

箱玉系の母関数

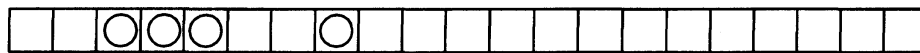
広島大学大学院 沖吉真実

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HIROSHIMA UNIVERSITY

ABSTRACT. 箱玉系 (Box and Ball System, 略して BBS) とは無限の一行に並べた箱に玉を入れて, 規則に従って玉を動かしていくゲームのような系である. 1990 年に高橋・薩摩 [3] によって導入された箱玉系は, 玉の種類, 箱の容量の自由度を変えることなどにより一般化されてきた [5], [6], [7]. 本研究では箱玉系の母関数を定義して, まずオリジナルの高橋・薩摩の箱玉系の場合にその母関数が有理関数になることを証明する. さらに玉の個数を無限にして, 準周期的に配置された場合にも箱玉系が良い振る舞いをしそうだという事を母関数の有理性という視点から調べようというものである.

1. はじめに

1.1. **箱玉の時間発展.** 箱玉系を構成するのは, 一行に右方向に無限に並んだ箱の中に配置されたいくつかの玉である.



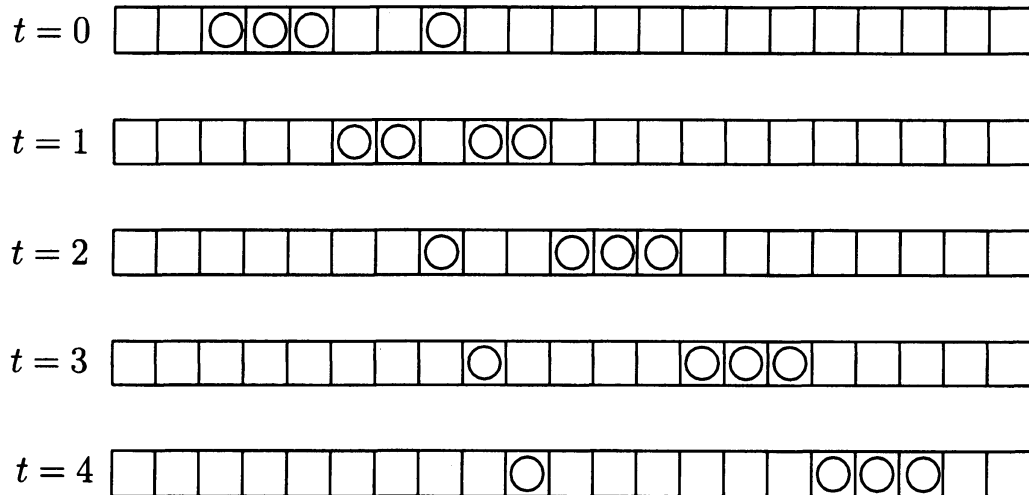
これらの箱に玉をいれた配置を箱玉系の状態と呼ぶことにする. 箱玉系の状態は, 離散的な時間ステップで変化するものとし, 初期状態を時刻 0 として, 以降 1, 2, 3, ... と時刻が増えていく. このとき, 任意の時刻 t の状態から次の時刻 $t+1$ の状態への変化は以下の規則によって記述される. ここでは玉の個数は有限個としている.

任意の時刻 t で, 左から玉を運ぶキャリーさんがやってきて右方向に進み, 以下の規則に従い箱の玉を動かしていく.

- 箱に玉がある場合はその玉を持ち次の箱に移動する.
- 箱に玉がない場合は
 - 玉を持っていれば持っている玉をいれる.
 - 玉を持っていなければ何もしない.

すべての玉を移し終わったら, 時刻が 1 増え, 次の時刻へ時間発展する.

Example 1.1. $t = 0$ に与えられた箱と玉の状態に対して, 規則に従い時間発展させてみる.



Definition 1.2. 箱玉系においてソリトンとは、両端を空箱で挟まれた、玉が連続して入っている部分をいう。

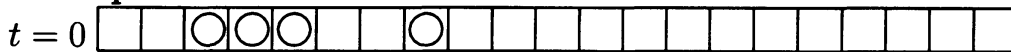
玉の個数が有限個の場合などに十分時間が経過したあとでは、「これ以上玉の個数が変化しない」という意味で通常のソリトンになる。(Theorem 1.4)

ここで玉の配置を次のような記号で表すことにする。

$$\begin{cases} Q_k^t & : (\text{時刻 } t \text{ における, 左から数えて } k \text{ 番目の玉のグループの個数}) \\ E_k^t & : (\text{時刻 } t \text{ における, } Q_k \text{ と } Q_{k+1} \text{ の間にある空き箱の数}) \end{cases}$$

ただし, E_0^t は Q_1^t より左にある空箱 (連続した 0 の個数) とする。

Example 1.3.



