

2次元乱流における異常渦粘性

神戸大学 大学院理学研究科 岩山 隆寛*, 村上 真也†

Takahiro Iwayama, Shin-ya Murakami,

Department of Earth and Planetary Sciences, Graduate School of Science, Kobe University

名古屋工業大学 工学研究科 渡邊 威‡

Takeshi Watanabe

Department of Scientific and Engineering Simulation, Graduate School of Engineering, Nagoya Institute of Technology

概要

一般化された2次元流体系の渦粘性を研究する。一般化された2次元流体系の支配方程式は、非圧縮流によって移流される能動的スカラー場 q の移流方程式である。 q と流れ関数 ψ との関係は $q = -(\nabla^2)^{\alpha/2}\psi$ によって与えられる。ここで、 α は3以下の実数である。一般化エンストロフィー $Q_\alpha(k)$ の発展方程式を、ある波数 k_c で切断したときに、 k_c よりも大きなモードの切断が、 k_c よりも小さな波数の一般化エンストロフィーの発展に与える影響を研究する。ここで、 $k < k_c$ となる $Q_\alpha(k)$ の発展に与える切断の効果を渦粘性と呼ぶことにする。我々のこの研究の動機は、渦粘性が正常拡散過程として表現できるかどうか調べることである。一般化エンストロフィーの発展に関する渦減衰準正規 Markov 化 (EDQNM) 完結近似方程式の漸近解析を用いて、注目する波数 k がたとえ k_c よりも十分に小さくても、渦粘性は漸近的に $k^2 Q_\alpha(k)$ 、即ち正常拡散型、では表現できず、むしろ $\alpha > 0$ のときは $k^{4-\alpha} Q_\alpha(k)$ 、 $\alpha < 0$ のときは $k^4 Q_\alpha(k)$ に比例する、即ち異常拡散型、であることを示す。このことは、正常拡散型としての渦粘性は、 $\alpha = 2$ (Navier-Stokes 系) のときにのみ、漸近的に実現することを示している。比例係数、渦粘性係数、は乱流のスペクトルでは、漸近的に負値である。これらの結果の正当性は、EDQNM 方程式の数値計算と、一般化された2次元流体系の強制散逸乱流の直接数値計算によって確認される。負の渦粘性係数を Fjørtoft の定理とスペクトルの拡大仮説により解釈する。

1 はじめに

乱流中では、物質や運動量、エネルギーなどの輸送・混合能力が促進されることはよく知られている。これは乱流拡散や渦粘性などと参照される現象であり、乱流研究の中心的テーマの一つである。渦粘性は乱流の数値シミュレーションでも重要な概念である。⁽¹⁵⁾ 支配方程式の非線形性は、グリッドにより解像されるスケールの運動とグリッドスケール以下(サブグリッドスケール)の運動との相互作用をもたらすため、乱流の数値実験ではそれらの相互作用を適切に表現することが必要となる。グリッドにより解像されるスケールの運動とサブグリッドスケールの運動との相互作用は、しばしば分子粘性との対応で、拡散型の粘性項、渦粘性、として表現される。本論文では、一般化された2次元流体系の乱流運動 (α 乱流) に関して渦粘性を研究する。

* iwayama@kobe-u.ac.jp

† murashin@gfd-dennou.org

‡ watanabe@nitech.ac.jp

一般化された 2 次元流体系は、次の非線型移流方程式、

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = \mathcal{D} + \mathcal{F}, \quad (1a)$$

$$-(-\nabla^2)^{\alpha/2} \psi = q, \quad (1b)$$

に従う系で、ここ 15 年ほどの間に精力的に研究が行われてきた。(3), (5), (8)–(10), (19), (22), (24)–(29) ここで、 $\psi(\mathbf{x}, t)$ は流れ関数、 $q(\mathbf{x}, t)$ は非圧縮性速度場 $\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \times \nabla \psi$ により移流されるスカラー場、 \mathbf{e}_z は運動の平面に垂直な単位ベクトル、 J は 2 次元 Jacobian、 α は 3 以下の実数、 ∇^2 は 2 次元 Laplacian、 \mathcal{D} と \mathcal{F} は散逸項と強制項をそれぞれ表す。この系は、しばしば α 乱流系と呼ばれる。なぜならば、(1) にパラメーター α が含まれていること、そしてこの系の乱流特性が今まで精力的に調べられてきたからである。

この系はもともと 2 次元 Navier–Stokes 方程式に従う強制散逸乱流のエンストロフィー慣性領域における波数空間の局所・非局所相互作用を研究するために導入されたモデル方程式系であるが、地球流体力学的 2 次元流体系の幾つかも含んでいる。(7), (21) 支配方程式 (1) は $\alpha = 2$ のとき、2 次元非圧縮性順圧流体 (\mathcal{D} が渦度の拡散の形で表される粘性であれば、いわゆる 2 次元 Navier–Stokes: 2D NS、 $\mathcal{D} = 0$ であれば、2 次元 Euler) 系の渦度方程式になる。

2D NS 系と同様に散逸と強制がなければ、(1) は 2 つの 2 次の不変量、一般化エネルギー \mathcal{E}_α と一般化エンストロフィー \mathcal{Q}_α 、

$$\mathcal{E}_\alpha \equiv -\frac{1}{2} \overline{\psi q}, \quad (2)$$

$$\mathcal{Q}_\alpha \equiv \frac{1}{2} \overline{q^2}, \quad (3)$$

を持つ。ここで、上線は流れの領域に渡る空間平均を意味する。我々は \mathcal{E}_α と \mathcal{Q}_α をそれぞれ簡潔にエネルギーとエンストロフィーと呼ぶ。加えて、 q を一般化渦度もしくは単に渦度と呼ぶ。

2D NS 方程式と同様に、(1) は 2 つの非粘性不変量を持つために、(1) に従う乱流運動 (以下、 α 乱流と呼ぶことにする) においても波数空間内で 2 つの不変量のカスケード現象が起こることが期待される。実際、今まで行われてきた一般化された 2 次元流体系の研究は、乱流特性の研究が活発に行われてきた。(3), (5), (9), (10), (19), (21), (22), (24)–(29) 特に強制散逸 α 乱流のエンストロフィー慣性領域におけるエンストロフィースペクトルの研究に努力が払われてきた。ここでエンストロフィースペクトル $Q_\alpha(k)$ は、流れの領域が無限の平面の場合、

$$Q_\alpha \equiv \int_0^\infty Q_\alpha(k) dk, \quad (4)$$

で定義される。エンストロフィー慣性領域の $Q_\alpha(k)$ は α の値に依存して、その形が変化する。 $0 < \alpha < 2$ ではいわゆる Kraichnan–Leith–Batchelor (KLB) 理論^{(1), (11), (14)} によって $Q_\alpha(k)$ の冪則が説明できるが、 $\alpha > 2$ では $Q_\alpha(k)$ の冪則の指数は α の値に依存しない。すなわち、 $\alpha = 2$ が転移点である。^{*1}

