数理解析研究所講究録
第 1942 巻 2015 年 44-58

Effects of randomization on asymptotic periodicity for random dynamical systems

三重大学・教育学部数学教室* 石谷 寛
Hiroshi Ishitani
Department of Mathematics, Faculty of Education
Mie University
名城大学・理工学部数学科† 石谷 謙介
Kensuke Ishitani
Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology
Meijō University

1 はじめに

区間上の変換 $T:[0,1)\rightarrow[0,1)$ が区分的に C^{2} 級で拡大的であるなら，変換 T に対応する Perron–Frobenius 作用素 $\mathcal{L}_{T}$ は以下の意味での漸近的周期性を持つ事が知られている．即ち，有限個の確率密度関数 $g_{i,j}\in L^{1}([0,1))$ と $L^{1}([0,1))$ 上の汎関数 $\lambda_{i,j}(\cdot)$ $(1\leq i\leq s,$ $1\leq j\leq m(i))$ が存在し以下の (i)-(iii) が成立する：

(i) $\{x\in[0,1);g_{i,j}(x)>0\}\cap\{x\in[0,1);g_{k,l}(x)>0\}=\phi$ for $(i,j)\neq(k,l)$.

(ii) 各 i に対し $\mathcal{L}_{T}$ は $\{g_{i,j}\}_{j=1}^{m(i)}$ を次の意味で周期的に写す：即ち，$m(i)>1$ の場合は $\mathcal{L}_{T}(g_{i,j})=g_{i,j+1}$ $(1\leq j\leq m(i)-1)$ かつ $\mathcal{L}_{T}(g_{i,m(i)})=g_{i,1}$ が成立し，$m(i)=1$ の場合は $\mathcal{L}_{T}(g_{i,1})=g_{i,1}$ が成立する．

(iii) $\displaystyle\lim_{n\rightarrow\infty}\left\|(\mathcal{L}_{T})^{n}\Big(f-\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m(i)}\lambda_{i,j}(f)g_{i,j}\Big)\right\|_{L^{1}([0,1))}=0$ for $f\in L^{1}([0,1))$.

*〒 514-8507 三重県津市栗真町屋町 1577
†〒 468-8502 名古屋市天白区塩釜口 1-5-1

なお，この $\mathcal{L}_T$ の漸近的周期性 (i)-(iii) が変換 T のエルゴード的性質を記述している．更に $A_{i,j}=\{x\in[0,1);g_{i,j}(x)>0\}$，$A_i=\bigcup_{j=1}^{m(i)}A_{i,j}$ と置くと，上記の $\mathcal{L}_T$ に関する性質 (i)-(iii) より変換 T が以下の意味での漸近的周期性を持つ事も分かる ([1],[7],[9])．即ち，$I=[0,1)$ の有限直和分割 $\{A_1,\cdots,A_s,B\}$ が存在し以下の (a)-(d) を満たす：

(a) 各 i に対し A_i は T 不変 (i.e., $T(A_i)=A_i$) であり，$T_i\equiv T|_{A_i}$ は Lebesgue 測度 m に関してエルゴード的である．

(b) 各 i に対し，T 不変かつ $m|_{A_i}$ と互いに絶対連続な A_i 上の測度 μ_i が存在する．

(c) $T^{-1}(B)\subset B$ かつ $\lim_{n\to\infty}m(T^{-n}(B))=0$ が成立．

(d) 各 i に対し，T_i の冪乗 $T_i^*\equiv(T_i)^{m(i)}$ は $T_i^*(A_{i,j})=A_{i,j}$ $(1\le j\le m(i))$ を満たし，$A_{i,j}$ 上の exact な変換となる．更に各 i に対し，T_i は $\{A_{i,j}\}_{j=1}^{m(i)}$ を周期的に写す変換となる．即ち，$m(i)>1$ の場合は $T_i(A_{i,j})=A_{i,j+1}$ $(1\le j\le m(i)-1)$ かつ $T_i(A_{i,m(i)})=A_{i,1}$ が成立し，$m(i)=1$ の場合は $T_i(A_{i,1})=A_{i,1}$ が成立する．

以上では，単一の変換 T と対応する Perron–Frobenius 作用素 $\mathcal{L}_T$ の漸近的周期性について概説した．一方で，決定論的力学系にノイズが付与された場合や，確率的に力学系が選ばれる場合に起きる現象などは古くから興味を持たれている問題である．そのため以下では，これらのランダムな力学系を反映する非特異変換のランダムな反復合成

$$T_{\omega_n}\circ T_{\omega_{n-1}}\circ\cdots\circ T_{\omega_1}x$$

を考察する．これは 2 章で扱われる様にスキュープロダクト (歪積) 変換の反復合成

$$S^n(x,\omega)=(T_{\omega_n}\circ T_{\omega_{n-1}}\circ\cdots\circ T_{\omega_1}x,\sigma^n\omega)$$

の第 1 座標として定義出来る ([3])．但しここでは各変換 T_{ω_i} は独立に選ばれるものと仮定する．この時，ある仮定の下でスキュープロダクト変換 $S(\equiv S^1)$ も上述の意味での漸近的周期性を持つ事が知られている．なお，スキュープロダクト変換 S はランダムな非特異変換と見做す事が出来る．本稿ではこのような非特異変換のランダム化が漸近的周期性に与える影響について論じる．

以下に本稿の構成を示す．まず 2 章では本稿の議論で必要となる Perron–Frobenius 作用素や非特異変換のランダムな反復合成といった概念の定義及び諸性質について述べる．次に 3 章ではある仮定の下で本稿の主結果を述べ，4 章では 3 章の仮定が成立するための十分条件について述べる．更に 5 章では本稿の主結果に関連する幾つかの数値例を示す．

2 準備

本章では 2.1 節で Perron–Frobenius 作用素の定義と後の議論で必要となる基本的性質について述べ，2.2 節で非特異変換のランダムな反復合成の定義と関連する命題に触れる．

2.1 Perron Frobenius 作用素

本節では，$(X, \mathcal{F}, m)$ を確率空間，$T : X \to X$ を m に関する非特異変換とする．即ち，$m(A) = 0$ を満たす任意の可測集合 $A \in \mathcal{F}$ に対して $m(T^{-1}(A)) = 0$ が成立するような変換 T を考える．また，測度 m に関して p 乗可積分な X 上の実数値関数全体を $L^p(m) \equiv L^p(X, \mathcal{F}, m)$ $(p \in [1, \infty])$ と書く．この時，$(X, \mathcal{F}, m, T)$ に対応する $L^1(m)$ 上の Perron–Frobenius 作用素 $\mathcal{L}_T$ を以下のように定義する．

定義 1. 各 $f \in L^1(m)$ に対して，$\mathcal{L}_T f \in L^1(m)$ を以下で定義する．

$$\mathcal{L}_T f \equiv \frac{dm_f}{dm}, \quad 但し\ m_f(A) \equiv \int_{T^{-1}(A)} f(x)dm(x). \tag{2.1}$$

