数理解析研究所講究録
第 1945 巻 2015 年 115-124

アフィンリー環 $A_2^{(2)}$ の基本表現から生ずるシューア関数たちの恒等式

水川裕司（防衛大学校）
Hiroshi Mizukawa, National Defense Academy of Japan
中島達洋（明海大学）
Tatsuhiro Nakajima, Meikai University
山田裕史（岡山大学）
Hiro-Fumi Yamada, Okayama University

1 はじめに

アフィンリー環 $A_1^{(1)}$ の基本表現 (Basic representation) は,「プリンシパル実現」と「斉次実現」という 2 つの実現を持つ [6]. KdV 方程式系と関係しているのが前者, 非線形シュレーディンガー方程式系と関係しているのが後者である [2, 4]. どちらの実現も無限変数の多項式環 $\mathbb{C}[t_1, t_2, \ldots]$ 上に構成されており[*1], その作用は頂点作用素を通じて与えられる. それらの関係は自由フェルミオンによる表示を見るとわかりやすく, そこでは斉次実現がプリンシパル実現を 2 成分化したものであると捉えることができるのである. 組合せ論的には, この 2 成分化というのは分割 λ に対してその 2-商 (2-quotient) $(\lambda[0], \lambda[1])$ を対応させることになる.

本稿では, このストーリーの上に捻れ型のアフィンリー環 $A_2^{(2)}$ の基本表現を乗せてみることで得られた結果について述べたい.

2 シューア関数と Q 関数

2.1 シューア関数の定義

シューア関数は変数 $(x_1, x_2, \ldots)$ たちの対称関数であるが, ここでは巾和対称関数 p_n を用いた

$$t_n = \frac{1}{n} p_n$$

という変数（佐藤変数）を採用する. そのためには次のようにすれば良い：まず,

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n z^n\right)$$

*1 より正確には, 斉次実現は $\mathbb{C}[t_1, t_2, \ldots] \otimes$ (lattice space) 上に構成され, プリンシパル実現は $\mathbb{C}[t_1, t_3, t_5, \ldots]$ 上に構成される.

によって完全対称関数 h_n を定め，分割 λ に対し

$$S_\lambda(t) = \det\left(h_{\lambda_i+j-i}\right)_{ij}$$

と定義する．なお，後で出てくるので 2-被約シューア関数 $S_\lambda^{(2)}(t)$ も合わせて定義しておこう．

$$S_\lambda^{(2)}(t) = S_\lambda(t)|_{t_{2j}=0 \text{ for } \forall j \in \mathbf{Z}_{>0}}$$

要するに，シューア関数において偶数添字の変数を全て 0 にしたものである．

2.2 シューアの Q 関数の定義

ここでも変数は

$$s_n = \frac{2}{n} p_n$$

という巾和対称関数を用いたものを採用する．ただし，添字 n は奇数のみ取る．先の t_n とは係数 2 だけ異なっていることに注意してほしい．まず

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n = \exp\left(\sum_{\substack{n\geq 1\\ n:\text{odd}}} s_n z^n\right)$$

によって q_n（$n \in \mathbb{N}$）を定める．さらに 2 つの非負整数 $m > n \geq 0$ に対して

$$Q_{mn}(s) = q_m q_n + 2\sum_{i=1}^{n} (-1)^i q_{m+i} q_{n-i}$$

とし，$m \leq n$ に対しては $Q_{mn}(s) = -Q_{nm}(s)$ と定める．これらは長さ 2 のストリクトな分割に対応する Q 関数[*2]であり，一般のストリクトな分割 μ に対しては，

$$Q_\mu(s) = \mathrm{Pf}\left(Q_{\mu_i\mu_j}(s)\right)_{ij}$$

によって定義する．

3 ストリクトな分割に対する組合せ論

3.1 $\bar{3}$-コアと $\bar{3}$-商

対称群のスピン表現に対するモジュラー表現論の中で登場した $\bar{3}$-コアと $\bar{3}$-商[*3]について説明する．アフィンリー環との関わりで言うと，$\bar{3}$-コアは基本表現の極大ベクトルをパラメトライズし，$\bar{3}$-商は 2 成分化するときに必要になる．

