数理解析研究所講究録
第 1945 巻 2015 年 1-20

コンパクト対称空間に付随する 行列空間上の多項式積分について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科　松本 詔 (Sho MATSUMOTO)
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

RIMS 研究集会「組合せ論的表現論の展望」平成 25 年 10 月 8 日 〜 10 月 11 日

1 序章

本稿の内容は論文 [10, 12] の結果を元にしている．証明はそちらを参考にして戴きたい．

1.1 ランダム行列の成分のモーメント

$\mathcal{S}$ を適当な $n\times n$ 行列のなす集合とし，確率測度 dS を備えているとする．例えば実直交群 $\mathrm{O}(n)$ とその正規化された Haar 測度などを考えればよい．このとき $(\mathcal{S}, \mathbf{Borel}, dS)$ は確率空間となる．ただし $\mathbf{Borel}$ は Borel 集合族を表す．行列 $S\in\mathcal{S}$ を，分布 dS に従うランダム行列と呼ぶ．本稿では行列 S と $\mathcal{S}$ 値確率変数であるランダム行列をしばしば同一視する．例えば，行列 S の第 (i,j) 成分 s_{ij} と，行列の座標関数 $\mathcal{S}\ni S\mapsto s_{ij}$ を区別しない．

$\mathcal{S}$ 上の多項式関数 f に対し，積分 $\mathbb{E}[f(S)] := \int_{\mathcal{S}} f(S)dS$ を計算するという問題を考える．積分は線型なので，f として単項式のみを考えれば十分である．すなわち，行列成分のモーメント

$$\mathbb{E}[s_{i_1j_1}s_{i_2j_2}\cdots s_{i_kj_k}]$$

を計算したい．ここで s_{ij} は行列 S の行列成分で，$i_1,i_2,\dots,i_k,j_1,j_2,\dots,j_k$ は $\{1,2,\dots,n\}$ に属する任意の数である．より一般には，行列成分の複素共役も含めて

$$\mathbb{E}[s_{i_1j_1}s_{i_2j_2}\cdots s_{i_kj_k}\overline{s_{i'_1j'_1}s_{i'_2j'_2}\cdots s_{i'_lj'_l}}]$$

という形の量を計算する．

1.2 例：2 次回転群

簡単な例を挙げよう．2 次回転群を考える．

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ U = (u_{ij})_{1\le i,j\le 2} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta\in\mathbb{R} \right\}.$$

SO(2) は単位円周 S^1 と Lie 群として同型であるが，SO(2) の Haar 確率測度 dU は S^1 の一様確率測度 $\frac{d\theta}{2\pi}$ が引き起こすものと一致する．いま $U \in \mathrm{SO}(2)$ の行列成分は 4 つ $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}$ なので，非負整数 a, b, c, d に対して積分 $\int_{\mathrm{SO}(2)} u_{11}^a u_{12}^b u_{21}^c u_{22}^d \, dU$ が計算したい量である．これは $u_{11} = \cos\theta$, $u_{12} = -\sin\theta$, $u_{21} = \sin\theta$, $u_{22} = \cos\theta$ と変換すれば，単に $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の積の積分に帰着され，

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{SO}(2)} u_{11}^a u_{12}^b u_{21}^c u_{22}^d \, \mathrm{d}U =& (-1)^b \int_0^{2\pi} \cos^{a+d}\theta \sin^{b+c}\theta \, \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \\ =& \begin{cases} (-1)^b \frac{(a+d-1)!! \, (b+c-1)!!}{(a+b+c+d)!!} & a+d \text{ と } b+c \text{ がともに偶数}, \\ 0 & \text{それ以外}, \end{cases}\end{aligned}$$

と計算できる．

1.3 Weingarten calculus

古典型コンパクト群 $\mathrm{U}(n), \mathrm{O}(n), \mathrm{Sp}(2n)$ に対し，行列成分のモーメントを計算する手法は [2, 5] で与えられ，現在 Weingarten calculus と呼ばれている．この名は，Don Weingarten [17] の先行研究に由来する．§2 でこれらの研究を復習する．特に，登場する Weingarten 関数を Gelfand pair の理論を用いて整備する．本稿の主題である §3 で，コンパクト対称空間から自然に定まるランダム行列に対し，同様の手法を構築する．