一方、最近 Burgess & Shepherd⁽³⁾ は一般化された 2 次元流体系の渦減衰準正規 Markov 化 (Eddy Damped Quasi-Normal Markovian: EDQNM) 完結近似方程式を導入し、強制散逸 α 乱流のエネルギー慣性領域のエネルギースペクトル、 $E_\alpha(k) \equiv k^{-\alpha} Q_\alpha(k)$ 、を研究している。EDQNM 完結近似方程式の解析によると、エネルギー

*1

$$Q_\alpha(k) \propto \begin{cases} k^{-(7-2\alpha)/3}, & (0 < \alpha < 2), \\ k^{-1} \ln k, & (\alpha = 2), \\ k^{-1}, & (2 < \alpha). \end{cases} \quad (5)$$

この $\alpha = 2$ におけるスペクトルの冪則の転移は、波数空間においてエンストロフィー輸送が局所的三波よりもむしろ、非局所的三波によって支配的に行われるからである。(21), (27)–(29)

ギースペクトルが KLB 理論から予測される冪乗則に従うと仮定したとき、 $\alpha = 5/2$ と 10 ではそれぞれエンストロフィー等分配、エネルギー等分配スペクトルに一致し、エンストロフィーフラックス/エネルギーフラックスはゼロになる。さらに $5/2 < \alpha < 10$ ではエネルギーフラックスは低波数から高波数へ向かう。これは、エネルギーの逆カスケード⁽¹¹⁾を示すフラックスとは逆向きである。彼らは秩序渦を解像しない直接数値シミュレーションを行い、 $0 < \alpha < 5/2$ ではエネルギースペクトルの冪則は KLB 理論による予測と一致するが、 $\alpha \geq 5/2$ では KLB 理論の予測よりも急峻なスペクトルになり、エネルギーフラックスは高波数から低波数側へ向かうこと、即ちエネルギーの逆カスケードが起きていること、を示した。

Iwayama & Watanabe (2014)⁽¹⁰⁾(以下、IW14 と略記する) は、減衰性 α 乱流の赤外領域 ($k \rightarrow 0$) に形成されるエンストロフィースペクトルを EDQNM 完結近似方程式の解析と、直接数値実験により研究した。赤外領域スペクトルには 3 つのカノニカルなケースがあり、急峻な初期スペクトルからの発展では α の値に依存しない普遍的なスペクトルが実現されることと、渦度の相関関数のモーメントで表現される 2 つの不変量が存在することを示した。

IW14⁽¹⁰⁾ の研究は α 乱流における渦粘性の表現も同時に導いている。彼らは、EDQNM 近似方程式のエンストロフィー伝達関数に関して、 $\mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m} = 0$ を満たす三波波数ベクトルのうち $k \ll l \simeq m$ となる非同所相互作用の寄与を微小パラメータ ($\epsilon \equiv k/l$) 展開によって見積もった。 ϵ の最低次のオーダーでエンストロフィー伝達関数は k^5 に比例する部分と、 $\alpha > 0$ のとき、 $k^{4-\alpha} Q_\alpha(k)$ に比例 ($\alpha < 0$ のときは $k^4 Q_\alpha(k)$ に比例) する 2 つの項からなる。前者は赤外領域スペクトルの形成に寄与し、後者が Kraichnan(1976)⁽¹²⁾ によって NS 系に対して導入された渦粘性のスペクトル表現である。彼はこの表式を用いて、グリッドスケールとサブグリッドスケール間のスケール分離が十分であれば、サブグリッドスケールの現象はグリッドスケールに対して拡散型に作用する、ことを導いている。しかしながら、IW14⁽¹⁰⁾ の研究は、サブグリッドスケールの影響は、渦度と流れ関数の関数関係に依存し、 α 乱流における渦粘性は $\alpha = 2$ 、即ち、NS 系のときにのみ拡散型で、一般には異常拡散型⁽¹⁸⁾であることを示している、という点で興味深い。

本論文は、IW14⁽¹⁰⁾ による示唆を、EDQNM 完結近似方程式の数値計算と一般化された 2 次元流体方程式の直接数値計算によって確かめる。この論文は以下のように構成されている。§ 2 では、一般化された 2 次元流体系における渦粘性の定式化を行う。§ 3 では、IW14⁽¹⁰⁾ の議論をもう一度振り返り、EDQNM 完結近似方程式の漸近解析による渦粘性の表現を導く。§ 4 では、EDQNM 完結近似方程式の数値計算 および (1) の直接数値計算から、§ 3 の理論的な予測の正当性を立証する。最後に § 5 で結果をまとめる。

2 定式化

我々は先ず一辺が L の正方形で、二重周期境界条件を満たす領域に閉じ込められた系を考察することにす。さらに (1a) の粘性項 \mathcal{D} は超粘性項、

$$\mathcal{D} = -\nu_p (-\nabla^2)^p q, \quad (6)$$

に設定する。超粘性係数 ν_p と粘性の階数 p は共に正の量である。このとき、流れ関数、渦度、強制は Fourier 級数でそれぞれ

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (7a)$$

$$q(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{q}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (7b)$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathcal{F}}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (7c)$$

と展開される。ここで $\mathbf{k} = 2\pi\mathbf{n}/L$ は波数ベクトルで、 $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ は n_x, n_y を整数とするベクトル。 $\sum_{\mathbf{k}}$ は整数 n_x, n_y についてそれぞれ $-\infty$ から ∞ まで和をとるものとする。(6) と (7) を (1) へ代入すると、支配方程式の Fourier 空間版、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_p k^{2p}\right) \hat{q}(\mathbf{k}) = \sum_l \sum_m \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, \mathbf{0}} \frac{\mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{m}) (l^\alpha - m^\alpha)}{2l^\alpha m^\alpha} \hat{q}^*(\mathbf{l}) \hat{q}^*(\mathbf{m}) + \hat{\mathcal{F}}(\mathbf{k}), \quad (8a)$$

$$\hat{q}(\mathbf{k}) = -k^\alpha \hat{\psi}(\mathbf{k}), \quad (8b)$$

を得る、ここで、 $k = |\mathbf{k}|$, $l = |\mathbf{l}|$, $m = |\mathbf{m}|$, である。星印は複素共役を表す。時間の変数は記述の簡潔性のため省略している。

$L \rightarrow \infty$ のとき、(7) の Fourier 級数展開は Fourier 変換に置き換わり、エンストロフィースペクトル $Q_\alpha(k)$ の発展は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu_p k^{2p}\right) Q_\alpha(k) = T_\alpha^Q(k) + \hat{\mathcal{F}}^Q(k), \quad (9)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial k} \Pi_\alpha^Q(k) + \hat{\mathcal{F}}^Q(k), \quad (10)$$