[*2] m または n が 0 のときは長さ 1 の分割に対応する Q 関数である．

[*3] $\bar{3}$ は "3-bar" と読む．bar はストリクトな分割の組合せ論において，通常の分割の組合せ論における hook と似た役割を果たす [10]．

$m \in \mathbb{Z}$ に対し，次で定義されるストリクトな分割

$$c_m = \begin{cases} (3m-2,\dots,4,1) & (m>0) \\ \varnothing & (m=0) \\ (3|m|-1,\dots,5,2) & (m<0) \end{cases}$$

を $\bar{3}$-コアという．

ストリクトな分割 λ に対し，その成分（part）が 3 を法として a（$a=0,1,2$）と合同なものからなる部分分割 $\lambda^a = (l_1^a,\dots,l_k^a)$ を定める．さらに $x_i = \dfrac{l_i^a - a}{3}$ として，整数列

$$\zeta^a(\lambda) = (x_1,\dots,x_k) \quad (x_1 > x_2 > \cdots > x_k)$$

を考える．ストリクトな分割 λ の $\bar{3}$-商とは，

$$\lambda[0] = \zeta^0(\lambda), \quad \lambda[1] = \Lambda(\zeta^1(\lambda)\,;\zeta^2(\lambda))$$

によって定まる分割の組 $(\lambda[0],\lambda[1])$ である．ここで，$\Lambda(\zeta^1(\lambda)\,;\zeta^2(\lambda))$ は，$\zeta^1(\lambda) = (x_1,\dots,x_{s+t})$，$\zeta^2(\lambda) = (y_1,\dots,y_t)$ としたときに

$$\Lambda(\zeta^1(\lambda)\,;\zeta^2(\lambda)) = (x_1-(s-1), x_2-(s-2),\dots,x_{s-1}-1, x_s, (x_{s+1},\dots,x_{s+t}\,|\,y_1,\dots,y_t)$$

で定義される．なお，$(x_{s+1},\dots,x_{s+t}\,|\,y_1,\dots,y_t)$ はフロベニウス記法による分割の表現である．また，仮に $\zeta^1(\lambda)$ の成分の個数が $\zeta^2(\lambda)$ のそれを下回っている場合は $\Lambda(\zeta^2(\lambda)\,;\zeta^1(\lambda))$ と共役な分割として定義する．上の定義からすぐにわかるように，$\lambda[0]$ はストリクト，$\lambda[1]$ は通常の分割になる．

任意のストリクトな分割 λ に対し，上記の $\bar{3}$-商と c_m（$m = |\lambda^1| - |\lambda^2|$）とから成る分割の 3 つ組 $(c_m,\lambda[0],\lambda[1])$ が定まる．この対応は 1 対 1 であることも示すことができ，

$$|\lambda| = |c_m| + 3(\lambda[0] + \lambda[1])$$

であることもすぐにわかる．

例 3-1. $\lambda = (12,10,8,5,3,2,1)$ のとき，$\lambda^0 = (12,3)$，$\lambda^1 = (10,1)$，$\lambda^2 = (8,5,2)$ であり，これより

$$m = 2-3 = -1, \quad \zeta^0(\lambda) = (4,1), \quad \zeta^1(\lambda) = (3,0), \quad \zeta^2(\lambda) = (2,1,0)$$

を得る．よって λ の $\bar{3}$-コアは (2) であり，λ の $\bar{3}$-商は

$$\begin{aligned} &\lambda[0] = (4,1), \\ &\lambda[1] = \Lambda(2,1,0\,;3,0)' = (2,(1,0\,|\,3,0))' = (2,2,2,1,1)' = (5,3) \end{aligned}$$

である．

3.2 i-Addable ノード

ストリクトな分割（のヤング図形）において，各ノードに行の先頭から (010) が繰り返し書かれているものとする．例えば，$c_3 = (7,4,1)$ のとき

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0
\end{array}
$$

である．

λ をストリクトな分割，$i \in \{0,1\}$ としたとき，ノード x が λ に対して i-addable であるとは次を満たすことである：

- $x \cup \lambda$ はストリクトな分割である．
- x に書かれる数字は i である．

先の c_3 に対して見ると

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * \\
0 & 1 & 0 & 0 & * \\
0 & *
\end{array}
$$