この時，$\mathcal{L}_T : L^1(m) \to L^1(m)$ は以下のように特徴付ける事が出来る．

命題 2.1. $f, g \in L^1(m)$ に対し以下の関係式

$$\int_X g(x)h(x)dm(x) = \int_X f(x)h(Tx)dm(x),\ for\ h \in L^\infty(m), \tag{2.2}$$

を満たすなら，$g = \mathcal{L}_T f$ が成立する．

命題 2.1 を用いると，$\mathcal{L}_T$ に関する以下の諸性質を示せる．

命題 2.2. $\mathcal{L}_T$ は $L^1(m)$ 上の有界な正作用素であり，以下の *(1)-(6)* が成立する：

(1) $\mathcal{L}_T$ は積分を保つ，*i.e.*, $\int_X (\mathcal{L}_T f)(x)dm(x) = \int_X f(x)dm(x)$ $(f \in L^1(m))$ が成立．

(2) $f \in L^1(m)$ に対し $|(\mathcal{L}_T f)(x)| \leq (\mathcal{L}_T |f|)(x)$, ($m$-*a.e.*) が成立．

(3) $\mathcal{L}_T$ は縮小作用素である，*i.e.*, $\|\mathcal{L}_T f\|_{L^1(m)} \leq \|f\|_{L^1(m)}$ $(f \in L^1(m))$ が成立．

(4) $(\mathcal{L}_T)^n = \mathcal{L}_{T^n}$ が成立．但し $\mathcal{L}_{T^n}$ は T^n に対応する *Perron–Frobenius* 作用素とする．

(5) $g \in L^\infty(m)$ と $f \in L^1(m)$ に対し $g(\mathcal{L}_T f) = \mathcal{L}_T((g \circ T)f)$ が成立．

(6) $\mathcal{L}_T f = f$ が成立する事と，$f(x)dm(x)$ が T の不変測度になる事は同値．

これらの基本的性質を用いると，次の命題 2.3 及び命題 2.4 を示せる．

命題 2.3. 非負の関数 $f, g \in L^1(m)$ が $\mathcal{L}_T f = g$ を満たす時，$T^{-1}\{g > 0\} \supseteq \{f > 0\}$ (m-*a.e.*)，即ち $m\left(\{f > 0\} \setminus T^{-1}\{g > 0\}\right) = 0$ が成立する．

命題 2.4. 非負の関数 $f \in L^1(m)$ と可測集合 $A \in \mathcal{F}$ が $\mathcal{L}_T f = f$ かつ $T^{-1}(A) \supset A$ を満たす時，$\mathcal{L}_T(f 1_A) = f 1_A$ が成立する．

また，$\lim_{n\to\infty}(\mathcal{L}_T)^n f = g$ が成り立つ場合，$T^n\{f \neq 0\}$ のある種の極限集合は g の support と一致する事が分かる．即ち，次の命題が成立する．

命題 2.5. 非負の関数 $f, g \in L^1(m)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \|(\mathcal{L}_T)^n f - g\|_{L^1(m)} = 0 \tag{2.3}$$

が成立すると仮定すると以下を得る．

$$m\Big(\{f > 0\} \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(\{g > 0\})\Big) = 0. \tag{2.4}$$

以上の命題を用いる事で，Perron–Frobenius 作用素の漸近的周期性を仮定すれば，変換 T の極限集合の漸近的周期性を証明出来る．即ち，以下の命題が成立する．

命題 2.6. 有限個の確率密度関数 $g_{i,j} \in L^1(m)$ と $L^1(m)$ 上の汎関数 $\lambda_{i,j}(\cdot)$ $(1 \leq i \leq s,\ 1 \leq j \leq m(i))$ が存在し，以下の *(i)-(iii)* を満たすと仮定する：

(i) $\{g_{i,j} > 0\} \cap \{g_{k,l} > 0\} = \phi$ *for* $(i,j) \neq (k,l)$.

(ii) 各 i に対し $\mathcal{L}_T$ は $\{g_{i,j}\}_{j=1}^{m(i)}$ を次の意味で周期的に写す：即ち，$m(i) > 1$ の場合は $\mathcal{L}_T(g_{i,j}) = g_{i,j+1}$ $(1 \leq j \leq m(i)-1)$ かつ $\mathcal{L}_T(g_{i,m(i)}) = g_{i,1}$ が成立し，$m(i) = 1$ の場合は $\mathcal{L}_T(g_{i,1}) = g_{i,1}$ が成立．

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Big\|(\mathcal{L}_T)^n\Big(f - \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m(i)} \lambda_{i,j}(f) g_{i,j}\Big)\Big\|_{L^1(m)} = 0$ *for* $f \in L^1(m)$.

この時，$g_i \equiv \dfrac{1}{m(i)} \displaystyle\sum_{j=1}^{m(i)} g_{i,j}$, $A_i \equiv \{g_i > 0\}$ かつ $A_{i,j} \equiv \{g_{i,j} > 0\}$ と置くと，変換 T は以下 *(a)(b)(c)* の意味での漸近的周期性を持つ：

(a) 各 i に対し，A_i は T 不変 *(i.e.,* $T(A_i) = A_i$*)*，かつ A_i 上の確率測度 $g_i(x)dm(x)$ はエルゴード的で T 不変である．

(b) 集合 $B \equiv X \setminus \bigcup_{i=1}^{s} A_i$ に対し，$T^{-1}(B) \subset B$ かつ $\lim_{n\to\infty} m(T^{-n}(B)) = 0$ が成立．

(c) 各 i に対し，$T_i \equiv T|_{A_i}$ の冪乗 $T_i^* \equiv (T_i)^{m(i)}$ は $T_i^*(A_{i,j}) = A_{i,j}$ $(1 \leq j \leq m(i))$ を満たし，かつ各 $A_{i,j}$ 上の *exact* な変換となる．更に各 i に対し，T_i は $\{A_{i,j}\}_{j=1}^{m(i)}$ を周期的に写す変換となる．即ち，$m(i) > 1$ の場合は $T_i(A_{i,j}) = A_{i,j+1}$ $(1 \leq j \leq m(i)-1)$ かつ $T_i(A_{i,m(i)}) = A_{i,1}$ が成立し，$m(i) = 1$ の場合は $T_i(A_{i,1}) = A_{i,1}$ が成立する．

上記の命題 2.6 で与えた X の直和分割 $\{A_1, A_2, \cdots, A_s, B\}$ に対し，各 A_i のエルゴード性から以下の命題を直ちに示せる．

命題 2.7. 命題2.6の *(a)(b)(c)* を満たす可測分割 $\{A_1, A_2, \cdots A_s, B\}$ が存在すると仮定する．この時，可測集合 $A \in \mathcal{F}$ が $m(A) > 0$ かつ $T^{-1}(A) \supset A$ を満たすなら，各 $i \in \{1, \ldots, s\}$ に対し $A_i \cap A = \phi$ または $A_i \subset A$ が成立し，更に $A \cap \bigcup_{i=1}^{s} A_i \neq \phi$ が成立する．

2.2 非特異変換のランダムな反復合成

本節では非特異変換のランダムな反復合成を定義する．

[I] Y を完備可分距離空間，$\mathcal{B}(Y)$ は Y の Borel 可測集合族，及び η は $(Y, \mathcal{B}(Y))$ 上の確率測度とする．更に $\Omega \equiv \Pi_{i=1}^{\infty} Y$ を直積空間，$\mathcal{B}(\Omega)$ は Ω の Borel 可測集合族とし，$(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ 上に直積測度 $P \equiv \Pi_{i=1}^{\infty} \eta$ を導入する．