- (1) $Q_1^0 = 3, Q_2^0 = 1$
- (2) $E_0^0 = 2, E_1^0 = 2$

Theorem 1.4. (高橋・薩摩, 時弘・永井・薩摩の定理)[1, p183], [2], [3]

$T \gg 0$ の時, 次の (1), (2) を満たし, ソリトンは衝突せずに規則的に時間発展する。

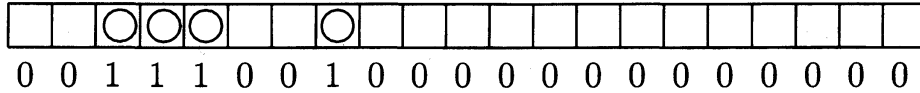
- (1) $Q_1^T \leq Q_2^T \leq \dots \leq Q_r^T$
- (2) $Q_1^T \leq E_1^T, \dots, Q_{r-1}^T \leq E_{r-1}^T$

Example 1.5. Example 1.1 における箱玉系は $T = 2$ 以降は, $Q_1^2 = 1, Q_2^2 = 3$ のソリトンは衝突せずにそれぞれの大きさのスピードに従い時間発展していく。

1.2. **保存量.** 以下の議論は時弘著の『箱玉系の数理』[4]を参考にしたものである。箱玉系にはいくつかの保存量がある。たとえば, 玉の総数は明らかに時間によらず一定である。

Definition 1.6. 箱玉系の保存量を記述するために, 次のように箱と玉の状態を書き換えておく. 空き箱を0, 玉の入っている箱を1と表し, 箱玉系の状態を1,0列で表現する.

与えられた箱玉系の図を1,0列で表現する.



与えられた1,0列に対して,

(1) 1,0列に存在する10の順に並んだ1と0ペアに注目し, そのペアになる1と0を線で結ぶ. その結ばれたペアの個数を p_1 とする. またその1と0のペアを10対と呼ぶことにする.

(2) 上の(1)で結ばれた10対を全て消去して新たに現れる10対を線で結ぶ. その新たに結ばれた10対の個数を p_2 とする.

(3) 以下同様に, 前ステップで結ばれた10対を全て消去して, 新たに現れる10対を線で結ぶ.

第 n ステップで新たに現れる10対の個数を p_n とする.

この操作を1がなくなるまで続ける.

Example 1.7. Example 1.1の例では下の図のように, $p_1 = 2, p_2 = 1, p_3 = 1$ となる.

第1ステップ	0 0 1 1 $\overline{1}$ 0 0 $\overline{1}$ 0 0 0 ...	$p_1 = 2$
第2ステップ	0 0 1 $\overline{1}$ 0 0 0 0 0 0 ...	$p_2 = 1$
第3ステップ	0 0 $\overline{1}$ 0 0 0 0 0 0 0 ...	$p_3 = 1$

Lemma 1.8. $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq \dots$ が成り立つ, すなわち (p_1, p_2, p_3, \dots) は非増加な正整数数列である.

Proof. p_k は10対を $(k-1)$ 回消去した状態におけるソリトンの個数である.

「10対を消去」するとは, 各ソリトンの右端とその右の空箱を一つ消去することなので, 「ソリトンの大きさが1」の場合は, ソリトンが消滅する. また「長さ2以上のソリトンが空箱が一つはさんで隣接している」場合は, 10対消去によりソリトンが1つにくっつき, ソリトンの個数が減少する. それ以外の場合はそれぞれのソリトンの長さが1短くなり, ソリトンの個数は変わらない.

よって10対消去によってソリトンの個数は非増加であり, Lemma 1.8が成立する.

□

Theorem 1.9. (p_1, p_2, \dots) は箱玉系の保存量である.

Proof. 時間発展則により, 時刻 t の10と並んでいれば, 時刻 $t+1$ では必ず01となることに注意する. さらに時刻 $t+1$ での01対は各ソリト

ンの左端であり, 必ずこのようにして得られる. よって

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \text{「時刻 } t \text{ における } 10 \text{ 対の数」} \\ &= \text{「時刻 } t+1 \text{ における } 01 \text{ 対の数」} \\ &= \text{「時刻 } t+1 \text{ における } 10 \text{ 対の数」} \\ &= p_1(t+1) \end{aligned}$$

よって p_1 は保存量となる.

p_k は 10 対を $(k-1)$ 回消去した状態における 10 対の個数である. 10 対消去を行って時間発展させた状態は時間発展させてから 10 対を消去した状態に平行移動を除いて等しい. よって, 同様に p_k も保存量となっている.