の $*$ のノードが 1-addable なノードであり，この場合 0-addable なノードは存在しない．

正整数 n，$\overline{3}$-コア c_m（$m \in \mathbb{Z}$）に対して

$$I_0^n(c_m) = \{\lambda \mid \lambda \text{ は } c_m \text{ に 0-addable なノードを } n \text{ 個付加したストリクトな分割}\}$$

$$I_1^n(c_m) = \{\lambda \mid \lambda \text{ は } c_m \text{ に 1-addable なノードを } n \text{ 個付加したストリクトな分割}\}$$

と置く．

例 3-2. $I_0^2(c_{-2})$，$I_1^2(c_3)$ はそれぞれ以下のようになる．

$I_0^2(c_{-2}) = \{(7,2),(6,3),(6,2,1),(5,4),(5,3,1)\}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \underline{0} & \underline{0} \\
0 & 1
\end{array}
,\quad
\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \underline{0} \\
0 & 1 & \underline{0}
\end{array}
,\quad
\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \underline{0} \\
0 & 1 \\
\underline{0}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & \underline{0} & \underline{0}
\end{array}
,\quad
\begin{array}{ccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & \underline{0} \\
\underline{0}
\end{array}
$$

$I_1^2(c_3) = \{(8,5,1),(8,4,2),(7,5,2)\}$

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \underline{1} \\
0 & 1 & 0 & 0 & \underline{1} \\
0
\end{array}
,\quad
\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \underline{1} \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \underline{1}
\end{array}
,\quad
\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \underline{1} \\
0 & \underline{1}
\end{array}
$$

3.3 公式に現れる符号について

符号を考えるときはストリクトな分割の成分は偶数個，つまり分割の長さが奇数の場合には最後に 0 をつけ加えて考える．

ストリクトな分割 λ を与えたとき，そこから定まる λ^a $(a=0,\ 1,\ 2)$ について

$$f(\lambda)=|\lambda^2|,\quad g(\lambda)=\sum_{i\geq 1}\#\{j;\, l^1_j>l^0_i\},\quad h(\lambda)=\ell(\lambda^2)$$

とおく．このとき $\delta_1(\lambda)$，$\delta_0(\lambda)$ を次で定義する：

- $\delta_1(\lambda)=(-1)^{f(\lambda)+\binom{n}{2}}$ $\quad\lambda\in I^n_1(c_m)$ $(m\geq 0)$ のとき
- $\delta_0(\lambda)=\begin{cases}(-1)^{f(\lambda)+g(\lambda)} & (m:\text{偶数})\\ (-1)^{f(\lambda)+g(\lambda)+h(\lambda)} & (m:\text{奇数})\end{cases}$ $\quad\lambda\in I^n_0(c_m)$ $(m<0)$ のとき

4 主結果

以上の準備のもとで我々の主結果を示すことにしよう．

定理 4-1. . $m\in\mathbb{Z}$、$n\in\mathbb{Z}_{>0}$ とする．

(1) $m>0$ のとき

$$\sum_{\mu\in I^n_1(c_m)}\delta_1(\mu)S_{\mu[1]}(t)=S_{\square(m-n,n)}(2t^{(2)})$$

ここで、$S_\lambda(2t^{(2)})=S_\lambda(t)|_{t_j\mapsto 2t_{2j}}$ であり，$\square(m,n)$ は長方形の分割 (n^m) を表す．

(2) $m<0$ のとき

$$\sum_{\mu\in I^n_0(c_m)}\delta_0(\mu)Q_{\mu[0]}(s)S_{\mu[1]}(t)=\sum_{\substack{\mu\in I^n_0(c_m)\\ \mu[0]=\varnothing}}\delta_0(\mu)S_{\mu[1]}(u)$$

ここで、$u_j=\begin{cases}t_j & (j\text{ が偶数のとき})\\ t_j-s_j & (j\text{ が奇数のとき})\end{cases}$ である．

(3) $m\geq n-1$ のとき

$$Q_{\triangle(m,n)}(u)=(-1)^{(m+1)(m+2n)/2}\sum_{\substack{\mu\in I^n_0(c_{-m})\\ \mu[0]=\varnothing}}\delta_0(\mu)S^{(2)}_{\mu[1]}(u)$$

ここで $\triangle(m,n)$ は台形のストリクトな分割 $(m,m-1,m-2,\ldots,m-(n-1))$ を表す．

なお，**定理 4-1** (1) の右辺に登場する $S_\lambda(2t^{(2)})$ はプレシズム $p_2\circ S_\lambda$ のことであり，この恒等式はプレシズム恒等式として知られている [1, 8].