によって支配される。ここで、 $T_\alpha^Q(k)$ はエンストロフィー伝達関数、 $\Pi_\alpha^Q(k)$ はエンストロフィーフラックスで、両者は

$$\Pi_\alpha^Q(k) = \int_k^\infty T_\alpha^Q(k') dk', \quad (11)$$

で結ばれる。 $\hat{\mathcal{F}}^Q(k)$ は強制に伴う項である。エンストロフィー伝達関数 $T_\alpha^Q(k)$ は三波エンストロフィー伝達関数 $T_\alpha^Q(k, l, m)$ を用いて、

$$T_\alpha^Q(k) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dl \int_{|l-k|}^{l+k} dm T_\alpha^Q(k, l, m), \quad (12)$$

で与えられる。 $T_\alpha^Q(k, l, m)$ は $\mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m} = \mathbf{0}$ を満たす波数ベクトル間で詳細釣り合、

$$T_\alpha^Q(k, l, m) + T_\alpha^Q(l, m, k) + T_\alpha^Q(m, k, l) = 0, \quad (13)$$

を満たし、 l と m に関して対称、

$$T_\alpha^Q(k, l, m) = T_\alpha^Q(k, m, l), \quad (14)$$

である。(12) の積分領域は、 $\mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m} = \mathbf{0}$ を満たす l, m の範囲で、図 1 に示されている。

Fourier 空間をある波数 k_c によって 2 つの領域に分割する。 k_c を切断波数 (cutoff wavenumber) と呼ぶことにする。 $k < k_c$ に関するエンストロフィー伝達関数を 2 つに分解する:

$$T_\alpha^Q(k) = T_\alpha^{Q(<)}(k|k_c) + T_\alpha^{Q(>)}(k|k_c), \quad (15a)$$

$$T_\alpha^{Q(<)}(k|k_c) = \int_0^{k_c} dl \int_{|l-k|}^l dm T_\alpha^Q(k, l, m), \quad (15b)$$

$$T_\alpha^{Q(>)}(k|k_c) = \int_{k_c}^\infty dl \int_{l-k}^l dm T_\alpha^Q(k, l, m). \quad (15c)$$

$T_\alpha^{Q(<)}(k|k_c)$ は切断波数 k_c 以下の波数を持った渦度モード間の相互作用のみによるエンストロフィー輸送を表し、 $T_\alpha^{Q(>)}(k|k_c)$ は切断波数以上の波数をもった渦度モードが関与するエンストロフィー輸送を表す。

IW14⁽¹⁰⁾ の結果は、エンストロフィー伝達関数の分解 (15) を用いて、エンストロフィースペクトル方程式 (9) が、 $\alpha > 0$, $\alpha < 0$ に関してそれぞれ、 $k \ll k_c$ のとき

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2 \{ \nu k^{2p} + \nu_T(k|k_c) k^{4-\alpha} \} \right) Q_\alpha(k) = T_\alpha^{\mathcal{Q}(<)}(k|k_c) + \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{Q}}(k), \quad (16a)$$

$$\nu_T(k|k_c) = - \frac{T_\alpha^{\mathcal{Q}(>)}(k|k_c)}{2k^{4-\alpha} Q_\alpha(k)}, \quad (16b)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2 \{ \nu k^{2p} + \nu_T(k|k_c) k^4 \} \right) Q_\alpha(k) = T_\alpha^{\mathcal{Q}(<)}(k|k_c) + \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{Q}}(k), \quad (17a)$$

$$\nu_T(k|k_c) = - \frac{T_\alpha^{\mathcal{Q}(>)}(k|k_c)}{2k^4 Q_\alpha(k)}, \quad (17b)$$

となり、(16b)、(17b) で定義される渦粘性係数が k に依存しないことを示唆する。なお、以上の変形は乱流の統計理論の近似には無関係であることを注意しておく。そこで本研究では (16b)、(17b) で渦粘性係数を定義する。

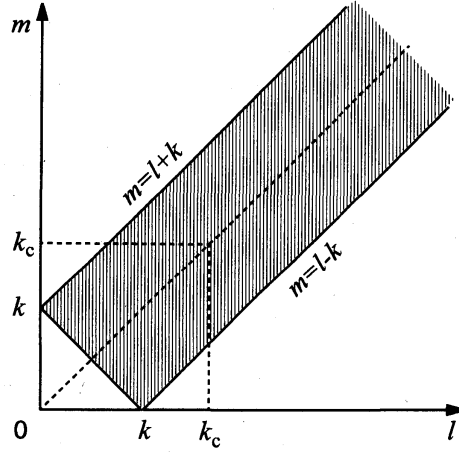


図1 陰影をつけた領域は、波数 k, l, m が三角形 $k + l + m = 0$ を形成できるような (l, m) 平面の領域。三波エンストロフィー伝達関数 $T_\alpha^{\mathcal{Q}}(k, l, m)$ は陰影をつけた領域以外ではゼロである。

3 EDQNM 近似方程式を用いた渦粘性の導出

本節では、EDQNM 完結近似方程式を用いて、エンストロフィー伝達関数の $k \ll k_c$ における漸近形を求め、(16b)、(17b) で定義される渦粘性係数が定数であることを導く。この節の結果はすでに IW14 で述べられているが、彼らの結果をより洗練した形で提示する。

EDQNM 近似のもとで三波エンストロフィー伝達関数は、

$$T_\alpha^{\mathcal{Q}}(k, l, m) = \frac{2k^{\alpha+2}}{\pi l m} \theta_{klm} \left[2a_{klm} \frac{k}{(lm)^\alpha} Q_\alpha(l) Q_\alpha(m) - b_{klm} \frac{l}{(mk)^\alpha} Q_\alpha(m) Q_\alpha(k) - b_{kml} \frac{m}{(kl)^\alpha} Q_\alpha(k) Q_\alpha(l) \right], \quad (18)$$

と書ける。ここで、

$$a_{klm} = \frac{b_{klm} + b_{kml}}{2}, \quad (19a)$$

$$b_{klm} = 2 \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(k^\alpha - m^\alpha)\sqrt{1-x^2}}{k^{\alpha+2}(lm)^{\alpha-2}}, \quad (19b)$$

$$b_{kml} = 2 \frac{(m^\alpha - l^\alpha)(k^\alpha - l^\alpha)\sqrt{1-x^2}}{k^{\alpha+2}(lm)^{\alpha-2}}, \quad (19c)$$

は幾何学的因子で x は $k+l+m=0$ の三角形において長さ k の辺と向かい合う内角の余弦である: 即ち, $x = l \cdot m / (lm)$. 関数 θ_{klm} は三波 (k, l, m) に伴う 3 次モーメントの緩和時間であり, 以下のように表現される:

$$\theta_{klm} = \frac{1}{\mu_{klm}}, \quad (20a)$$

$$\mu_{klm} = \mu_k + \mu_l + \mu_m, \quad (20b)$$

$$\mu_k = \mu [k^{5-2\alpha} Q_\alpha(k)]^{1/2}. \quad (20c)$$

(20c) における比例係数 μ は今のところ未決定である. μ は EDQNM 完結近似方程式から導かれる慣性領域の冪的スペクトルの係数がいわゆる Kolmogorov 定数と一致するように決定される. しかしながら, Navier-Stokes 方程式系 ($\alpha = 2$) 以外の α 乱流系では Kolmogorov 定数は求められていない. そこで μ の値も $\alpha = 2$ 以外は知られていない. のちに見るように渦粘性の大きさは μ に依存するが, その波数依存性は μ に無関係である. そこで, 現在の目的のためには μ が未定でも問題ない.