[II] $(X, \mathcal{F}, m)$ は確率空間とし，$(T_y)_{y \in Y}$ は m に関する X 上の非特異変換の族であり，$(x, y) \to T_y x$ は可測であると仮定する．

スキュープロダクト変換 $S : X \times \Omega \to X \times \Omega$ を

$$S(x, \omega) \equiv (T_{\omega_1} x, \sigma\omega), \quad (x, \omega) \in X \times \Omega \tag{2.5}$$

と定義する．但し ω_1 は $\omega = (\omega_i)_{i=1}^{\infty}$ の第1座標であり，$\sigma : \Omega \to \Omega$ は $\sigma((\omega_i)_{i=1}^{\infty}) = (\omega_{i+1})_{i=1}^{\infty}$ で定義されるシフト作用素である．この時，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し次が得られる．

$$S^n(x, \omega) = (T_{\omega_n} \circ T_{\omega_{n-1}} \circ \cdots \circ T_{\omega_1} x, \sigma^n \omega). \tag{2.6}$$

従って非特異変換のランダムな反復合成は $\pi_1 S^n(x, \omega)$ と表せる．但し $\pi_1 : X \times \Omega \to X$ は X への射影とする．T. Morita ([4],[5],[6]) では，これらの設定の下で不変測度の存在とその混合性が示されており，そこで用いられている手法が本稿に於いても有効である．

$(T_y)_{y \in Y}$ は m に関して非特異な変換の族であるため，S は $(X \times \Omega, \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\Omega), m \times P)$ 上の非特異変換となる．従って，S に対応した Perron–Frobenius 作用素 $\mathcal{L}_S : L^1(m \times P) \to L^1(m \times P)$ を定義でき，以下の積分方程式で特徴付ける事が出来る：

$$\int\int_{X \times \Omega} h(x, \omega)(\mathcal{L}_S f)(x, \omega) dm(x) dP(\omega) = \int\int_{X \times \Omega} f(x, \omega) h(S(x, \omega)) dm(x) dP(\omega),$$

for $h \in L^\infty(m \times P)$, where $L^p(m \times P) \equiv L^p(X \times \Omega, \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\Omega), m \times P)$ for $p \in [1, \infty]$.

なお [6] の補題 4.1 より直ちに次の命題が示せる．

命題 2.8. *(i)* $|\lambda| = 1$ に対し $(\mathcal{L}_S f)(x, \omega) = \lambda f(x, \omega)$ が成立すれば f は ω に依存しない．

(ii) 各 $f \in L^1(m)$ に対し，

$$(\mathcal{L}_S f)(x, \omega) = \int_Y (\mathcal{L}_{T_y} f)(x) \eta(dy), \quad (m \times P\text{-}a.e.), \tag{2.7}$$

が成立するため，$\mathcal{L}_S f \in L^1(m)$ と見做す事が出来る．

この命題2.8により，$\mathcal{L}_S$ は $L^1(m)$ 上の作用素と見做す事が出来，本稿の議論に於いて重要な以下の命題が得られる．

命題 2.9. 非負関数 $f(x), g(x) \in L^1(m)$ に対し，$(\mathcal{L}_S f)(x,\omega) = g(x)$ $(m \times P\, a.e.)$ が成立する場合，$\eta(Y_0) = 1$ となる可測集合 $Y_0 \in \mathcal{B}(Y)$ が存在し，各 $\omega_1 \in Y_0$ に対し次の関係式を満たすように出来る：

$$(T_{\omega_1})^{-1}\{g > 0\} \supseteq \{f > 0\}\ (m\text{-}a.e.), \quad i.e., \quad m\big(\{f > 0\} \setminus (T_{\omega_1})^{-1}\{g > 0\}\big) = 0.$$

3 主結果

本章では，本稿の主結果を述べる．但しここでは2.2節と同じ記号 ([I],[II]) を用いて議論するものとする．まず，主結果を述べるために必要となる $\mathcal{L}_S$ の漸近的周期性に関する仮定を述べる．なおこの仮定を満たすための十分条件は4章で議論する．

仮定 1. 有限個の確率密度関数 $\widehat{g}_{i,j} \in L^1(m)$ と $L^1(m)$ 上の汎関数 $\widehat{\lambda}_{i,j}(\cdot)$ $(1 \le i \le \widehat{s},\ 1 \le j \le \widehat{m}(i))$ が存在して以下 *(i)-(iii)* を満たす：

(i) $\{\widehat{g}_{i,j} > 0\} \cap \{\widehat{g}_{k,l} > 0\} = \phi$ *for* $(i,j) \neq (k,l)$.

(ii) 各 i に対し $\mathcal{L}_S$ は $\{\widehat{g}_{i,j}\}_{j=1}^{\widehat{m}(i)}$ を次の意味で周期的に写す：即ち，$\widehat{m}(i) > 1$ の場合は $\mathcal{L}_S(\widehat{g}_{i,j}) = \widehat{g}_{i,j+1}$ $(1 \le j \le \widehat{m}(i) - 1)$ かつ $\mathcal{L}_S(\widehat{g}_{i,\widehat{m}(i)}) = \widehat{g}_{i,1}$ が成立し，$\widehat{m}(i) = 1$ の場合は $\mathcal{L}_S(\widehat{g}_{i,1}) = \widehat{g}_{i,1}$ が成立する．

(iii) $$\lim_{n\to\infty} \Big\|(\mathcal{L}_S)^n\Big(f - \sum_{i=1}^{\widehat{s}} \sum_{j=1}^{\widehat{m}(i)} \widehat{\lambda}_{i,j}(f)\widehat{g}_{i,j}\Big)\Big\|_{L^1(m)} = 0 \textit{ for } f \in L^1(m).$$

更に，以下では Y_1 を $\mathcal{L}_{T_y}$ が漸近的周期性を持つようなパラメータ $y \in Y$ の集合とする．即ち，各 $y \in Y_1$ に対して確率密度関数 $g_{i,j}^{(y)} \in L^1(m)$ と $L^1(m)$ 上の汎関数 $\lambda_{i,j}^{(y)}(\cdot)$ $(1 \le i \le s(y),\ 1 \le j \le m(y,i))$ が存在して以下 (i)-(iii) を満たす：

(i) $\{g_{i,j}^{(y)} > 0\} \cap \{g_{k,l}^{(y)} > 0\} = \phi$ for $(i,j) \neq (k,l)$.