本稿で扱われているランダム行列以外に対しても，似たような Weingarten calculus が知られている．例えば，[4, 9] を参照．

2 コンパクト群

この章では，[2, 5, 3, 12] で発展した 3 つの古典型コンパクト群 $\mathrm{U}(n), \mathrm{O}(n), \mathrm{Sp}(2n)$ の Weingarten calculus について復習する．

2.1 ユニタリ群

$\mathrm{U}(n)$ を n 次のユニタリ群とする:

$$\mathrm{U}(n) = \{U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid UU^* = I_n\}.$$

ここで U^* は U の随伴行列，すなわち転置行列 U^{T} の複素共役である．$U = (u_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ を，$\mathrm{U}(n)$ の正規化された Haar 測度に従うランダム行列とする．行列成分 u_{ij} および複素共役 $\overline{u_{ij}}$ のモーメントを計算したい．

補題 2.1. $i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_k,i'_1,\dots,i'_l,j'_1,\dots,j'_l$ は $\{1,2,\dots,n\}$ に属する数とする．このとき，$k\neq l$ ならば

$$\mathbb{E}[u_{i_1j_1}u_{i_2j_2}\cdots u_{i_kj_k}\overline{u_{i'_1j'_1}u_{i'_2j'_2}\cdots u_{i'_lj'_l}}]=0.$$

証明. $\theta\in\mathbb{R}$ とする．$e^{\mathrm{i}\theta}I_n$ はユニタリ行列なので，Haar 測度の両側不変性から $U=(u_{ij})$ と $e^{\mathrm{i}\theta}U=(e^{\mathrm{i}\theta}u_{ij})$ の分布は同じである．よって等式

$$\mathbb{E}[u_{i_1j_1}u_{i_2j_2}\cdots u_{i_kj_k}\overline{u_{i'_1j'_1}u_{i'_2j'_2}\cdots u_{i'_lj'_l}}]=e^{\mathrm{i}(k-l)\theta}\mathbb{E}[u_{i_1j_1}u_{i_2j_2}\cdots u_{i_kj_k}\overline{u_{i'_1j'_1}u_{i'_2j'_2}\cdots u_{i'_lj'_l}}]$$

を得る．$\theta\in\mathbb{R}$ は任意に取れるので，$k\neq l$ ならば上の式の両辺は共に 0 にならなければならない． □

この補題により，我々は $k=l$ のときのみを考えればよい．ユニタリ Weingarten 関数を定義しよう．ユニタリ Weingarten 関数 $\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\cdot;n)$ は対称群 S_k 上の類関数で，次で与えられる．

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\sigma;n)=\frac{1}{k!}\sum_{\lambda\vdash k}\frac{f^\lambda}{\prod_{(i,j)\in\lambda}(n+j-i)}\chi^\lambda(\sigma)\qquad(\sigma\in S_k). \tag{2.1}$$

和は k の分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots)$ 全体を走る．χ^λ は λ に対応する対称群 S_k の既約指標で，f^λ は χ^λ の単位元における値である．良く知られているように，f^λ は型が λ の標準 Young 盤の個数に一致する．分母の積 $\prod_{(i,j)\in\lambda}$ は (i,j) が Young 図形の箱の座標全体，すなわち $\{(i,j)\in(\mathbb{Z}_{>0})^{\times 2}\mid 1\leq j\leq\lambda_i\}$ を走ることを表している．

例 2.1. S_2 において，恒等置換 id_2 と互換 $(1\ 2)$ におけるユニタリ Weingarten 関数の値はそれぞれ

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\mathrm{id}_2;n)=\frac{1}{(n+1)(n-1)},\qquad \mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}((1\ 2);n)=\frac{-1}{n(n+1)(n-1)}.$$

定理 2.2 (Collins [2], Collins–Śniady [5]). 4つの添え字の列 $\boldsymbol{i}=(i_1,\dots,i_k)$, $\boldsymbol{j}=(j_1,\dots,j_k)$, $\boldsymbol{i}'=(i'_1,\dots,i'_k)$, $\boldsymbol{j}=(j'_1,\dots,j'_k)$ に対し，

$$\mathbb{E}[u_{i_1j_1}u_{i_2j_2}\cdots u_{i_kj_k}\overline{u_{i'_1j'_1}u_{i'_2j'_2}\cdots u_{i'_kj'_k}}]=\sum_{\sigma\in S_k}\sum_{\tau\in S_k}\delta_\sigma(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}')\delta_\tau(\boldsymbol{j},\boldsymbol{j}')\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\sigma^{-1}\tau;n).$$