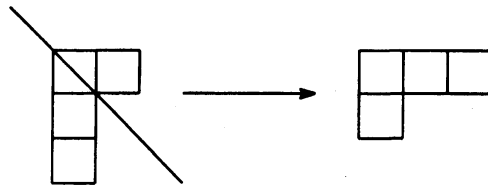
□

非増加整数列 $\sigma = (p_1, p_2, \dots, p_L)$ に対して, σ の双対列 $\check{\sigma} = (q_1, q_2, \dots, q_{p_1})$ を次のように定義する.

$$\begin{cases} q_1 = L = & (p_i \geq 1 \text{ となるような } i \text{ の個数}) \\ q_2 = & (p_i \geq 2 \text{ となるような } i \text{ の個数}) \\ \dots & \\ q_{p_1} = & (p_i \geq p_1 \text{ となるような } i \text{ の個数}) \end{cases}$$

Remark 1.10. よく知られているように, $\sigma = (p_1, p_2, \dots, p_L)$ をヤング図形と考えると, 双対列はヤング図形 of 双対に対応する. これにより, 一般に $\sum p_i = \sum q_j$ で, $\check{\check{\sigma}} = \sigma$ であることがわかる.

Example 1.11. $\sigma = (2, 1, 1)$ として



このような σ に対して $\check{\sigma}$ は図からもわかるように, $\check{\sigma} = (q_1, q_2) = (3, 1)$ となる.

Theorem 1.12. $\check{\sigma} = (q_1, q_2, \dots, q_M)$ ならば $T \gg 0$ のとき, $Q_{M-i}^T = q_i$ である.[4, p35]

2. 箱玉系と母関数

2.1. 有限の玉と母関数. この章でも玉の個数は有限個と仮定する. $B = B_0$ を箱玉の初期状態とし, B_j を時刻 j における箱と玉の状態とする.

与えられた箱玉の状態 B に対し,

$$\begin{cases} a_i(B_j) = 1 & (\text{時刻 } j \text{ に } i \text{ 番目の箱に玉がある}) \\ a_i(B_j) = 0 & (\text{時刻 } j \text{ に } i \text{ 番目の箱に玉がない}) \end{cases}$$

とする.

このとき, $f_{B_j}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(B_j) \cdot z^i$ として, 母関数 $F_B(z, t)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} F_B(z, t) &:= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_i(B_j) \cdot z^i \cdot t^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} f_{B_j}(z) \cdot t^j \end{aligned}$$

ただし初期時刻を $t = 0$, 左端の箱の番号を 0 番目とする.

また箱玉の初期状態 B が明らかな場合は単に $F(z, t)$ と書くことにする.

Theorem 2.1. 玉の個数が有限個の箱玉系では, $F(z, t)$ は有理式となる.

Proof. Theorem 1.12 より, ある時刻 T が存在して, $t \geq T$ ならば, お互い衝突しない玉のグループに必ず分かれる.

このとき各ソリトンに属する玉の個数を右から順に q_1, q_2, \dots, q_N とすると, $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_N$ となる.

また $t \geq T$ の時, 各ソリトンは規則的に時間発展するので,

$$\begin{aligned} \sum_{j=T}^{\infty} f_{B_j}(z) \cdot t^j &= \frac{1 - z^{q_N}}{1 - z} \cdot \frac{z^{S_1^T} \cdot t^T}{1 - z^{q_N} \cdot t} + \frac{1 - z^{q_{N-1}}}{1 - z} \cdot \frac{z^{S_2^T} \cdot t^T}{1 - z^{q_{N-1}} \cdot t} \\ &\quad + \dots + \frac{1 - z^{q_1}}{1 - z} \cdot \frac{z^{S_N^T} \cdot t^T}{1 - z^{q_1} \cdot t} \end{aligned}$$

となり, 有理式となる. ただし, $S_i^T := E_0^T + (\sum_{k=1}^{i-1} E_k^T + Q_k^T)$ とする.

従って

$$\begin{aligned} F_B(z, t) &= \left(\sum_{j=0}^{T-1} f_{B_j}(z) \cdot t^j \right) + \left(\sum_{j=T}^{\infty} f_{B_j}(z) \cdot t^j \right) \\ &= \text{多項式} + \text{有理関数} \\ &= \text{有理式} \end{aligned}$$

よって $F(z, t)$ は有理式となる. □

Example 2.2. Example 1.1 における, 母関数を求めてみる.