(ii) 各 i に対し $\mathcal{L}_{T_y}$ は $\{g_{i,j}^{(y)}\}_{j=1}^{m(y,i)}$ を次の意味で周期的に写す：即ち，$m(y,i) > 1$ の場合は $\mathcal{L}_{T_y}(g_{i,j}^{(y)}) = g_{i,j+1}^{(y)}$ $(1 \le j \le m(y,i) - 1)$ かつ $\mathcal{L}_{T_y}(g_{i,m(y,i)}^{(y)}) = g_{i,1}^{(y)}$ が成立し，$m(y,i) = 1$ の場合は $\mathcal{L}_{T_y}(g_{i,1}^{(y)}) = g_{i,1}^{(y)}$ が成立する．

(iii) $$\lim_{n\to\infty} \Big\|(\mathcal{L}_{T_y})^n\Big(f - \sum_{i=1}^{s(y)} \sum_{j=1}^{m(y,i)} \lambda_{i,j}^{(y)}(f) g_{i,j}^{(y)}\Big)\Big\|_{L^1(m)} = 0 \text{ for } f \in L^1(m).$$

なお5章で扱う例のように，$\mathcal{L}_S$ が仮定1を満たす時は多くの場合で $\eta(Y_1) > 0$ も満たしている事に注意されたい．

以上の記号と仮定1の下で命題2.9を次のように書き換える事が出来る．

命題 3.1. $\eta(Y_0) = 1$ を満たすパラメーターの集合 $Y_0 \in \mathcal{B}(Y)$ が存在して，

$$\{\widehat{g}_{i,j} > 0\} \subset T_y^{-1}\{\widehat{g}_{i,j+1} > 0\}\ (1 \le j \le \widehat{m}(i) - 1) \text{ かつ } \{\widehat{g}_{i,\widehat{m}(i)} > 0\} \subset T_y^{-1}\{\widehat{g}_{i,1} > 0\}$$

が全ての $y \in Y_0$ と $\widehat{m}(i) > 1$ を満たす $i \in \{1, \ldots, \widehat{s}\}$ に対して成立し，$\{\widehat{g}_{i,1} > 0\} \subset T_y^{-1}\{\widehat{g}_{i,1} > 0\}$ が全ての $y \in Y_0$ と $\widehat{m}(i) = 1$ を満たす $i \in \{1, \ldots, \widehat{s}\}$ に対して成立する．

注意 3.1. $\widehat{g}_i \equiv \dfrac{1}{\widehat{m}(i)} \displaystyle\sum_{j=1}^{\widehat{m}(i)} \widehat{g}_{i,j}\ (1 \le i \le \widehat{s})$, $g_i^{(y)} \equiv \dfrac{1}{m(y,i)} \displaystyle\sum_{j=1}^{m(y,i)} g_{i,j}^{(y)}\ (1 \le i \le s(y))$ と定めると，$\widehat{g}_i$ と $g_i^{(y)}$ はそれぞれ S 及び T_y のエルゴード的不変確率測度の密度関数である．

以上の記号と仮定1の下で，本稿の主結果である次の2つの定理が成立する．

定理 1. $\mathcal{L}_S$ が仮定 *1* を満たしているとする．この時，以下 *(1)(2)* が成立する．

(1) 全ての $i \in \{1, \ldots, \widehat{s}\}$ と全ての $y \in Y_0 \cap Y_1$ に対し，$\{\widehat{g}_i > 0\} \cap \bigcup_{k=1}^{s(y)} \{g_k^{(y)} > 0\} \ne \phi$ が成立し，更に $\{\widehat{g}_i > 0\} \supset \{g_{k_0}^{(y)} > 0\}$ が少なくとも1つの $k_0 \in \{1, \ldots, s(y)\}$ に対し成立する．従って，S の *ergodic component* の数 $\widehat{s}$ は T_y $(y \in Y_0 \cap Y_1)$ の *ergodic component* の数 $s(y)$ 以下となる．

(2) $i \in \{1, \ldots, \widehat{s}\}$ 及び $y \in Y_0 \cap Y_1$ とする．この時，$\{\widehat{g}_i > 0\} \supset \{g_{k_0}^{(y)} > 0\}$ を満たす $k_0 \in \{1, \ldots, s(y)\}$ に対し，$\widehat{m}(i)$ は $m(y, k_0)$ の約数となる．

命題3.1を用いると，正の確率で恒等変換が選ばれるなら全ての $\{\widehat{g}_i > 0\}$ 上で S は exact である事が分かる：

定理 2. 仮定 *1* 及び $\eta(\{y \in Y;\ T_y = I_d\}) > 0$ が成り立つならば，全ての $i \in \{1, \ldots, \widehat{s}\}$ に対し $\widehat{m}(i) = 1$ となる．ここで I_d は X 上の恒等変換とする．

4 仮定1を満たすための十分条件

本章では，単位区間 $I \equiv [0,1]$，Borel 可測集合族 $\mathcal{F} \equiv \mathcal{B}([0,1])$ と $(I, \mathcal{F})$ 上の Lebesgue 測度 m を考え，単位区間上の非特異変換族 $(T_y)_{y \in Y}$ のランダムな反復合成が3章の仮定1を満たすための十分条件について述べる．但しパラメータの集合 Y は完備可分距離空間であり，$(Y, \mathcal{B}(Y))$ 上に確率測度 η が定義されているものとする．

関数 $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ の $[0,1]$ 上の全変動を $var(f)$ で表す．この時，$f\in L^1([0,1])$ に対し $v(f)\equiv\inf\{var(\tilde{f}):\tilde{f}$ is a version of $f\}$ と定め，$V\equiv\{f\in L^1([0,1]):v(f)<\infty\}$ を考察する．V は $L^1([0,1])$ の部分集合として閉集合ではないが，$f\in V$ にノルム

$$\|f\|_V\equiv\|f\|_{L^1([0,1])}+v(f) \tag{4.1}$$

を導入すると $(V,\|\cdot\|_V)$ は Banach 空間となり，以下が成立する事が知られている ([8]).

$$\|fg\|_V\leq 2\|f\|_V\|g\|_V,\quad (f,g\in V). \tag{4.2}$$

定義 2. 変換 $T:[0,1]\to[0,1]$ で以下の *(1)-(2)* を満たすもの全体を $\mathcal{D}_\infty$ と表す.

(1) $[0,1]$ の高々可算個の区間への分割 $\{I_j\}_j$ が存在し，T は各 I_j 上で単調増加または単調減少であり，I_j の閉包 $\bar{I}_j$ まで C^2 級関数として拡張でき，更に各 I_j の T による像 $J_j\equiv T(I_j)$ が有限個の区間からなる.

(2) $\gamma(T)\equiv\inf_{x\in[0,1]}|T'(x)|>0$ が成立.

以下では，$\mathcal{D}_\infty$ に属する変換族 $(T_y)_{y\in Y}$ のスキュープロダクト変換 S について考察し，S が 3 章の仮定 1 ($\mathcal{L}_S$ の漸近的周期性に関する仮定) を満たすための十分条件を与える.

まず，$\mathcal{D}_\infty$ の単一の変換 T に対し以下の不等式が得られている ([8]).

命題 4.1. 変換 $T:[0,1]\to[0,1]$ は $\mathcal{D}_\infty$ の要素であり，T に対応する定義 *2(1)* の分割を $\{I_j\}_j$ とする．この時，以下の不等式が成立する.

$$v(\mathcal{L}_Tf)\leq\alpha(T)v(f)+\beta(T)\|f\|_{L^1(m)},\quad (f\in V),$$

$$\textit{where}\ \ \alpha(T)\equiv\frac{2}{\gamma(T)}\ \ \textit{and}\ \ \beta(T)\equiv\sup_j\left\{\frac{1}{m(I_j)}\right\}+\sup_j\left\{\frac{\sup_{x\in I_j}|(T_j^{-1})''(x)|}{\inf_{x\in I_j}|(T_j)'(x)|}\right\}.$$

この不等式を用いれば，$\mathcal{L}_S$ が漸近的周期性をもつための十分条件が直ちに得られる.