ここで $\delta_\sigma(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}')$ は

$$\delta_\sigma(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}')=\begin{cases}1 & \textit{if } (i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)},\dots,i_{\sigma(k)})=(i'_1,i'_2,\dots,i'_k),\\ 0 & \textit{otherwise},\end{cases} \tag{2.2}$$

で定義される．

例 2.2. $n \geq 2$ とする．$\mathbb{E}[|u_{11}|^4]$ を計算しよう．定理の記号で $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}' = \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}' = (1,1)$ である．定理とその直前の例より，

$$\mathbb{E}[|u_{11}|^4] = \sum_{\sigma,\tau \in S_2} \mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\sigma^{-1}\tau; n) = 2(\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\mathrm{id}_2; n) + \mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}((1\ 2); n))$$
$$= 2\left\{ \frac{1}{(n+1)(n-1)} + \frac{-1}{n(n+1)(n-1)} \right\} = \frac{2}{n(n+1)}.$$

注意 2.1. ユニタリ Weingarnte 関数の定義式 (2.1) は，$n < k$ のときは意味をなさない．例えば $\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\mathrm{id}_2; n) = \frac{1}{(n+1)(n-1)}$ だが，これは $n = 1$ で意味をなさない．この事態を回避する一つの方法は，ユニタリ Weingarten 関数の定義を (2.1) から

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\sigma; n) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ \ell(\lambda) \leq n}} \frac{f^\lambda}{\prod_{(i,j)\in\lambda}(n+j-i)} \chi^\lambda(\sigma) \qquad (\sigma \in S_k)$$

と置き換えて，λ の動く範囲を長さ $\ell(\lambda)$ が n 以下になるように制限することである．そうすれば $\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\mathrm{id}_2; 1) = \mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}((1\ 2); 1) = \frac{1}{4}$ などとなり，U(1) においても $\mathbb{E}[|u_{11}|^4] = 2(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = 1$ と計算され，$n = 1$ でも定理 2.2 や例 2.2 は意味をなす．(もちろん U(1) では自明に $|u_{11}| = 1$ である．) 別の方法は，(2.1) の n を単に文字（不定元）だと思い定理 2.2 を適用することである．例 2.2 では，途中の式で $n = 1$ とできないが，最後の式 $\frac{2}{n(n+1)}$ は $n = 1$ と代入しても意味をなし，1 をとる．このような議論は一般の場合でも成立する ([5])．以下で与える定理でも同様の事態が発生するが，n を文字だと思って扱うことにする．

2.2 直交群

次に実直交群を考えよう．

$$\mathrm{O}(n) = \{R \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid RR^* = I_n\}.$$

$R = (r_{ij})$ を $\mathrm{O}(n)$ の正規化された Haar 測度に従うランダム行列とする．まず，k が奇数ならば $\mathbb{E}[r_{i_1j_1} r_{i_2j_2} \cdots r_{i_kj_k}] = 0$ となる．これは補題 2.1 と同様に，R と $-R = (-I_n)R$ が同分布であることから従う．

$\mathcal{M}_{2k}$ を $\{1, 2, \ldots, 2k\}$ のペアリング，すなわち 2 点集合への分割全体とする．$\mathcal{M}_{2k}$ の元は，perfect matchings とも呼ばれる．$\mathcal{M}_{2k}$ の元 $\mathfrak{p}$ は，

$$\mathfrak{p} = \{p(1), p(2)\} \sqcup \{p(3), p(4)\} \sqcup \cdots \sqcup \{p(2k-1), p(2k)\}$$

という形で書くことができ，また $p(2j-1) < p(2j)$ $(j = 1, \ldots, k)$ かつ $1 = p(1) < p(3) < \cdots < p(2k-1)$ という条件を課すことで，$p(1), \ldots, p(2k)$ を $\mathfrak{p}$ から一意的に決めることが

できる．このとき，$\mathfrak{p} \in \mathcal{M}_{2k}$ に対して置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2k-1 & 2k \\ p(1) & p(2) & p(3) & p(4) & \cdots & p(2k-1) & p(2k) \end{pmatrix} \in S_{2k}$ を対応させることで，$\mathcal{M}_{2k}$ を S_{2k} に埋め込む．例えば，$\mathcal{M}_4$ は3つの要素

$$\{1,2\} \sqcup \{3,4\}, \quad \{1,3\} \sqcup \{2,4\}, \quad \{1,4\} \sqcup \{2,3\}$$

