる前に，簡単な例を挙げておく．

例 1. $\tau_t : [0,1] \to [0,1]$ とし，

$$\tau_t(x) = \begin{cases} tx, & [0, \frac{1}{2}) \\ 2x - 1, & [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

と定め，t は $W = [1/2, 2]$ から確率密度関数 $p(t,x) = 2/3$ にしたがって選ばれる．

この例では，$t < 1$ のとき τ_t は拡大的でなく，$t < 1$ のとき個々の τ_t はルベーグ測度に関して絶対連続な不変測度をもたないことに注意しておこう．この例は，後述する定理の仮定をみたし，ルベーグ測度に関して絶対連続な不変確率測度をもつ．なお，ランダム写像の不変測度の定義は，次節において，ランダム写像を定義した後で述べることにする．

例 1 では，τ_t を定めるのに用いた区間 $[0,1]$ の分割は t に依存せず一定であったが，不変測度の存在を示すだけなら，そのような制限は必要ではない。尤も，そのような制限を設ける方が証明は簡単であるが。

τ_t を定めるのに用いる区間 $[0,1]$ の分割が t に依存して変化するような簡単な例として，次のようなものがある．

例 2. $\tau_t : [0,1] \to [0,1]$ とし，

$$\tau_t(x) = tx \quad \text{for} \quad t \in (0,1]$$

$$\tau_t(x) = \begin{cases} tx, & [0, \frac{1}{t}) \\ tx - 1, & [\frac{1}{t}, 1] \end{cases} \quad \text{for} \quad t \in (1,2)$$

と定め，t は $W = (0,2)$ から確率密度関数 $p(t,x) = \frac{3}{8}t^2$ にしたがって選ばれる．

この例では，τ_t の傾きが限りなく 0 に近いことを許しているが，そのような τ_t が選ばれる確率は，確率密度関数 $p(t,x)$ によって制限されている．この例も，後述する定理の仮定をみたし，ルベーグ測度に関して絶対連続な不変確率測度をもつ．

本稿では，ランダム写像の定義を与え，一次元のランダム写像がルベーグ測度に関して絶対連続な不変測度をもつための十分条件を与える．また，この不変測度の密度関数の評価についても触れる．

2 ランダム写像の定義

この節では，まず，ランダム写像を定義し，その上でランダム写像の不変測度を定義する．また，ランダム写像に対する Perron-Frobenius 作用素を定義する．

$(W,\mathcal{B},\nu)$ と $(X,\mathcal{A},m)$ を σ-有限測度空間とする．$(W,\mathcal{B},\nu)$ はパラメータ用の空間として用い，$(X,\mathcal{A},m)$ は相空間として用いる．この前提のもとで，$\tau_t : X \to X$ $(t \in W)$ は非特異変換，すなわち，任意の可測集合 $A \in \mathcal{A}$ に対して，$m(A) = 0$ ならば $m(\tau_t^{-1}A) = 0$ となるとする．また，各 $x \in X$ に対して $\tau_t(x)$ は t の可測関数とする．さらに，$p : W \times X \to [0,\infty)$ は各 $x \in X$ に対して W 上の確率密度関数，すなわち，$\int_W p(t,x)\ \nu(dt) = 1$ とする．

ランダム写像 $T = \{\tau_t; p(t,x)\}$ を次の推移関数 $\mathbf{P}$ をもつマルコフ過程として定める：

$$\mathbf{P}(x,A) := \int_W p(t,x)\ 1_A(\tau_t(x))\ \nu(dt).$$

ここで，A は可測集合，1_A はその上の定義関数とする．

この推移関数 $\mathbf{P}$ により，X 上の測度に対する作用素 $\mathbf{P}_*$ が次のように定まる：

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_*\mu(A) : &= \int_X \mathbf{P}(x,A)\mu(dx) \\ &= \int_X \int_W p(t,x)\ 1_A(\tau_t(x))\ \nu(dt)\ \mu(dx).\end{aligned}$$

$\mathbf{P}_*\mu = \mu$ のとき，μ をランダム写像 T の不変測度と呼ぶ．もしも，T が決定論的な写像，すなわち，$\tau_t = T$ $(t \in W)$ であれば，$\mathbf{P}_*\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$ となることから，ここで与えたランダム写像の不変測度の定義は，通常の決定論的な写像の不変測度の定義の一般化であることがわかる．

ここで，ランダム写像 T に対する Perron-Frobenius 作用素を定義しておこう．上記の μ がそれに対応する密度関数 f をもてば，$\mathbf{P}_*\mu$ も密度関数をもち，それを $P_T f$ と定める．すなわち，

$$\mathbf{P}_*\mu(A) := \int_X P_T f(x) m(dx) = \int_X \int_W p(t,x)\ 1_A(\tau_t(x))\ \nu(dt) f(x)\ m(dx)$$