命題 4.2. $(T_y)_{y\in Y}\subset\mathcal{D}_\infty$ であり，ある自然数 $n_0\in\mathbb{N}$ に対して次の不等式

$$\int_Y\int_Y\cdots\int_Y\alpha(T_{y_{n_0}}\circ T_{y_{n_0-1}}\circ\cdots\circ T_{y_1})\eta(dy_{n_0})\eta(dy_{n_0-1})\cdots\eta(dy_1)<1 \tag{4.3}$$

$$\int_Y\int_Y\cdots\int_Y\beta(T_{y_{n_0}}\circ T_{y_{n_0-1}}\circ\cdots\circ T_{y_1})\eta(dy_{n_0})\eta(dy_{n_0-1})\cdots\eta(dy_1)<\infty \tag{4.4}$$

を満たすなら，実数 $\alpha\in(0,1)$ と $\beta\in(0,\infty)$ が存在して以下の不等式が成立する.

$$v(\mathcal{L}_S^{n_0}f)\leq\alpha v(f)+\beta\|f\|_{L^1([0,1])},\quad (f\in V). \tag{4.5}$$

不等式 (4.5) を満たせば，C.Ionescu-Tulcea and G. Marinescu([2]) の結果を用いて，$\mathcal{L}_S$ の quasi-compactness 及び漸近的周期性を示す事が出来る．なお，5 章の数値検証で取り上げる変換族 $(T_y)_{y\in Y}$ は全て不等式 (4.3) と (4.4) を満たしている事を確認出来るため，不等式 (4.5) が成立し，3 章の仮定 1 を満たす事が分かる.

5 数値例

本章では，3 章で紹介した定理 1，2 に関連した数値検証を行う．ここでは $X \equiv [0,1]$ は単位区間，$\mathcal{F} \equiv \mathcal{B}([0,1])$ は Borel 集合族，及び m は $(X,\mathcal{F})$ 上の Lebesgue 測度とし，確率密度関数の初期値は $f_0(x) = 2x$ $(x \in [0,1])$ とする．更に，完備可分距離空間は 2 点からなる集合 $Y = \{y_1, y_2\} \subset \mathbb{R}$ $(y_1 \neq y_2)$ を考え，Y 上の確率測度 η は $\eta(\{y_1\}) = \eta(\{y_2\}) = 1/2$ で与える．この場合 Perron–Frobenius 作用素 $\mathcal{L}_S f$ は以下で表せる．

$$(\mathcal{L}_S f)(x) = \frac{1}{2}\left\{(\mathcal{L}_{T_{y_1}} f)(x) + (\mathcal{L}_{T_{y_2}} f)(x)\right\}, \ x \in X.$$

5.1 例 1

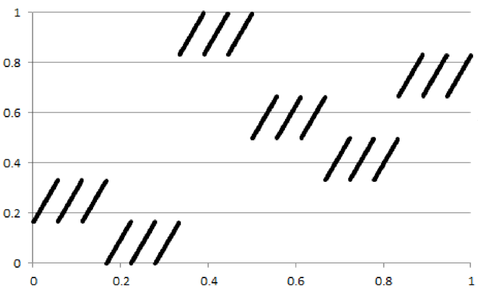

図 1: $\{R^\tau x;\ x \in [0,1]\}$ for $\tau = (2,1,6,4,3,5)$.

$m_0 \in \mathbb{N}$ に対し，互いに素な部分区間 J_k $(1 \le k \le m_0)$ を以下で定義する：

$$J_k \equiv \left[\frac{k-1}{m_0}, \frac{k}{m_0}\right), \ (1 \le k \le m_0 - 1), \text{ and } J_{m_0} \equiv \left[1 - \frac{1}{m_0}, 1\right].$$

X 上の周期関数 $R_3 x \equiv 3x \pmod 1$，$\{1, 2, \ldots, m_0\}$ の順列 $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{m_0})$，及び上記の $\{J_k\}_k$ に対し変換 $R^\tau : X \to X$ を

$$R^\tau x \equiv \frac{1}{m_0} R_3(m_0 x - k + 1) + \frac{\tau_k - 1}{m_0}, \text{ for } x \in J_k \ (k \in \{1, \ldots, m_0\}).$$

と定義すると，Perron–Frobenius 作用素 $\mathcal{L}_{R^\tau} f$ は以下で与えられる:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{R^\tau} f)(x) =& \frac{1}{3}\left\{ f\left(\frac{x}{3} + \frac{k-1}{m_0} - \frac{\tau_k - 1}{3m_0}\right) + f\left(\frac{x}{3} + \frac{k-1}{m_0} - \frac{\tau_k - 2}{3m_0}\right)\right. \\ &\left. + f\left(\frac{x}{3} + \frac{k-1}{m_0} - \frac{\tau_k - 3}{3m_0}\right)\right\}, \text{ for } x \in J_{\tau_k} = R^\tau(J_k) \ (1 \le k \le m_0).\end{aligned}$$

なお図 1 は $\tau = (2,1,6,4,3,5)$ の場合の $\{R^\tau x;\ x \in [0,1]\}$ のグラフを図示したものである．

5.1.1 $T_{y_1} = R^{(3,4,2,1)}$ 及び $T_{y_2} = R^{(4,5,6,2,3,1)}$ の場合

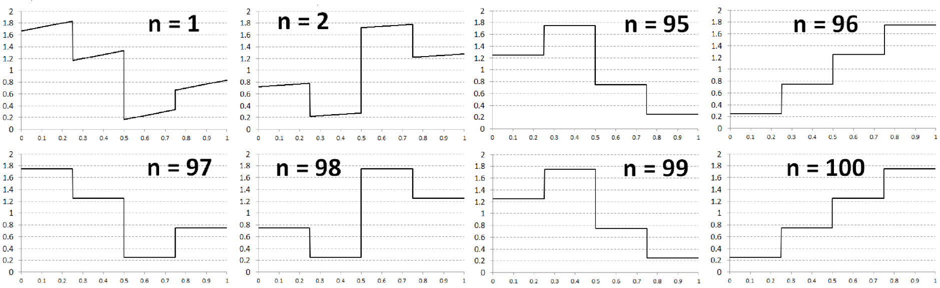

図 2: Results of $(\mathcal{L}^n_{R^\tau} f_0)(\cdot)$ for $\tau = (3, 4, 2, 1)$, $n = 1$, 2, 95, 96, 97, 98, 99, and 100.