例 4-2.

(1) $m=4,\ n=2$ のとき

$$S_{2^4}(t)-S_{3 2^2 1}(t)+S_{3 2 1^2}+S_{4 2^2}(t)-S_{431}+S_{4^2}=S_{\square(2,2)}(2t^{(2)})$$

(2) $m=-2,\ n=2$ のとき

$$S_3(t)-S_{21}(t)+Q_1(s)S_{1^2}(t)-Q_2(s)S_1(t)+Q_{21}(s)=S_3(u)-S_{21}(u)$$

(3) $m=3,\ n=2$ のとき

$$Q_{32}(u)=S_5^{(2)}(u)-S_{41}^{(2)}(u)+S_{32}^{(2)}$$

5 $\mathrm{A}_2^{(2)}$ の基本表現と証明のアウトライン

これらの恒等式は，アフィンリー環 $A_2^{(2)}$ のフォック空間上での基本表現とボゾン・フェルミオン対応を通じて下図のようにして証明できる．

$$\begin{array}{ccc} \text{(2 成分化した) フォック空間 } \mathcal{F}_0 & \xrightarrow{\text{ボゾン・フェルミオン対応 } \Phi} & \mathbb{C}[t,s]\otimes_{\mathbb{C}} \text{格子 } Z \\ {\scriptstyle \text{フェルミオンによる作用 } f_i^n/n!}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \text{頂点作用素を通じた作用 } \Phi f_i/n!\Phi^{-1}} \\ \text{(2 成分化した) フォック空間 } \mathcal{F}_0 & \xrightarrow[\text{ボゾン・フェルミオン対応 } \Phi]{} & \mathbb{C}[t,s]\otimes_{\mathbb{C}} \text{格子 } Z \end{array}$$

ここで，右回り（先にボゾン・フェルミオン対応で写してから $f_i^n/n!$ $(i=0,1)$ の作用を頂点作用素を通じてほどこす）から恒等式の右辺が，左回り（先にフェルミオンによる $f_i^n/n!$ の作用を実行してからボゾン・フェルミオン対応で写す）から左辺をそれぞれ得る．

5.1 中性フェルミオンとフォック空間

関係式

$$\{\beta_m,\beta_n\}=\beta_m\beta_n+\beta_m\beta_n=(-1)^m\delta_{m+n,0}$$

によって定義される中性フェルミオン β_n $(n\in\mathbb{Z})$ が生成する $\mathbb{C}$ 代数 $\mathbb{B}$，および

$$\beta_n|\mathrm{vac}\rangle=0\ (n<0)$$

を満たす $|\mathrm{vac}\rangle$ によって生成される左 $\mathbb{B}$ 加群 $\mathcal{F}$（フォック空間）を考える．特に偶数個の中性フェルミオンの積を作用して得られる部分加群を $\mathcal{F}_0$ とすると，$\mathcal{F}_0$ はストリクトな分割 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{2k})$ $(\lambda_1>\ldots>\lambda_{2k}\geq 0)$ でパラメトライズされた

$$|\lambda\rangle=\beta_{\lambda_1}\ldots\beta_{\lambda_{2k}}|\mathrm{vac}\rangle$$

なる元によって張られる．なお，ボゾン・フェルミオン対応によってこの $|\lambda\rangle$ はシューアの Q 関数 $Q_\lambda(s)$ に写る．

5.2 アフィンリー環 $A_2^{(2)}$ の基本表現のフェルミオン実現

アフィンリー環 $A_2^{(2)} = \langle h_i, e_i, f_i\ (i=0,1)\rangle$ の基本表現（Basic 表現）を $\mathcal{F}_0$ 上に実現する．例えば，生成元 f_0 および f_1 は中性フェルミオンを用いて

$$f_0 = \sqrt{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^{m+1}\beta_{3m}\beta_{-3m+1}, \qquad f_1 = \sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^m\beta_{3m-1}\beta_{-3m+2}.$$

と表すことができる（e_i，h_i（$i=0,1$）についても具体的に書くことができるが，ここでは省略する）[9]．するとフェルミオンの直接計算から，f_i（$i=0,1$）の $|\lambda\rangle$ への作用は λ に i-addable ノード 1 つを加えることに対応することがわかり，次が言える．

命題 5-1.