$k \ll k_c$ の時に, $\nu_T(k|k_c)$ の漸近形を調べる. 余弦定理, $m^2 = k^2 + l^2 - 2klz$, を用いて (15c) における m に関する積分を z に関する積分に変換する. ここで z は $k+l+m=0$ の三角形において長さ m の辺と向かい合う内角の余弦, $z = k \cdot l / (kl)$, である. このとき, (15c) は,

$$T_\alpha^{Q(>)}(k|k_c) = \int_{k_c}^{\infty} dl \int_{k/(2l)}^1 dz \frac{kl}{m} T_\alpha^Q(k, l, m), \quad (21)$$

と書き換えられる. 次に (21) における被積分関数を小さなパラメータ $\epsilon \equiv k/l$ で展開する. 展開の詳しい計算は IW14 の付録 A に掲載されている. ϵ の最低次で, 三波エンストロフィー伝達関数 $T_\alpha^Q(k, l, m)$ は, IW14 の (31) より,

$$\begin{aligned} T_\alpha^Q(k, l, m) \simeq & \frac{4z^2\sqrt{1-z^2}}{\pi} \theta_{kll} \times \\ & \left[\alpha^2 l^{-(2\alpha+1)} \{Q_\alpha(l)\}^2 k^4 \right. \\ & - \alpha l^{-\alpha} \left\{ \frac{\partial \{l Q_\alpha(l)\}}{\partial l} - 2Q_\alpha(l) \right\} k^{3-\alpha} Q_\alpha(k) H(\alpha) \\ & \left. + \alpha l^{-2\alpha} \left\{ \frac{\partial \{l Q_\alpha(l)\}}{\partial l} - (\alpha+2)Q_\alpha(l) \right\} k^3 Q_\alpha(k) H(-\alpha) \right], \quad (22) \end{aligned}$$

である. ここで, $H(x)$ は Heaviside の階段関数である. (22) を (21) へ代入し, z に関する積分を行うと, 最終的に,

$$\begin{aligned} T_\alpha^{Q(>)}(k|k_c) \simeq & \frac{\alpha^2}{4} \left[\int_{k/\epsilon}^{\infty} \theta_{kll} l^{-(2\alpha+1)} \{Q_\alpha(l)\}^2 dl \right] k^5 \\ & - 2\nu_T^{(+)}(k|k_c) k^{4-\alpha} Q_\alpha(k) H(\alpha) - 2\nu_T^{(-)}(k|k_c) k^4 Q_\alpha(k) H(-\alpha), \quad (23) \end{aligned}$$

を得る。ここで、

$$\nu_T^{(+)}(k|k_c) = \frac{\alpha}{8} \int_{k_c}^{\infty} \theta_{kll} l^{-\alpha} \left[\frac{\partial \{l Q_\alpha(l)\}}{\partial l} - 2Q_\alpha(l) \right] dl, \quad (24)$$

$$\nu_T^{(-)}(k|k_c) = \frac{|\alpha|}{8} \int_{k_c}^{\infty} \theta_{kll} l^{-2\alpha} \left[\frac{\partial \{l Q_\alpha(l)\}}{\partial l} - (\alpha + 2)Q_\alpha(l) \right] dl, \quad (25)$$

である。z に関する積分は、

$$\int_{k/(2l)}^1 z^2 \sqrt{1-z^2} dz \simeq \int_0^1 z^2 \sqrt{1-z^2} dz = \frac{\pi}{16}, \quad (26)$$

を用いた。

今、エンストロフィースペクトル $Q_\alpha(k)$ が全ての波数領域で自己相似スペクトル

$$Q_\alpha(k) \sim k^{-n}, \quad (27)$$

に従うと仮定する。このとき、(22) における第1項と第2項の比は、 $\{\alpha/(n+1)\}(k/l)^{\alpha+n+1}$ である。一方、(22) における第1項と第3項の比は、 $\{|\alpha|/(\alpha+n+1)\}(k/l)^{n+1}$ である。したがって、 $\alpha > 0$ のとき、 $n > -\alpha - 1$ 、 $\alpha < 0$ のとき $n > -1$ となる自己相似スペクトル (27) では、スケール分離が十分 ($k \ll k_c < l$) であれば、(22) の第1項は無視することができ、したがって、(23) の第1項も無視することができる。この大きさの見積もりは、 θ_{klm} の形に依存しないことを注意しておく。

渦粘性係数 (24), (25) の符号は、それらの被積分関数の angle bracket 中の符号で決まる、なぜならば、3次モーメントの緩和時間 θ_{kll} は正定値だからである。再び、全ての波数領域で自己相似スペクトル (27) が成り立つと仮定すると、 $\alpha > 0$ のときには $n < -1$ であれば $\nu_T^{(+)}(k|k_c) > 0$ 、 $\alpha < 0$ のときには $n < |\alpha| - 1$ であれば、 $\nu_T^{(-)}(k|k_c) > 0$ となる。この解析においても θ_{klm} の具体的な形は無関係であることを注意しておく。 $n > 0$ となる負の冪を持った自己相似スペクトルでは、渦粘性係数 (24), (25) は負値である。

$\alpha = 2$ のとき、エネルギースペクトル $E_\alpha(k)$ で表現された (24) は 2D NS 方程式系に関して Kraichnan(1976)⁽¹²⁾ によって導かれた渦粘性係数に一致する。

3次モーメントの緩和時間 θ_{klm} において、乱流状態では μ_k は一般に波数の増大関数と考えられるので、 $k \ll l \simeq m$ において $\mu_k + \mu_l + \mu_m \simeq 2\mu_l$ となる。したがって、 θ_{kll} は k に依存しない。したがって、(24) と (25) は注目する波数 k に依存しない定数である。