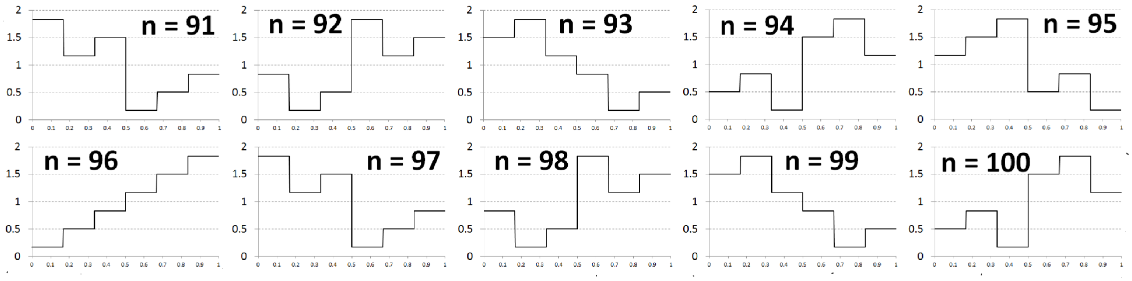

図 3: Results of $(\mathcal{L}^n_{R^\tau} f_0)(\cdot)$ for $\tau = (4, 5, 6, 2, 3, 1)$ and $91 \le n \le 100$.

ここでは，$T_{y_1} = R^{(3,4,2,1)}$ 及び $T_{y_2} = R^{(4,5,6,2,3,1)}$ によって記述されるランダムな変換 S を考える．$(\mathcal{L}^n_{T_y} f_0)(\cdot)$ $(y = y_1, y_2)$ は漸近的周期性を持ち，以下の関係式を得る．

$$Y_1 = Y(= \{y_1, y_2\}),\ s(y_1) = s(y_2) = 1,\ m(y_1, 1) = 4,\ m(y_2, 1) = 6,$$
$$g^{(y_1)}_{1,j_1}(x) = 4 \times 1_{[\frac{j_1-1}{4}, \frac{j_1}{4}]}(x),\ (1 \le j_1 \le 4),\ g^{(y_2)}_{1,j_2}(x) = 6 \times 1_{[\frac{j_2-1}{6}, \frac{j_2}{6}]}(x),\ (1 \le j_2 \le 6).$$

図 2 及び図 3 はそれぞれ $y = y_1, y_2$ に対する $(\mathcal{L}^n_{T_y} f_0)(\cdot)$ のグラフを図示したものであり，図 4 は $(\mathcal{L}^n_S f_0)(\cdot)$ のグラフを図示したものである．この時，$(\mathcal{L}^n_S f_0)(\cdot)$ の漸近的周期性について以下の関係式を得る．

$$Y_0 = Y(= \{y_1, y_2\}),\ \widehat{s} = 1,\ \widehat{m}(1) = 2,\ \widehat{g}_{1,j}(x) = 2 \times 1_{[\frac{j-1}{2}, \frac{j}{2}]}(x),\ (1 \le j \le 2).$$

従って確率密度関数の support に関して以下の関係式

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{2} \{g^{(y_1)}_{1,j} > 0\}\Big) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{3} \{g^{(y_2)}_{1,j} > 0\}\Big) \subset \{\widehat{g}_{1,1} > 0\},$$
$$\Big(\bigcup_{j=3}^{4} \{g^{(y_1)}_{1,j} > 0\}\Big) \cup \Big(\bigcup_{j=4}^{6} \{g^{(y_2)}_{1,j} > 0\}\Big) \subset \{\widehat{g}_{1,2} > 0\}$$

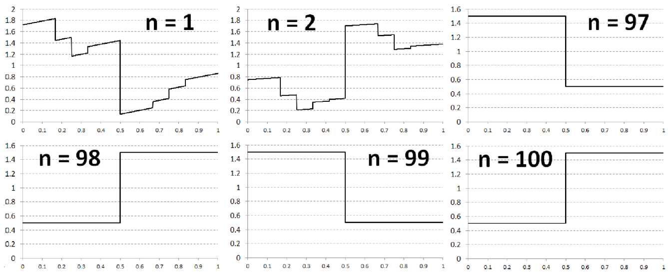

図 4: Results of $(\mathcal{L}_S^n f_0)(\cdot)$ with $T_{y_1} = R^{(3,4,2,1)}$ and $T_{y_2} = R^{(4,5,6,2,3,1)}$, for $n = 1, 2, 97, 98, 99$, and 100.

が成立し，$\widehat{m}(1) = 2$ が $m(y_1, 1) = 4$ 及び $m(y_2, 1) = 6$ の約数となるため，定理 1 に対応する結果を確認出来る．なお，図 2 $(n = m(y_1, 1) \times 25 = 100)$ 及び図 3 $(n = m(y_2, 1) \times 16 = 96)$ の結果から $y \in \{y_1, y_2\}$ に対して $0 < \lambda_{1,j}^{(y)}(f_0) < \lambda_{1,j+1}^{(y)}(f_0)$ $(1 \leq j \leq m(y, 1) - 1)$ が成立する事を確認出来，図 4 $(n = \widehat{m}(1) \times 50 = 100)$ の結果から $0 < \widehat{\lambda}_{1,1}(f_0) < \widehat{\lambda}_{1,2}(f_0)$ が成立する事を確認出来るが，これらは確率密度関数の初期値として単調増加関数 $f_0(x) = 2x$ を用いたため得られた結果である．

5.1.2 $T_{y_1} = R^{(2,1,6,4,3,5)}$ 及び $T_{y_2} = I_d$ の場合

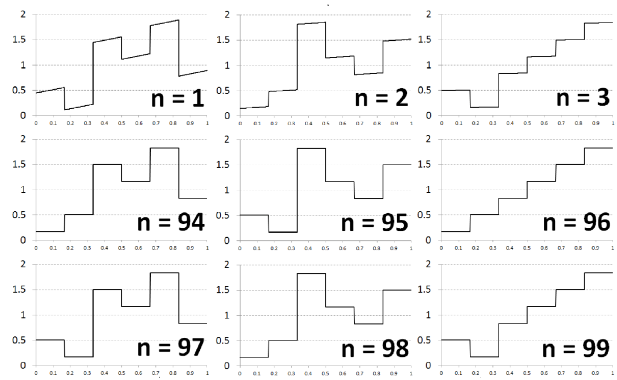

図 5: $(\mathcal{L}_{R^\tau}^n f_0)(\cdot)$ for $\tau = (2, 1, 6, 4, 3, 5)$.

次に $T_{y_1} = R^{(2,1,6,4,3,5)}$ 及び $T_{y_2} = I_d$ によって記述されるランダムな変換 S について考察する．この時，Perron–Frobenius 作用素は $(\mathcal{L}_S f)(x) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{R^{(2,1,6,4,3,5)}} f)(x) + \frac{1}{2} f(x)$ と計算出来る．$I_d(x) = x$ $(x \in [0, 1])$ は拡大的ではなく，$\mathcal{L}_{I_d}$ は漸近的周期性を持たないため，$Y_1 = \{y_1\}$ となる事が分かる．$(\mathcal{L}_{R^{(2,1,6,4,3,5)}}^n f_0)(\cdot)$ と $(\mathcal{L}_S^n f_0)(\cdot)$ のグラフをそれぞれ図 5,

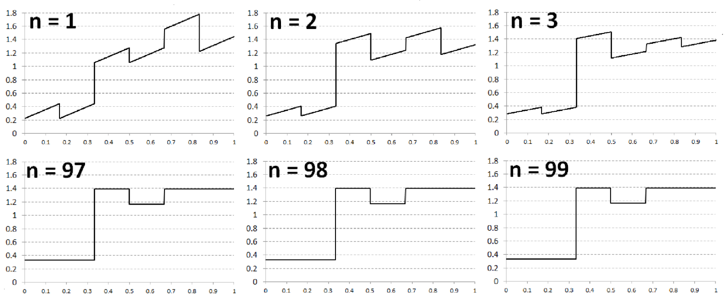

図 6: Results of $(\mathcal{L}_S^n f_0)(\cdot)$ with $T_{y_1} = R^{(2,1,6,4,3,5)}$ and $T_{y_2} = I_d$, for $n = 1$, 2, 3 and $n = 97$, 98, 99.