(1) $|c_m\rangle$（$m\in\mathbb{Z}$）は極大ウエイトベクトル．

(2) m を非負整数とする．このとき

$$\frac{1}{n!}f_1^n|c_m\rangle \propto \sum_{\lambda\in I_1^n(c_m)}|\lambda\rangle, \qquad \frac{1}{n!}f_0^n|c_{-m}\rangle \propto \sum_{\lambda\in I_0^m(c_{-m})}a_\lambda|\lambda\rangle \quad a_\lambda \text{ はある定数}$$

5.3 2 成分化と定理の左辺

$\mathbb{B}$ において，中性フェルミオン β_n を

$$\phi_n = \beta_{3n}, \quad \psi_n = \beta_{3n+1}, \quad \psi_n^* = (-1)^{-3n-1}\beta_{-3n-1} \qquad Ⓐ$$

のように置き換えると，これらは関係式

$$\{\psi_m,\psi_n^*\} = \delta_{m,n}, \qquad \{\psi_m,\psi_n\} = \{\psi_m^*,\psi_n^*\} = 0,$$
$$\{\phi_m,\phi_n\} = (-1)^m\delta_{m+n,0}, \qquad \{\psi_m,\phi_n\} = \{\psi_m^*,\phi_n\} = 0.$$

を満たす．つまり，$\mathbb{B}$ は中性フェルミオン $\{\phi_n\,;\,n\in\mathbb{Z}\}$ が生成する $\mathbb{C}$ 代数 $\mathbb{B}$ と，荷電フェルミオン $\{\psi_n,\psi_n^*\,;\,n\in\mathbb{Z}\}$ が生成する $\mathbb{C}$ 代数 $\mathbb{A}$ とのテンソル積 $\mathbb{B}\otimes\mathbb{A}$ と同型になっている．

これに応じて $\mathcal{F}_0$ も $\mathbb{B}\otimes\mathbb{A}$ が作用する空間として見直しておく．そのためには ϕ_n に対する 2 つの真空 $|0\rangle_n$，$|1\rangle_n = \phi_0|0\rangle_n$，および ψ_n，ψ_n^* に対する真空 $|m\rangle_c$（$m\in\mathbb{Z}$）を考え，

$$|\sigma,m\rangle = |\sigma\rangle_n\otimes|m\rangle_c$$

のように 2 成分化すれば良く，それは

$$|0,m\rangle = \begin{cases}\psi_{m-1}\cdots\psi_0|\mathrm{vac}\rangle & (m>0),\\ |\mathrm{vac}\rangle & (m=0),\\ \psi_m^*\cdots\psi_{-1}^*|\mathrm{vac}\rangle & (m<0),\end{cases}$$

$$|1,m\rangle = \begin{cases}\sqrt{2}\phi_0\psi_{m-1}\cdots\psi_0|\mathrm{vac}\rangle & (m>0),\\ \sqrt{2}\phi_0|\mathrm{vac}\rangle & (m=0),\\ \sqrt{2}\phi_0\psi_m^*\cdots\psi_{-1}^*|\mathrm{vac}\rangle & (m<0)\end{cases}$$

のように構成できる．これによって

$$\mathcal{F}_0 \simeq \mathcal{F}^{(2)} = \bigoplus_{\substack{\sigma=0,1 \\ m\in\mathbf{Z}}} (\mathbb{B}\otimes\mathbb{A})|\sigma,m\rangle$$