4 数値計算

3節で得られた結果の正当性を、EDQNM 完結近似方程式の数値計算と (1) の直接数値シミュレーションによって示す。

4.1 EDQNM 完結近似方程式の数値計算

三波エンストロフィー伝達関数に EDQNM 完結近似した (18) を用いて、(15c) を数値的に求めることにより、渦粘性係数 (16b), (17b) を見積もる。ここでは、KLB 理論から導かれるエネルギー慣性領域における冪的スペクトルを仮定する：

$$Q_\alpha(k) = C\epsilon^{2/3} k^{-(7-4\alpha)/3}. \quad (28)$$

このとき、前節の議論から、 $\alpha < 10$ のときには (23) の $T_\alpha^{Q(>)}(k|k_c)$ の第1項は無視できる。また、 $\alpha < 5/2$ であれば、渦粘性係数 (24), (25) は負の値である。

(15c) の数値積分では、波数を $\Delta k = 5 \times 10^{-4}$ の間隔で分割し、 $k_c = 1$ 、積分の上限を $k_{\max} = 20$ に設定して積分を数値的に実行した。 $\alpha = -2, -1, 1, 2, 2.2, 2.8, 3$ に関して、 Δk の値を半分にした場合、 k_{\max} の値を倍にした場合の2つのケースについて結果の Δk 依存性、 k_{\max} 依存性を調べたが、結果は数値的誤差の範囲内で選んだ $\Delta k, k_{\max}$ の値に依存しないことを確認している。

図2に規格化された渦粘性係数を示す。渦粘性係数は $0.01k_c \leq k \leq k_c$ の範囲の k について求め、 $k = 0.01k_c$ における渦粘性係数の絶対値、 $|\nu_T(0.01k_c|k_c)|$ 、で規格化している。図2は、渦粘性係数が一般に $\alpha < 5/2$ のときは波数の単調増加、 $\alpha > 5/2$ のときには減少関数であることを示している ($\alpha = -2$ に関しては、 $k \simeq 0.4k_c$ まで10%ほど減少したのち、急激に増加している)。図2は切断波数 k_c よりも十分小さな波数領域では、渦粘性係数は定数であることを示している。即ち、注目するスケールとサブグリッドスケール間のスケール分離が十分であれば、サブグリッドスケールの現象は $\alpha > 0$ のとき $k^{4-\alpha}Q_\alpha(k)$ に比例し、 $\alpha < 0$ では $k^4Q_\alpha(k)$ に比例する異常拡散現象である。

KLB スケーリング (28) を仮定したとき $\alpha < 5/2$ において $k \ll k_c$ の渦粘性係数の値は負になることが (23) から導かれる。一方、 $\alpha > 5/2$ では $k \ll k_c$ のときの渦粘性係数は正の値になることも (24), (25) からわかる。これは $\alpha > 5/2$ では EDQNM 完結近似方程式のエネルギーフラックスが、エネルギー慣性領域で低波数から高波数へ向くという性質⁽³⁾を反映している。 $\alpha = 5/2$ では渦粘性係数 (24) はゼロである。これは、 $\alpha = 5/2$ のときエンストロフィースペクトル (28) はエンストロフィー等分配スペクトル $Q_\alpha(k) \sim k^{-1}$ になり、エネルギーフラックス/エンストロフィーフラックスはゼロになるからである。もし、 $\alpha > 5/2$ においてもエネルギーフラックスが低波数に向くならば、渦粘性係数の漸近値は、負になることが予想される。 k が切断波数 k_c に近づくとき渦粘性係数の値は急激に変化し、渦粘性係数の符号は、その $k \ll k_c$ の漸近値の符号と逆転する。渦粘性係数の符号の逆転が起こる波数は、 α の絶対値の増大とともに大きくなり、 k_c 付近における急激な変化は α の絶対値が大きくなるに従いより急激になる。

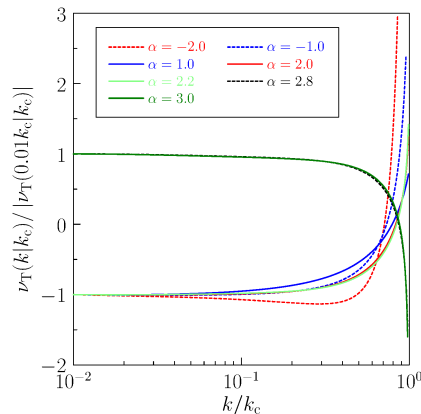


図2 EDQNM 完結近似方程式から求められた渦粘性係数 (16b), (17b). 横軸は注目する波数 k と切断波数 k_c との比, k/k_c . 縦軸は規格化した渦粘性係数 $\nu_T(k|k_c) / |\nu_T(0.01k_c|k_c)|$. 凡例は図に示してある。

今まで展開してきた EDQNM 完結近似方程式による結論、渦粘性は異常拡散型である、を直接数値シミュレーションで確かめる必要がある。なぜなら、一般に完結近似方程式は、乱流場に存在し、乱流の動力学に重要な影響を与える秩序渦構造を表現できないことが知られている。そこで、完結近似方程式を用いた予測は秩序渦の影響が考慮されていない。秩序渦の存在が、ここで示した渦粘性の波数依存性に影響を与えるか否かを調べる必要がある。さらに、 α 乱流系における EDQNM 完結近似方程式は、 $\alpha > 5/2$ に関してエネルギー慣性領域におけるスペクトルの傾きやフラックスの向きに成功していない。そこで、EDQNM 完結近似方程式

から得られた $\alpha > 5/2$ における渦粘性の波数依存性や、渦粘性係数の値の符号についても直接数値実験で確認する必要がある。

4.2 直接数値実験の詳細

以下では、(1) に従う強制散逸乱流の直接数値シミュレーションについて報告する。まず初めに数値計算法、採用した条件、計算の解像度などを述べる。

倍精度で解像度 N^2 の擬スペクトル法を用いてシミュレーションを行った。ここで、 N^2 は計算領域 $[0, L] \times [0, L]$ 内の格子点の数である。切断波数 k_T は 2/3-dealiasing 法によって決定した。我々は $N = 2048$, $L = 2\pi$ を採用した。切断波数は、 $k_T = 682$ である。

時間積分は、3 次精度 Adams-Bashforth スキームを採用した。粘性項は積分因子を用いて陰的に計算される。このとき時刻 t の次の時刻 $t + \Delta t$ における渦度 $\hat{q}(\mathbf{k}, t + \Delta t)$ は、

$$\hat{q}(\mathbf{k}, t + \Delta t) = e^{-\nu_p k^{2p} \Delta t} \hat{q}(\mathbf{k}, t) + \frac{1}{12} \Delta t e^{-\nu_p k^{2p} \Delta t} \times \left\{ 23 \hat{N}(\mathbf{k}, t) - 16 e^{-\nu_p k^{2p} \Delta t} \hat{N}(\mathbf{k}, t - \Delta t) + 5 e^{-2\nu_p k^{2p} \Delta t} \hat{N}(\mathbf{k}, t - 2\Delta t) \right\},$$