$t \geq 2$ となるような t については, 規則的に時間発展するので,

$$\begin{aligned} F_B(z, t) &= \sum_{j=0}^1 f_{B_j}(z) \cdot t^j + \sum_{j=2}^{\infty} f_{B_j}(z) \cdot t^j \\ &= (z^2 + z^3 + z^4 + z^7) \cdot t^0 + (z^5 + z^6 + z^8 + z^9) \cdot t \\ &\quad + \left(\frac{z^7}{1 - z \cdot t} + \frac{(z^{10} + z^{11} + z^{12})}{1 - z^3 \cdot t} \right) \cdot t^2 \end{aligned}$$

分母の $1 - zt$, $1 - z^3t$ より, 現れるソリトンの大きさがわかる.

3. 無限の玉と母関数

Definition 3.1. 箱玉系が時刻 t において準周期的であるとは, ある $S > 1, k > 0$ が存在して $S \leq i$ ならば $a_i(B_t) = a_{i+k}(B_0)$ となる事をいう.

次の事実は容易に確かめられる.

Proposition 3.2.

- (1) 箱玉系が準周期的であるかどうかは, 時刻 t によらない.
- (2) 任意の i に対して a_i が 0 か 1 の値をとるとき, $f_0(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot z^i$ が有理関数であるための必要十分条件はある $S \gg 0, k > 0$ が存在して $S \leq i$ ならば $a_{i+k} = a_i$ となることである.

よって $f_{B_0}(z)$ が有理関数であるための必要十分条件は B_0 が準周期的になることである.

また玉が無限個ある箱玉系の場合, 母関数 $F(z, t)$ が有理関数となるためには $F(z, 0) = f_{B_0}$ が有理関数となること (すなわち箱玉系の初期条件が準周期的) が必要条件である.

Conjecture 3.3. 玉が無限個ある箱玉系の母関数が有理関数となるための必要十分条件は箱玉系が準周期的となることである.

本論文では特別な場合に Conjecture 3.3 を紹介する.

3.1. ℓ - ℓ BBS.

Definition 3.4. 時刻 $t = 0$ において $s \gg 0$ に対し, 「 ℓ 個の 1」と 「 ℓ 個の 0」の長さ 2ℓ のパターンを無限に繰り返す準周期的な箱玉系を ℓ - ℓ BBS と定義する.

$$B = \left(\overbrace{0 \dots 0}^{E_0^0} \overbrace{1 \dots 1}^{Q_1^0} \overbrace{0 \dots 0}^{E_1^0} \dots \overbrace{1 \dots 1}^{Q_M^0} \overbrace{0 \dots 0}^{E_M^0} \overbrace{1 \dots 1}^{\ell} \overbrace{0 \dots 0}^{\ell} \dots \right).$$

Example 3.5. ($l = 3$)

(110) の非周期部分のあとに, (111000) の 6 個のパターンを無限に繰り返す準周期的なケース.

非周期部分	周期部分
1 1 0	1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 ...

Proposition 3.6. l - l BBS の場合, $F(z, t)$ は有理式になる.

$L(t) = E_0^0 + (\sum_{i=1}^M Q_i^0 + E_i^0) + t \cdot l$ とすると時刻 t において $L(t)$ から右の箱は周期的な玉の配置となる.

Example 3.7. 時間発展及び $L(t)$ を示す.

	$L(0)$	
$t=0$	1 1 0	1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 ...
$t=1$	0 0 1 0 0 0	$L(1)$ 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 ...
$t=2$	0 0 0 1 0 0 0 0	$L(2)$ 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 ...
$t=3$	0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0	$L(3)$ 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 ...

Definition 3.8. l - l BBS において, キャリーさんが $L(t)$ に来た時に玉を持っているような時間遷移のことを「非周期部分と周期部分の衝突」と定義する.

次の (1)~(3) に注意する.

(1) 時刻 t において非周期部分と周期部分の衝突が起こる時, 周期部分に持ちこんだ玉の個数だけ非周期部分の玉の個数から減少する, とくに非周期部分のソリトンは有限個しかないので, 非周期部分と周期部分の衝突は有限回しか起こらない.

(2) 時刻 t において非周期部分と周期部分の衝突が起こる時, 周期部分に持ち込んだ玉は, $L(t)$ より右の周期部分の空箱の容量に余裕がないため, 周期部分に影響を与えない.