となる．

$A_2^{(2)}$ の生成元に対してもフェルミオンの置き換えⒶをしてやれば，$\mathcal{F}^{(2)}$ 上に基本表現を構成できる．このとき，極大ウエイトベクトル $|c_m\rangle$ は定数倍を除いて $|\sigma,m\rangle$ となり，$|\lambda\rangle$ は 3 つ組 $(c_m,\lambda[0],\lambda[1])$ でパラメトライズできるようになる．

さて，$\alpha = \frac{1}{2}\alpha_1$ とし，形式的冪 e^α を考える．さらに $\theta^2 = 1$ を満たす形式的記号 θ を導入し

$$\mathrm{Z} = \bigoplus_{m\in\mathbf{Z},\sigma=0,1} \mathbb{C}\theta^\sigma e^{m\alpha}$$

とする．すると変数セット $s=(s_n)$（n は奇整数），$t=(t_n)$（$n\in\mathbb{Z}$）に対して，ボゾン・フェルミオン対応

$$\Phi : \mathcal{F}^{(2)} \to \mathbb{C}[s,t]\otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Z}$$

を得る．ここで $\Phi(|\sigma,m\rangle) = \theta^\sigma e^{m\alpha}$（$m\in\mathbb{Z}$，$\sigma=0,1$）である．

命題 5-2. m を正整数とする．

(1) $\lambda \in I_1^n(c_m)$ のとき，$\Phi(|\lambda\rangle) \propto S_{\lambda[1]}(t)\theta^{\epsilon_m}e^{(m-2n)\alpha}$

(2) $\lambda \in I_0^n(c_{-m})$ のとき，$\Phi(|\lambda\rangle) \propto Q_{\lambda[0]}(s)S_{\lambda[1]}(t)\theta^{\epsilon_{n+m}}e^{(n-m)\alpha}$

これによって**定理 4-1** の左辺を得る．

5.4 頂点作用素の導入

$A_2^{(2)}$ の $\mathbb{C}[s,t]\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{Z}$ 上での作用，特に f_0，f_1 の作用を考えるために頂点作用素を導入する．まず次のフェルミオンの母関数を形式和

$$\phi(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \phi_n z^n, \quad \psi(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \psi_n z^n, \quad \psi^*(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \psi^*_{-n} z^{n-1}$$

によって定める．これをボゾン・フェルミオン対応によって $\mathbb{C}[s,t]\otimes\mathrm{Z}$ 上の作用素とする．

命題 5-3.

$$\Phi\phi(z)\Phi^{-1} = \sqrt{2}^{-1}e^{\xi_1(s,z)}e^{-2\xi_1(\partial_s,z^{-1})}\theta,$$

$$\Phi\psi(z)\Phi^{-1} = e^{\xi(t,z)}e^{-\xi(\partial_t,z^{-1})}e^{\alpha}z^{H_0},$$

$$\Phi\psi^*(z)\Phi^{-1} = e^{-\xi(t,z)}e^{\xi(\partial_t,z^{-1})}e^{-\alpha}z^{-H_0}$$

ただし

- $t=(t_1,t_2,t_3,\ldots)$，$s=(s_1,s_3,s_5,\ldots)$

- $\partial_t = (\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_2}, \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t_3}, \ldots)$, $\quad \partial_s = (\frac{\partial}{\partial s_1}, \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial s_3}, \frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial s_5}, \ldots)$
- $\xi(t,z) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n z^n$, $\quad \xi_1(s,z) = \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n-1} z^{2n-1}$

であり，θ，$e^{\pm\alpha}$，z^{H_0} の作用は

$$\theta(\theta^n e^{m\alpha}) = \theta^{n+1} e^{m\alpha},$$
$$e^{\pm\alpha}(\theta^n e^{m\alpha}) = (-1)^n \theta^n e^{(m\pm1)\alpha}$$
$$z^{\pm H_0}(\theta^n e^{m\alpha}) = z^{\pm m}(\theta^n e^{m\alpha})$$

によって定める．

これらを用いて 2 つの頂点作用素

$$V_1(z) = \Phi\psi^*(z)\psi^*(-z)\Phi^{-1}, \quad V_0(z) = \sqrt{2}\Phi\phi(-z)\psi(z)\Phi^{-1}$$