図 6 に図示する．この時，以下を確認出来る．

$$s(y_1) = \widehat{s} = 3,\ m(y_1, 1) = 2,\ m(y_1, 2) = 3,\ m(y_1, 3) = 1,\ \widehat{m}(1) = 1,\ \widehat{m}(2) = 1,\ \widehat{m}(3) = 1,$$
$$g_{1,1}^{(y_1)}(x) = 6 \times 1_{[0,\frac{1}{6}]}(x),\ g_{1,2}^{(y_1)}(x) = 6 \times 1_{[\frac{1}{6},\frac{2}{6}]}(x),\ g_{3,1}^{(y_1)}(x) = 6 \times 1_{[\frac{3}{6},\frac{4}{6}]}(x),$$
$$g_{2,1}^{(y_1)}(x) = 6 \times 1_{[\frac{2}{6},\frac{3}{6}]}(x),\ g_{2,2}^{(y_1)}(x) = 6 \times 1_{[\frac{4}{6},\frac{5}{6}]}(x),\ g_{2,3}^{(y_1)}(x) = 6 \times 1_{[\frac{5}{6},1]}(x),$$
$$\widehat{g}_{1,1}(x) = 3 \times 1_{[0,\frac{1}{3}]}(x),\ \widehat{g}_{2,1}(x) = 2 \times 1_{[\frac{2}{6},\frac{3}{6}]\cup[\frac{4}{6},1]}(x),\ \widehat{g}_{3,1}(x) = 6 \times 1_{[\frac{3}{6},\frac{4}{6}]}(x).$$

特に定理 2 に対応する結果 $\widehat{m}(i) = 1$ $(i = 1, 2, 3)$ が成立する事を確認出来る．

5.2　例 2

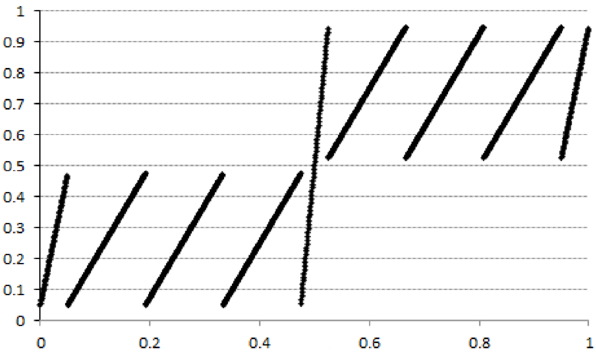

図 7: $\{Q^{(a)}(x); x \in [0, 1]\}$ for $a = 0.05$.

パラメータ $a \in (0, 1/3)$ に対し，互いに素な部分区間 I_k $(1 \le k \le 9)$ を

$$I_k \equiv [c_{k-1}, c_k)\ (1 \le k \le 8) \text{ and } I_9 \equiv [c_8, c_9],$$
$$\text{where } c_0 = 0,\ c_k = \begin{cases} c_{k-1} + a, & (k = 1, 5, 9), \\ c_{k-1} + \frac{1-3a}{6}, & (k = 2, 3, 4, 6, 7, 8), \end{cases}$$

と定めると，$X = [0, 1] = \bigcup_{k=1}^{9} I_k$ が成立する．まず，変換 $Q^{(a)} : X \to X$ を

$$Q^{(a)}x = \begin{cases} c_1 + D^{1,4}_{k-1,k}(x - c_{k-1}), & x \in I_k\ (1 \le k \le 4), \\ c_1 + D^{1,8}_{k-1,k}(x - c_{k-1}), & x \in I_k\ (k = 5), \\ c_5 + D^{5,8}_{k-1,k}(x - c_{k-1}), & x \in I_k\ (6 \le k \le 9), \end{cases} \quad \text{where } D^{k_3,k_4}_{k_1,k_2} = \frac{c_{k_4} - c_{k_3}}{c_{k_2} - c_{k_1}},$$

と定義する．なお，図7は $a = 0.05$ の場合に $\{Q^{(a)}x;\ x \in [0, 1]\}$ のグラフを図示したものである．更に，$b \in [-a, a]$ に対し変換 $Q^{(a,b)}$ を $Q^{(a,b)}x = Q^{(a)}x + b$ $(x \in X)$ で定義する．この時，$Q^{(a,b)}$ は $Q^{(a)}$ に摂動 b を加えた変換と見做す事が出来，Perron–Frobenius 作用素 $\mathcal{L}_{Q^{(a,b)}}f$ は以下で与えられる事が分かる ((i)-(v)):

(i) $(\mathcal{L}_{Q^{(a,b)}}f)(x) = D^{0,1}_{1,4} f(c_0)$, for $x = c_1 + b$.

(ii) $(\mathcal{L}_{Q^{(a,b)}}f)(x) = D^{4,5}_{1,8} f(c_4 + D^{4,5}_{1,8}(x - b - c_1)) + \displaystyle\sum_{k=1}^{4} D^{k-1,k}_{1,4} f\big(c_{k-1} + D^{k-1,k}_{1,4}(x - b - c_1)\big)$,

for $x \in (c_1 + b, c_4 + b]$.

(iii) $(\mathcal{L}_{Q^{(a,b)}}f)(x) = D^{4,5}_{1,8} f(c_4 + D^{4,5}_{1,8}(x - b - c_1))$, for $x \in (c_4 + b, c_5 + b]$.

(iv) $(\mathcal{L}_{Q^{(a,b)}}f)(x) = D^{4,5}_{1,8} f(c_4 + D^{4,5}_{1,8}(x - b - c_1)) + \displaystyle\sum_{k=6}^{9} D^{k-1,k}_{5,8} f\big(c_{k-1} + D^{k-1,k}_{5,8}(x - b - c_5)\big)$,

for $x \in (c_5 + b, c_8 + b]$.

(v) $(\mathcal{L}_{Q^{(a,b)}}f)(x) = 0$, for $x \in [0, c_1 + b) \cup (c_8 + b, 1]$.

一方で，$\widehat{a} \equiv \dfrac{a(1-3a)}{2(1-2a)}$ と置くと，以下の性質 (A)(B) が成立する事に注意する：

(A) $((Q^{(a,b)})^n x_0)_{n=0}^{\infty} \subset [0, c_4 + \widehat{a}]$ for $x_0 \in [0, c_4 + \widehat{a}]$ and $b \le \widehat{a}$.