からなるが，これらはそれぞれ S_4 の元

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

に対応する．

H_k を S_{2k} の部分群で，互換 $(2j-1\ 2j)$ $(j=1,2,\dots,k)$ と $(2i-1\ 2j-1)(2i\ 2j)$ $(1 \le i < j \le k)$ から生成されるものとする．H_k はリース積 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr S_k$ と同型であり，位数 $2^k k!$，BC型Weyl群である．超八面体群とも呼ばれる．$\mathcal{M}_{2k}$ の S_{2k} への埋め込みは，S_{2k}/H_k の完全代表系をなす．

組 (S_{2k}, H_k) は Gelfand pair であり，その理論は [7, Chapter VII] で展開されている．帯球関数が，各 $\lambda \vdash k$ に対し

$$\omega^\lambda(\sigma) = \frac{1}{|H_k|} \sum_{\zeta \in H_k} \chi^{2\lambda}(\sigma\zeta) \qquad (\sigma \in S_{2k})$$

で定義される．ここで，$\chi^{2\lambda}$ は $2\lambda = (2\lambda_1, 2\lambda_2, \dots)$ に対応する S_{2k} の既約指標．帯球関数 ω^λ は両側 H_k 不変である．すなわち，$\omega^\lambda(\zeta\sigma\zeta') = \omega^\lambda(\sigma)$ が全ての $\zeta, \zeta' \in H_k$, $\sigma \in S_{2k}$ に対して成り立つ．特に $\omega^\lambda(\sigma)$ は両側剰余類 $H_k\sigma H_k$ にしか依らない．S_k の共役類が k の分割で決まることと同様に，S_{2k} の両側剰余類 $H_k\sigma H_k$ も k の分割で定まる．両側剰余類の完全代表系 $\{\sigma_\mu \mid \mu \vdash k\}$ を次で定義する．まず長さ1の分割 $\mu = (k)$ に対し，$\sigma_\mu = \sigma_{(k)} \in S_{2k}$ を

$$\sigma_{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2k-1 & 2k \\ 1 & 2k & 2 & 3 & \cdots & 2k-2 & 2k-1 \end{pmatrix}$$

で定める．一般の $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l) \vdash k$ に対して，自然な埋め込み $S_{2\mu_1} \times S_{2\mu_2} \times \cdots \times S_{2\mu_l} \subset S_{2k}$ における $(\sigma_{(\mu_1)}, \sigma_{(\mu_2)}, \dots, \sigma_{(\mu_l)})$ の像を σ_μ として定める．このとき $S_{2k} = \bigsqcup_{\mu \vdash k} H_k \sigma_\mu H_k$ が成り立ち，また σ_μ は偶置換である．

直交 Weingarten 関数を

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\sigma; n) = \frac{2^k k!}{(2k)!} \sum_{\lambda \vdash k} \frac{f^{2\lambda}}{\prod_{(i,j)\in\lambda}(n+2j-i-1)} \omega^\lambda(\sigma) \quad (\sigma \in S_{2k}) \tag{2.3}$$

で定義する．定義より，直交 Weingarten 関数は両側 H_k 不変である．S_4 において，

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\sigma_{(1^2)}; n) = \frac{n+1}{n(n+2)(n-1)}, \quad \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\sigma_{(2)}; n) = \frac{-1}{n(n+2)(n-1)}.$$

さて，Haar 測度に従う $n\times n$ ランダム直交行列 $R=(r_{ij})$ の行列成分モーメントに対し，以下の公式が成り立つ．

定理 2.3 (Collins–Śniady [5], Collins–M [3]). 2 つの添え字の列 $\boldsymbol{i}=(i_1,\dots,i_{2k})$, $\boldsymbol{j}=(j_1,\dots,j_{2k})$ に対し，

$$\mathbb{E}[r_{i_1j_1}r_{i_2j_2}\cdots r_{i_{2k}j_{2k}}]=\sum_{\mathfrak{p}\in M_{2k}}\sum_{\mathfrak{q}\in M_{2k}}\Delta_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{i})\Delta_{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{j})\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{q};n).$$