をすべての可測集合 A がみたすように $P_T : L^1(m) \to L^1(m)$ を定める．この P_T をランダム写像 T に対する Perron-Frobenius 作用素と呼ぶ．なお，このランダム写像に対

する Perron-Frobenius 作用素は，通常の決定論的な写像の Perron-Frobenius 作用素の一般化である．(通常の決定論的な写像の Perron-Frobenius 作用素については，[Bo-G]，[L-M] 参照．)

3　一次元ランダム写像の不変測度

決定論的な一次元写像の力学系においてよく知られている Lasota-Yorke 写像の不変測度の存在に関する結果を一般化し，一次元ランダム写像の不変測度が存在するような条件を与える．

この節では，前節の X を区間 $[0,1]$ とし，m をルベーグ測度とする．

Λ を高々可算な集合とし，各 $t \in W$ に対して $\Lambda_t \subseteq \Lambda$ とする．$\{I_{t,i}\}_{i\in\Lambda_t}$ は閉区間の族で，$\mathrm{int}(I_{t,i}) \cap \mathrm{int}(I_{t,j}) = \emptyset$ $(i \neq j)$ と $m([0,1] \setminus \cup_{i\in\Lambda_t} I_{t,i}) = 0$ をみたすものとする．

τ_t $(t \in W)$ に対して次の (A1) を仮定する．

(A1)　τ_t を $\mathrm{int}(I_{t,i})$ に制限した $\tau_t|_{\mathrm{int}(I_{t,i})}$ は単調な C^1 級関数

例えば，例 2 においては，$\Lambda = \{1,2\}$ とし，$t \in (1,2)$ のとき，$\Lambda_t = \{1,2\}$，$I_{t,1} = [0,1/2]$，$I_{t,2} = [1/2,1]$，$t \in (0,1]$ のとき，$\Lambda_t = \{1\}$，$I_{t,1} = [0,1]$ と考えるとよい．

ここで，便宜上，$i \in \Lambda \setminus \Lambda_t$ に対して $I_{t,i} = \emptyset$ と定めておく．

各 $t \in W$ と $i \in \Lambda$ に対して $\tau_{t,i} := \tau_t|_{\mathrm{int}(I_{t,i})}$ とおき，$\phi_{t,i}(x)$ を次にように定める．

$$\phi_{t,i}(x) := \begin{cases} \tau_{t,i}^{-1}(x), & x \in \tau_{t,i}(\mathrm{int}(I_{t,i})) \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \tau_{t,i}(\mathrm{int}(I_{t,i})) \end{cases}$$

この $\phi_{t,i}(x)$ について，次の可測性 (A2) を仮定する．

(A2)　各 $x \in X$ と $i \in \Lambda$ に対して $\phi_{t,i}(x)$ は t の可測関数．

$W \times X$ 上の関数 $g(t,x)$ を

$$g(t,x) = \begin{cases} \dfrac{p(t,x)}{|\tau_t'(x)|}, & x \in \cup_i \mathrm{int}(I_{t,i}) \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \cup_i \mathrm{int}(I_{t,i}) \end{cases}$$

と定める．また，$\bigvee_I f$ を f の 区間 I 上の全変動とする．

定理 1. 以上の設定の下で，ランダム写像 $T=\{\tau_t;p(t,x)\}$ は次の条件をみたすと仮定する:

(a) $\sup_{x\in[0,1]}\int_W g(t,x)\ \nu(dt)<\alpha<1$;

(b) 定数 M があり， a.s. $t\in W$ に対して $\bigvee_{[0,1]} g(t,\cdot)<M$，すなわち，$\nu$-可測な集合 $W_0\subset W$ があり，$\int_{W_0} p(t,x)\nu(dt)=1$ で，すべての $t\in W_0$ に対して $\bigvee_{[0,1]} g(t,\cdot)<M$ となる．M は t に依存しないものとする．

このとき，ランダム写像 $T=\{\tau_t;p(t,x)\}$ はルベーグ測度に関して絶対連続な不変確率測度をもつ．

τ_t がすべて同じもの τ である場合は，(a) の条件は $\inf_x|\tau'(x)|>1$ となることから，定理 1 は，決定論的な一次元力学系における Rychlik の結果 [R] や Lasota-Yorke の有名な結果 [L-Y] の一般化になっている．また，[Ba-G]，[G-Bo]，[P] で考えている一次元のランダム写像では，τ_t として選ばれる写像は有限個しかなく，定理 1 はこれらの結果の一般化でもある．