に従って計算される。ここで \hat{N} は (8a) の右辺を表している。粘性項 (6) は $p = 4$ の超粘性を採用した。

強制項 $\hat{F}(\mathbf{k}, t)$ には、ランダムマルコフ的公式^{(16), (17)}

$$\hat{F}(\mathbf{k}, t + \Delta t) = A(1 - R^2)^{1/2} e^{i\theta} + R\hat{F}(\mathbf{k}, t), \quad (29)$$

を使用した。 A は波数に依存する強制振幅で、 $k_f - 2 \leq k \leq k_f + 2$ 内でのみ $A \neq 0$ で、この波数領域以外ではゼロである。 R はタイムステップ Δt と強制的相関時間 τ に依存する関数で、白色雑音の時 $R = 0$ で無限の相関時間に関しては $R = 1$ である。 $\Delta t, \tau$ と R との関係は、

$$R = \frac{1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\tau}}{1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\tau}}. \quad (30)$$

または、上の式を τ に関して解いて、

$$\tau = \frac{1 + R}{2(1 - R)} \Delta t, \quad (31)$$

である。 θ は $[0, 2\pi]$ の範囲の一様乱数である。本研究では、 $A = \sqrt{2}$, $\tau = 9.5 \times 10^{-3}$, $R = 0.31$, $k_f = 280$ を採用した。

シミュレーションのその他の様々な値は表 1 にまとめられている。

表 1 シミュレーションに使用した数値。 ν_p は超粘性係数、 $k_d \equiv (\eta_d / \nu_p^3)^{1/(6p-4+2\alpha)}$ は散逸波数、 η_d はエンストロフィー散逸率、 ε_{in} はエネルギー注入率、 η_d はエンストロフィー散逸率。

α	ν_p	Δt	k_d	ε_{in}	η_d
1.0	5.0×10^{-21}	5.0×10^{-5}	553	2.3796×10^{-3}	0.65097
1.5	5.0×10^{-22}	2.5×10^{-4}	642	7.1035×10^{-4}	3.2958
2.0	8.0×10^{-23}	1.0×10^{-3}	657	1.6943×10^{-4}	13.124
2.2	4.0×10^{-23}	1.0×10^{-3}	644	5.5065×10^{-5}	13.249
2.5	7.5×10^{-24}	1.0×10^{-3}	656	5.0848×10^{-6}	6.6669
2.8	1.0×10^{-24}	1.0×10^{-3}	615	1.8734×10^{-6}	13.369
3.0	1.0×10^{-24}	1.0×10^{-3}	661	6.0897×10^{-7}	13.422

4.3 直接数値シミュレーションの結果

先ず、直接数値実験の結果の概要を眺めておく。図には示していないが、エネルギーとエンストロフィー、エネルギー散逸率、エンストロフィー散逸率の発展を眺める。低波数側に散逸機構を導入していないために、エネルギーは時間とともに線形的に増大する。エンストロフィーは発展の初期段階で急激に増大し、その後急激に減少する。さらにそののちの発展は α の値によって異なる。 $\alpha \leq 2.2$ では再び増加に転じるが、 α が大きくなるにつれてエンストロフィーの増大は緩やかになる。 $\alpha \geq 2.5$ ではエンストロフィーは緩やかに減少し α の増大とともに減少の仕方は早くなる。エネルギー散逸率とエンストロフィー散逸率は発展の初期段階の過渡的な状態ののち、ほぼ一定値に保たれている。

図3にエネルギー注入率 ε_{in} で規格化されたエネルギーフラックス $\Pi_{\alpha}^E(k) \equiv -\int_k^{\infty} k'^{\alpha} T_{\alpha}^Q(k') dk'$ とエンストロフィー注入率 η_{in} で規格化したエンストロフィーフラックスを示す。強制波数 k_f よりも低波数側には、エネルギーフラックスが波数に対して一定となる波数領域が形成され、この領域はエネルギー慣性領域と考えることができる。Burgess & Shepherd (2013)⁽³⁾で指摘されたように、 $\alpha \geq 5/2$ でも k_f よりも小さな波数領域でエネルギーフラックスは低波数側に向いている。エネルギーの輸送は、 α の値に依存し、 $\alpha = 1$ では注入スケールから低波数側、高波数側に流れるエネルギーはほぼ等量なのに対して、 α が増大すると高波数側に流れるエネルギーは小さくなり、 $\alpha \geq 2.5$ では注入されたエネルギーの10パーセント以下しか高波数には流れず、注入されたエネルギーの大部分は低波数側に流れる。一方、エンストロフィーは強制波数からほぼ全量が高波数へ流れている。 k_f とエンストロフィー散逸率で定義された散逸波数 k_d との比が $k_f/k_d \sim 0.3$ であることや、エンストロフィーフラックスが一定となる波数領域が存在していることから、この実験はエンストロフィー慣性領域もある程度解像していると考えられる。

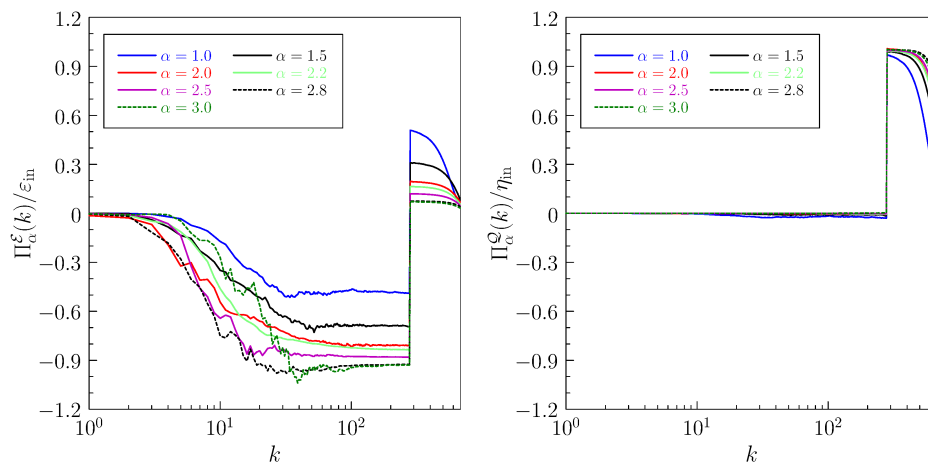


図3 左図：直接数値実験から得られたエネルギーフラックス。エネルギー注入率 ε_{in} で規格化している。凡例は図に示してある。右図：直接数値実験から得られたエンストロフィーフラックス。エンストロフィー注入率 η_{in} で規格化している。凡例は図に示してある。