(B) $((Q^{(a,b)})^n x_0)_{n=0}^{\infty} \subset [c_5 - \widehat{a}, 1]$ for $x_0 \in [c_5 - \widehat{a}, 1]$ and $b \ge -\widehat{a}$.

以下では $a = 0.15$, $b_1 = a/4$ $(< \widehat{a})$ かつ $b_2 = -3a/4$ $(< -\widehat{a})$ と置き，変換 $T_{y_1} = Q^{(a,b_1)}$, $T_{y_2} = Q^{(a,b_2)}$ 及び対応する変換 S について考察する．この時，図8及び図9は $(\mathcal{L}^n_{Q^{(a,b_k)}} f_0)(\cdot)$, $(k = 1, 2)$, を図示したものであり，図10は $(\mathcal{L}^n_S f_0)(\cdot)$ を図示したものである．なお図9では n が大きくなるにつれて $[c_5 - \widehat{a}, 1]$ 上での関数 $(\mathcal{L}_{Q^{(a,b_2)}} f_0)(\cdot)$ の値が0に近づく事を確認出来る．この事は，$Q^{(a,b_2)}$ が性質 (A) を満たすが性質 (B) を満たさないため，$[c_5 - \widehat{a}, 1]$ に属する x_0 を

初期値とする数列 $((Q^{(a,b_2)})^n x_0)_{n=0}^{\infty}$ が必ずしも $[c_5-\widehat{a},1]$ に属するとは限らない事と，一方である $n_0^* \in \mathbb{N}$ に対し $(Q^{(a,b_2)})^{n_0^*} x_0 \in [0, c_4+\widehat{a}]$ となった場合は $((Q^{(a,b_2)})^n x_0)_{n=n_0^*}^{\infty} \subset [0, c_4+\widehat{a}]$ が成立するためである．この数値例からは以下の結果を確認出来る．

$$\begin{aligned} &Y = Y_0 = Y_1 = \{y_1, y_2\},\ s(y_1) = 2,\ s(y_2) = \widehat{s} = 1, \\ &m(y_1,1) = m(y_1,2) = 1,\ m(y_2,1) = 1,\ \widehat{m}(1) = 1 \end{aligned}$$

更に，確率密度関数 $g_{1,k}^{(y_1)}(x)$, $(k=1,2)$, $g_{1,1}^{(y_2)}(x)$, 及び $\widehat{g}_{1,1}(x)$ の support に関して

$$\{g_{1,1}^{(y_1)} > 0\} \subsetneqq \{\widehat{g}_{1,1} > 0\} \text{ and } \{g_{1,1}^{(y_2)} > 0\} \subsetneqq \{\widehat{g}_{1,1} > 0\}$$

が成立する事を確認出来る．なお結果は，定理 1(1) の結果に対応する事に注意されたい．

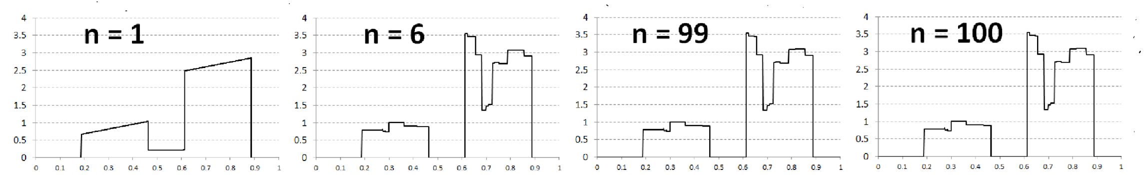

図 8: Results of $(\mathcal{L}_{Q^{(a,b_1)}}^n f_0)(\cdot)$ with $a = 0.15$ and $b_1 = a/4$ ($n = 1, 6, 99$, and 100).

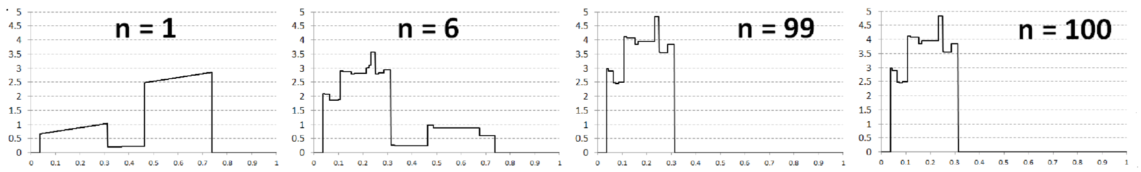

図 9: Results of $(\mathcal{L}_{Q^{(a,b_2)}}^n f_0)(\cdot)$ with $a = 0.15$ and $b_2 = -3a/4$ ($n = 1, 6, 99$, and 100).

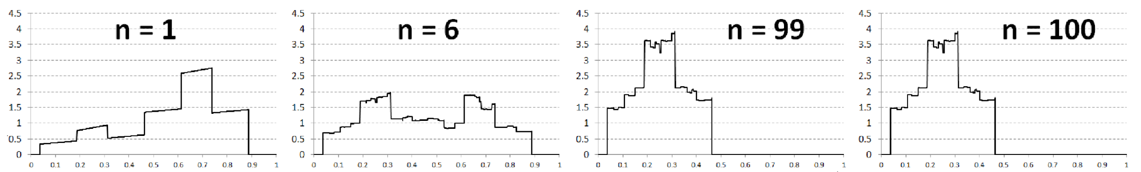

図 10: Results of $(\mathcal{L}_S^n f_0)(\cdot)$ for $T_{y_k} = Q^{(a,b_k)}$ $(k=1,2)$ with $a = 0.15$, $b_1 = a/4$, and $b_2 = -3a/4$ ($n = 1, 6, 99$, and 100).

参考文献

[1] T. INOUE AND H. ISHITANI: Asymptotic periodicity of densities and ergodic properties for nonsingular systems, *Hiroshima Math. J.*, **21**, pp.597-620, 1991.

[2] C. IONESCU-TULCEA AND G. MARINESCU. Théorie ergodique pour des classes d'operations non complètement continues. *Ann. of Math.* **52** (1950),140-147.

[3] S. KAKUTANI: Random ergodic theorems and Markoff processes with a stable distribution, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, pp.247-261, 1951.

[4] T. MORITA: Random iteration of one-dimensional transformations, *Osaka J. Math.*, **22**, pp.489-518, 1985.

[5] T. MORITA: Asymptotic behavior of one-dimensional random dynamical systems, *J. Math. Soc. Japan*, **37**, pp.651-663, 1985.

[6] T. MORITA: Deterministic version lemmas in ergodic theory of random dynamical systems, *Hiroshima J. Math.*, **18**, pp.15-29, 1985.

[7] T. Y. LI AND J. A. YORKE: Ergodic transformations from an interval into itself, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **235**, pp.183-192, 1978.

[8] J. ROUSSEAU-EGELE. Une théorème de la limite locale pour une classe de transformations dilatantes et monotones par morceaux, *Ann. Probab.*, **11**, pp.772-788, 1983.

[9] G. WAGNER: The ergodic behavior of piecewise monotonic transformations, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **46**, pp.317-324, 1979. .