例 1，2 のように $\sup_x|\tau_t'(x)|<1$ となる t があっても，(a) の条件をみたすことはある．

この定理 1 は，Perron-Frobenius 作用素 P_T の不動点の存在を示すことにより証明される．定理の証明の詳細は文献 [I] にある．

注意 2. P_T の不動点として有界変動関数をとれるため，定理にあるルベーグ測度に関して絶対連続な不変確率測度に対応する密度関数として上に有界なものをとれる．

さらに，定理 1 とともに，Perron-Frobenius 作用素 P_T は漸近周期的であることを示す次の定理も得られる．

定理 3. ランダム写像 $T=\{\tau_t;p(t,x)\}$ は定理 1 と同じ仮定をみたし，P_T は Perron-Frobenius 作用素とする．このとき，正の整数 r，確率密度関数 $f_1,\ldots,f_r$，有界汎関数 $\eta_1,\ldots,\eta_r$ と作用素 $Q:L^1(m)\to L^1(m)$ があり，

$$P_Tf=\sum_{k=1}^{r}\eta_k(f)f_k+Qf\quad \text{for any}\quad f\in L^1(m),$$

をみたす．ただし， $f_1,\ldots,f_r$ と Q は以下の性質をみたす：

(1) $f_i \cdot f_j = 0$ for all $i \neq j$;

(2) $P_T f_k = f_{Perm(k)}$, ここで $Perm$ は $1, \ldots, r$ の置換;

(3) $\lim_{n\to\infty} \|P_T^n Q f\|_{L^1(m)} = 0$ for any $f \in L^1(m)$.

4 不変測度の評価について

前節の定理1の条件をみたすランダム写像 $T = \{\tau_t; p(t,x)\}$ のルベーグ測度に関して絶対連続な不変確率測度に対応する密度関数はどのようなものだろうか．前節の注意2で述べたように，定常確率密度関数として上に有界なものをとれることは定理とともに示される．しかし，定常確率密度関数の下からの評価は，定理とともには示されない．

決定論的な一次元写像の力学系の場合，定常確率密度関数のサポート上での下からの評価は Kowalski の結果が知られている ([K])．しかし，定理1の条件に加えて，$p(t,x) = p(x)$ (位置に依存しない) として，$\inf_x |\tau_t'(x)| > 1$ $(t \in W)$ を追加で仮定しても，τ_t として選ばれる写像の候補が無限にある場合は，定常確率密度関数はそのサポート上で0より大きな値で下から評価することができるとは限らない．定常確率密度関数の下から評価が存在しないようなランダム写像の例として次のようなものがある．

例3. $\tau_t : [0,1] \to [0,1]$ とし，

$$\tau_t(x) = \begin{cases} tx, & [0, \frac{1}{2}) \\ 2x - 1, & [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

と定め，t は $W = [3/2, 2]$ から確率密度関数 $p(t) = 2$ にしたがって選ばれる．

このランダム写像は，定理1の仮定をみたしており，定常確率密度関数が存在する．この定常確率密度関数 h で，$\{x : h(x) > 0\}$ の閉包は $[0,1]$ で $h(1) = 0$ となるものをとれる．

このような例があることから，ランダム写像の定常確率密度関数が下から評価されるためには上記の例を排除するような強い条件が必要となる．

参考文献

[Ba-G] W.Bahsoun and P.Góra, *Position dependent random maps in one and higher dimensions*, Studia Math. 166 (2005), 271-286.

[Bo-G] A.Boyarsky and P. Góra, *Laws of Chaos*, Birkhäuser, Boston, 1997.

[G-Bo] P.Góra and A.Boyarsky, *Absolutely continuous invariant measures for random maps with position dependent probabilities*, J. Math. Anal. Appl. 278 (2003), 225-242.

[I] T.Inoue, *Invariant measures for position dependent random maps with continuous random parameters*, Studia Math. 208 (2012), 11-29.

[K] Z.S. Kowalski, *Invariant measure for piecewise monotonic transformation has a positive lower bound on its support*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 27 (1979), no. 1, 53-57.

[L-M] A.Lasota and M.C.Mackey, *Chaos, fractals, and noise, Stochastic aspects of dynamics*, Appl. Math. Sci. 97, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1994.

[L-Y] A.Lasota and J.A.Yorke, *On the existence of Invariant densities for piecewise monotonic transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. 186 (1973), 481-488.

[P] S. Pelikan, *Invariant densities for random maps of the interval*, Trans. Amer. Math. Soc. 281 (1984), 813-825.

[R] M. Rychlik, *Bounded variation and invariant measures*, Studia Math. 76 (1983), 69-80.