図4にKLBスペクトル(28)で規格化されたエンストロフィースペクトル $k^{(7-4\alpha)/3}Q_{\alpha}(k)$ を示す。(KLBスペクトルで規格化されたエネルギースペクトル $k^{(7-\alpha)/3}E_{\alpha}(k)$ に等しい。) $\alpha < 5/2$ に関して、エネルギー慣性領域とエンストロフィー慣性領域が共存しない場合のエネルギー慣性領域のエネルギースペクトルの傾きは、KLB理論の予測と一致することが知られている。⁽³⁾ 本実験の結果は、全ての α の値で、エネルギー慣性領域のエネルギースペクトルの傾きは、KLB理論から予測される傾きよりも急峻である。そこで、 $\alpha < 5/2$ に関する

るエネルギー慣性領域のエネルギースペクトルは2つの慣性領域が存在する場合には KLB 理論からの予測からずれることを示している。(NS系に対しては、例えば Scott (2007)⁽²³⁾ の研究などでこの事実は知られている。) それに対して、 $\alpha > 5/2$ のエネルギースペクトルの傾きは、Burgess & Shepherd (2013)⁽³⁾ のエンストロフィー散逸領域を解像しない数値実験の結果と一致している。したがって、 $\alpha > 5/2$ に関してエネルギー慣性領域のエネルギースペクトルの傾きは、エンストロフィー慣性領域の存在に無関係であることを示唆している。

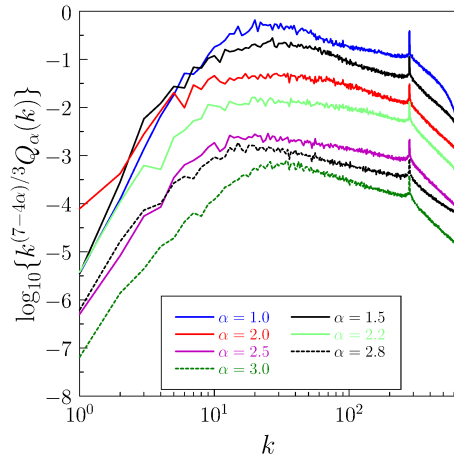


図4 直接数値実験から得られた KLB スペクトルで規格化されたエンストロフィースペクトル。凡例は図に示してある。

本研究の主題である、渦粘性の議論に移ろう。渦粘性係数 (16b) における $T_\alpha^{Q(>)}(k|k_c)$ は、 $T_\alpha^Q(k|k_c)$ から $T_\alpha^{Q(<)}(k|k_c)$ を差し引くことにより求める。波数 $k_c = 220, 300, 600$ の3つのケースについて渦粘性係数を求めた。これらの波数領域は、それぞれエネルギー慣性領域の高波数側の端、エンストロフィー慣性領域の低波数側の端、散逸領域に相当する。以下では $k_c = 220, 600$ の場合についての結果を示す。

図5に、直接数値シミュレーションから見積もられた渦粘性係数 (16b) を示す。渦粘性係数は、 $k = 0.02k_c$ における渦粘性係数の絶対値、 $|\nu_T(0.02k_c|k_c)|$ 、で規格化している。図5は、渦粘性係数が一般に波数の単調増加関数であることを示している。 $\alpha \geq 5/2$ についても、波数の増加関数である。切断波数 k_c よりも十分小さな波数領域では、渦粘性係数は負の値で定数であることがわかる。即ち、注目するスケールとサブグリッドスケール間のスケール分離が十分であれば、サブグリッドスケールの現象は $\alpha > 0$ のとき $k^{4-\alpha}Q_\alpha(k)$ に比例する異常拡散現象である。 k が切断波数 k_c に近づくとき渦粘性係数の値は急激に増大する。渦粘性係数の符号は、その $k \ll k_c$ の漸近値の符号と逆転する。渦粘性の符号の逆転が起こる波数は、 α にはほとんど依存しない。 k_c 近傍の渦粘性係数の急速な増大の仕方は、 α の値が大きくなるに従いより急激になる。これらの特徴は、 $k_c = 300, 600$ においても同様である。

図を示していないが、渦粘性係数の k_c 依存性も調べた。渦粘性係数の $k \ll k_c$ における漸近値は k_c が大きくなるにつれて、小さくなっていく。 $k_c = 220$ の場合の渦粘性係数の漸近値と、 $k_c = 600$ におけるそれとでは、後者は前者に比べて1ケタ小さい。一方、 k_c が増大すると、 k_c 近傍における渦粘性係数の増大の仕方もより急激になり、切断波数における渦粘性係数の値 $\nu_T(k_c|k_c)$ の値が増大する。

5 まとめ

一般化された2次元流体系に関して、系をある切断波数 k_c で切断したときに、切断が切断波数よりも小さな波数領域のモードの発展に与える影響を理論的、数値実験的に調べた。EDQNM 完結近似方程式を用いた解析

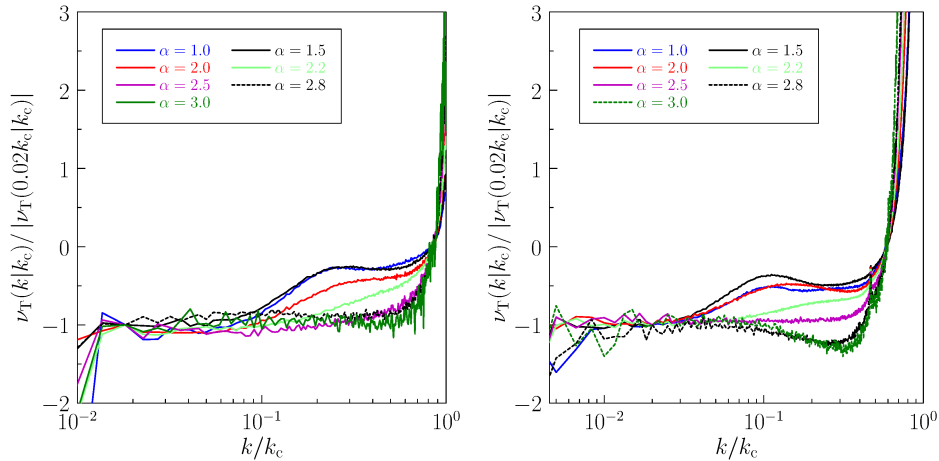


図5 直接数値実験から求められた渦粘性係数 (16b). 横軸は注目する波数 k と切断波数 k_c との比, k/k_c . 縦軸は規格化した渦粘性係数 $\nu_T(k|k_c)/|\nu_T(0.02k_c|k_c)|$. 凡例は図に示してある. 左図: $k_c = 220$ の場合. 右図: $k_c = 600$ の場合.