が定義できる．具体的に書くと

$$V_1(z) = 2e^{-2\xi(t^{(2)},z^2)} e^{\xi(\partial_t^{(2)},z^{-2})} z e^{-2\alpha} z^{-H_0}(-z)^{-H_0},$$
$$V_0(z) = e^{-\xi_1(s,z)+\xi(t,z)}\, e^{2\xi_1(\partial_s,z^{-1})-\xi(\partial_t,z^{-1})}\, \theta e^{\alpha} z^{H_0}$$

となる．ここで，$t^{(2)} = (t_2, t_4, \ldots)$，$\partial_t^{(2)} = (\frac{\partial}{\partial t_2}, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_4}, \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t_6}, \ldots)$ である．さらにフェルミオン表示と比較することで f_0，f_1 の $\mathbb{C}[t,s] \otimes_{\mathbb{C}} Z$ 上での作用が

$$f_1 = -\oint V_1(z)dz, \qquad f_0 = -\oint z^{-1}V_0(z)dz$$

であるとわかる．

5.5　定理の右辺

シューア関数が直交関係

$$(-1)^{\binom{n}{2}} \oint \cdots \oint S^{\lambda}(z) S^{\mu}(z^{-1}) \Delta(z)^2 (z_1 \cdots z_n)^{-n} dz_1 \cdots dz_n = n!\, \delta_{\lambda\mu}$$

を満たすこと，およびコーシー恒等式

$$e^{\sum_{i=1}^{n} \xi(t,z_i)} = \sum_{\ell(\lambda)\le n} S^{\lambda}(z) S_{\lambda}(t)$$

とから積分が実行でき**定理 4-1** の右辺を得る．例えば (1) の場合だと

$$f_1^n \theta^m e^{m\alpha} \propto \oint \cdots \oint V(z_1) \cdots V(z_n) dz_1 \cdots dz_n$$
$$= \oint \cdots \oint \Delta(z^2)^2 e^{-2\sum_{i=1}^{n} \xi(t^{(2)}, z_i^2)} (z_1 \cdots z_n)^{-2m+1}\, dz_1 \cdots dz_n\, \theta^m e^{(m-2n)\alpha}$$

であり，$S^{\square(n,m)}(z^{-1}) = (z_1 z_2 \cdots z_n)^{-m}$ とから，直交関係を通じて $S_{\square(m-n,n)}(2t^{(2)})$（の定数倍）を得る．

定理 4-1 (2) の場合の $f_0^n \theta^m e^{m\alpha}$ はもう少し面倒だが，同様の計算で示すことができる．さらに (2) において $u_{2j} = 0$（$j \in \mathbb{Z}_{>0}$）としてやることで (3) の左辺を得る．

参考文献

[1] Y. Chen, A. Garsia and J. Remmel, Algorithms for plethysm, in Combinatorics and Algebra, Contemporary Math. 34 (1984), 109-153.

[2] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, Transformation groups for soliton equations, Euclidean Lie algebras and reduction fo the KP hierarchy Publ. RIMS. 18 (1982), 1077-1110.

[3] T. Ikeda, H. Mizukawa, T. Nakajima and H.-F. Yamada, Mixed expansion formula for the rectangular Schur functions and the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$, Adv. in Appl. Math. 40 (2008), no. 4, 514-535.

[4] T. Ikeda, H.-F. Yamada, Polynomial τ-functions of the NLS-Toda hierarchy and the Virasoro singular vectors, Lett. Math. Phys. 60 (2002), 147-156.

[5] N. Jing, Vertex operators, symmetric functions, and the spin group Γ_n, J. Alg. 138 (1991), no. 2, 340-398.

[6] V. G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras, 3rd. ed.* , Cambridge, 1990.

[7] I. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd. ed.* , Oxford, Clarendon Press, 1995.

[8] H. Mizukawa and H.-F. Yamada, Rectangular Schur functions and the basic representation of affine Lie algebras, Discrete Math. 298 (2005), no. 1-3, 285-300.

[9] T. Nakajima and H.-F. Yamada, Schur's Q-functions and twisted affine Lie algebras, Adv. Stud. in Pure Math. 28 (2000), 241-259.

[10] J. B. Olsson, Combinatorics and Representations of Finite Groups, Lecture Notes in Mathematics at the University of Essen, 1993.