(3) 非周期部分と周期部分の衝突が起こらない時, 非周期部分の時間発展と周期部分の時間発展は互いに影響を与えず, それぞれ独立して時間発展する. 特にある時刻 T 以降は非周期部分と周期部分の衝突が完全に終わり, 非周期部分と周期部分は常に独立である.

(1)~(3) から Proposition 3.6 が従う.

Example 3.9. Example 3.7 では

(1) $t = 0$ から $t = 1$ への時間遷移の時, キャリーさんが $L(0)$ 地点で 1 個の玉を持って入り, 非周期部分と周期部分の衝突が起こるが, $L(0)$ より右側には空箱に余裕がないため $t = 1$ になったとき, 玉の個数が 1 つ減っている.

Example 3.14 と Example 1.1 を比べると次の現象が起こっていることに気付く.

Theorem 3.15. $t \gg 0$ で, l - $(l+1)$ BBS の半周期部分と古典的 BBS は

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{* \hat{1} \cdots \hat{1}}^{Q_i} & \leftrightarrow & \overbrace{1 \cdots 1}^{Q_i} \\ \hat{0} & \leftrightarrow & 0 \end{array}$$

の対応で同じ挙動を示す.

Example 3.14 では時刻 $t = 8$ 以降で, Example 1.1 ($t = 1$ 以降) における古典的 BBS と同じ挙動を示している.

Corollary 3.16. l - $(l+1)$ BBS の場合, 母関数は有理関数になる.

実際, 非周期部分の玉の個数は有限個しかないので, 非周期部分と半周期部分の衝突は有限回しか起こらない.

衝突が終わった後は, 非周期部分と半周期部分は独立して時間発展する. それぞれ (非周期部分, 半周期部分) のソリトンの衝突が終われば, 箱玉系の玉は規則正しく時間発展していく.

このことから有理性が従う.

Example 3.17. Example 3.13, Example 3.14 では, $t = 7$ で非周期部分と半周期部分の衝突が終わり, $t = 9$ でそれぞれのソリトンの衝突が終わり, それ以降は規則的に時間発展している.

また $t \geq 9$ の母関数は次のような有理式となる.

$$\begin{aligned} \sum_{j=9}^{\infty} f_{B_j}(z) \cdot t^j &= \frac{z^{31}t^9}{1-zt} \\ &+ \frac{(1+z^3+z^6)z^{L(9)}t^9}{1-zt} + \frac{(z^9)z^{L(9)}t^9}{(1-z^4t)(1-zt)} \\ &+ \frac{(z^{12}+z^{14}+z^{15})z^{L(9)}t^9}{1-z^4t} \\ &+ \frac{(z^{17}+z^{20})z^{L(9)}t^9}{(1-z^4t)(1-z^{10}t)} \\ &+ \frac{(z^{23}+z^{25}+z^{26}+z^{28}+z^{29}+z^{31}+z^{32})z^{L(9)}t^9}{1-z^{10}t} \\ &+ \frac{(z^{34})z^{L(9)}t^9}{(1-z^3)(1-z^{10}t)} \end{aligned}$$

よって $F(z, t)$ も有理式となる.

周期部分がより複雑になると, 半周期部分の挙動は極めて複雑になり, 一般の有理性を目標とする場合は本論文と違うアプローチが必要になると思われる.

REFERENCES

- [1] 広田良吾・高橋大輔, 差分と超離散, 共立出版, 2003
- [2] T.Tokihiro, A.Nagai, and J.Satuma, *Proof of solitonical nature of box and ball system by means of inverse ultra-discretization*, *Inverse Problems* 15(1639-1662), 1999
- [3] Daisuke Takahashi and Junkichi Satsumat, *A Soliton Cellular Automaton*, *J.Phys.Soc.Jpn.* 59(3514-3519), 1990
- [4] 時弘哲治, 箱玉系の数理, 朝倉書店, 2010
- [5] Daisuke Takahashi and Junta Matsukidaira, *Box and Ball System with a Carrier and Ultra-Discrete Modified KdV Equation* *J.Phys.A:Math.Gen.* 30, 1997
- [6] T.Tokihiro, D.Takahashi, and J.Matsukidaira *Box and ball system as a realization of ultradiscrete nonautonomous KP equation*, *J.Phys.A:Math.Gen.* 33(607-619), 2000
- [7] D.Takahashi *On some Soliton Systems Defined by Using Boxes and Balls*, *International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications 報告集* (555-558), 1993

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, HIROSHIMA UNIVERSITY, HIGASHI-HIROSHIMA 739-8526 JAPAN