によると, 注目する波数と切断波数とのスケール分離が十分なとき ($k \ll k_c$), 切断の効果は $\alpha > 0$ のとき波数の $4 - \alpha$ 乗と局所的エントロフィースペクトルの積に, $\alpha < 0$ のときには波数の 4 乗と局所的エントロフィースペクトルの積に比例する. 一般化された2次元流体系の強制散逸乱流の直接数値実験は, EDQNM 完結近似方程式の解析結果を支持する. また, $k \ll k_c$ における渦粘性係数の漸近値は定数で負値である. この結果は, 一般化された2次元流体系ではスケール分離が十分なとき, 切断の効果, もしくはサブグリッドスケールの現象, は拡散型の粘性としてみなせること,⁽¹²⁾ は $\alpha = 2$ の Navier–Stokes 系するときのみであり, 一般には異常拡散型の負の粘性として働くことを示している.

渦粘性係数の漸近値が α の値によらず, また注目する波数領域がエネルギー慣性領域, エントロフィー慣性領域によらず, 負値であることは, Fjørtoft の定理⁽⁴⁾ を使って理解できるであろう. Fjørtoft の定理は, $\mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m} = 0$ を満たす3つの波数モード間でエネルギーとエントロフィーを保存しながら分配したときに, エネルギーとエントロフィーの輸送の仕方は, 中間の波数へ向けて低波数モードと高波数モードから同時に輸送される, もしくは中間の波数モードから低波数モードと高波数モードへ同時に輸送される, のどちらかしかないことを述べている. 前者か後者かどちらが実現されるかは先験的な見積もりは未だない. しかしながら, エネルギースペクトルやエントロフィースペクトルは一般に広がっていく傾向にあり, この観点に立つと後者の輸送が実現されているものと考えられる. いま, 一般性を失うことなく $k < l < m$ とする. 後者の輸送が実現するならば, $k \ll k_c \simeq l$ のときには, 波数 k のモードには, 切断波数 k_c 近傍の波数モードからエネルギーとエントロフィーが輸送されることになり, このことの反映として $k \ll k_c$ における渦粘性係数が負値になるものと解釈できる.

謝辞

本研究は日本学術振興会からの科学研究費 (基盤研究 (C) No. 24540472) の援助を受けて行われた.

参考文献

- [1] G. K. Batchelor. Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids Suppl. II*, Vol. 12, p. 233, 1969.
- [2] W. Blumen. Uniform potential vorticity flow: Part i. theory of wave interactions and two-dimensional turbulence. *J. Atmos. Sci.*, Vol. 35, p. 774, 1978.
- [3] B. H. Burgess and T. G. Shepherd. Spectral nonlocality, absolute equilibria, and Kraichnan-Leith-Batchelor phenomenology in two-dimensional turbulent energy cascades. *J. Fluid Mech.*, Vol. 725, p. 332, 2013.
- [4] R. Fjørtoft. On the exchanges in the spectral distribution of kinetic energy for two-dimensional nondivergent flow. *Tellus*, Vol. 5, p. 225, 1953.
- [5] E. Gkioulekas and K. K. Tung. A new proof on net upscale energy cascade in two-dimensional and quasi-geostrophic turbulence. *J. Fluid Mech.*, Vol. 576, p. 173, 2007.
- [6] I. M. Held, R. T. Pierrehumbert, S. T. Garner, and K. L. Swanson. Surface quasi-geostrophic dynamics. *J. Fluid Mech.*, Vol. 282, p. 1, 1995.
- [7] T. Iwayama, T. G. Shepherd, and T. Watanabe. An ‘ideal’ form of decaying two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, Vol. 456, p. 183, 2002.
- [8] T. Iwayama, M. Sueyoshi, and T. Watanabe. Linear stability analysis of parallel shear flows for an inviscid generalized two-dimensional fluid system. *J. Phys. A: Math. Theor.*, Vol. 46, p. 065501, 2013.
- [9] T. Iwayama and T. Watanabe. Green’s function for a generalized two-dimensional fluid. *Phys. Rev. E*, Vol. 82, p. 036307, 2010.
- [10] T. Iwayama and T. Watanabe. Universal spectrum in the infrared range of two-dimensional turbulent flows. *Phys. Fluids*, Vol. 26, p. 025105, 2014.
- [11] R. H. Kraichnan. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 10, p. 1417, 1967.
- [12] R. H. Kraichnan. Eddy viscosity in two and three dimensions. *J. Atmos. Sci.*, Vol. 33, p. 1521, 1976.
- [13] V. D. Larichev and J. C. McWilliams. Weakly decaying turbulence in an equivalent-barotropic fluid. *Phys. Fluids*, Vol. A3, p. 938, 1991.
- [14] C. E. Leith. Diffusion approximation for two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 11, p. 671, 1968.
- [15] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids*. Springer, 4 th edition, 2008.
- [16] D. K. Lilly. Numerical simulation of two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 12, pp. II–240, 1969.
- [17] M. E. Maltrud and G. K. Vallis. Energy spectra and coherent structures in forced two-dimensional and beta-plane turbulence. *J. Fluid Mech.*, Vol. 228, p. 321, 1991.
- [18] R. Metzler and J. Klafter. The random walk’s guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach. *Phys. Reports*, Vol. 339, p. 1, 2000.
- [19] K. Ohkitani. Asymptotics and numerics of a family of two-dimensional generalized surface quasi-geostrophic equations. *Phys. Fluids*, Vol. 24, p. 095101, 2012.
- [20] J. Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer–Verlag, 2 nd edition, 1987.
- [21] R. T. Pierrehumbert, I. M. Held, and K. L. Swanson. Spectra of local and nonlocal two dimensional

- turbulence. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 4, p. 1111, 1994.
- [22] N. Schorghofer. Energy spectra of steady two-dimensional turbulent flows. *Phys. Rev. E*, Vol. 61, p. 6572, 2000.
- [23] R. K. Scott. Nonrobustness of the two-dimensional turbulent inverse cascade. *Phys. Rev. E*, Vol. 75, p. 046301, 2007.
- [24] K. S. Smith, G. Boccaletti, C. C. Henning, I. Marinov, C. Y. Tam, I. M. Held, and G. K. Vallis. Turbulent diffusion in the geostrophic inverse cascade. *J. Fluid Mech.*, Vol. 469, p. 13, 2002.
- [25] J. Sukhatme and L. M. Smith. Local and nonlocal dispersive turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 21, p. 056603, 2009.
- [26] C. V. Tran. Nonlinear transfer and spectral distribution of energy in α turbulence. *Physica D*, Vol. 191, p. 137, 2004.
- [27] C. V. Tran, D. G. Dritschel, and R. K. Scott. Effective degrees of nonlinearity in a family of generalized models of two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. E*, Vol. 81, p. 016301, 2010.
- [28] T. Watanabe and T. Iwayama. Unified scaling theory for local and non-local transfers in generalized two-dimensional turbulence. *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 73, p. 3319, 2004.
- [29] T. Watanabe and T. Iwayama. Interacting scales and triad enstrophy transfers in generalized two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. E*, Vol. 76, p. 046303, 2007.