ここで，記号 $\Delta_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{i})$ は次で定まる．

$$\Delta_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{i})=\begin{cases}1 & (\mathfrak{p}\text{ の全てのペア }\{a,b\}\text{ に対し }i_a=i_b\text{のとき}),\\ 0 & (\text{それ以外}).\end{cases} \tag{2.4}$$

例 2.3. $\mathbb{E}[r_{11}r_{12}r_{21}r_{22}]$ を計算しよう．定理の記号で，$\boldsymbol{i}=(1,1,2,2)$, $\boldsymbol{j}=(1,2,1,2)$ である．$\Delta_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{i})=1$, $\Delta_{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{j})=1$ を満たすような $\mathfrak{p},\mathfrak{q}\in\mathcal{M}_4$ は，それぞれ $\mathfrak{p}=\{1,2\}\sqcup\{3,4\}$, $\mathfrak{q}=\{1,3\}\sqcup\{2,4\}$ だけである．したがって，

$$\mathbb{E}[r_{11}r_{12}r_{21}r_{22}]=\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{q};n)=\frac{-1}{n(n+2)(n-1)}.$$

2.3 斜交群

次に斜交群を考える．

$$\mathrm{Sp}(2n)=\{S\in\mathrm{U}(2n)\mid SS^{\mathrm{D}}=I_{2n}\}.$$

ここで，S^{D} は

$$S^{\mathrm{D}}=JS^{\mathrm{T}}J^{\mathrm{T}},\qquad J=J_n=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{pmatrix} \tag{2.5}$$

で定める．

斜交群の場合は，[7, Chapter VII] で展開されている twisted Gelfand pair (S_{2k},H_k,ϵ) の理論を用いる．ここで ϵ は S_{2k} における置換の符号（の H_k への制限）である．分割 $\lambda\vdash k$ に対し，twisted 帯球関数を

$$\pi^{\lambda}(\sigma)=(2^kk!)^{-1}\sum_{\zeta\in H_k}\epsilon(\zeta)\chi^{\lambda\cup\lambda}(\sigma\zeta)\qquad(\sigma\in S_{2k})$$

で定義する．ただし，$\lambda\cup\lambda=(\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_2,\dots)$. これらに対し，$\pi^{\lambda}(\zeta\sigma\zeta')=\epsilon(\zeta)\epsilon(\zeta')\pi^{\lambda}(\sigma)$ が全ての $\zeta,\zeta'\in H_k$ と $\sigma\in S_{2k}$ に対して成り立つ．

今，斜交 Weingarten 関数を

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{Sp}}(\sigma;n)=\frac{2^k k!}{(2k)!}\sum_{\lambda\vdash k}\frac{f^{\lambda\cup\lambda}}{\prod_{(i,j)\in\lambda}(2n-2i+j+1)}\pi^{\lambda}(\sigma)\quad(\sigma\in S_{2k}) \tag{2.6}$$

で定義する．両側剰余類の代表元 σ_μ たちを用いると，例えば，

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{Sp}}(\sigma_{(1^2)};n)=\frac{2n-1}{4n(n-1)(2n+1)},\quad \mathrm{Wg}^{\mathrm{Sp}}(\sigma_{(2)};n)=\frac{1}{4n(n-1)(2n+1)}.$$

Haar 測度に従う $2n\times 2n$ ランダム斜交行列 $S=(s_{ij})$ を考えよう．直交群の場合と同様に，k が奇数ならば $\mathbb{E}[s_{i_1j_1}s_{i_2j_2}\cdots s_{i_kj_k}]=0$ となる．

定理 2.4 (Collins–Śniady [5], M [12]). 2つの添え字の列 $\boldsymbol{i}=(i_1,\dots,i_{2k})$, $\boldsymbol{j}=(j_1,\dots,j_{2k})$ に対し，

$$\mathbb{E}[s_{i_1j_1}s_{i_2j_2}\cdots s_{i_{2k}j_{2k}}]=\sum_{\mathfrak{p}\in M_{2k}}\sum_{\mathfrak{q}\in M_{2k}}\Delta'_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{i})\Delta'_{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{j})\mathrm{Wg}^{\mathrm{Sp}}(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{q};n).$$

ここで，記号 $\Delta'_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{i})$ は $0,+1,-1$ のいずれかの値をとり，次で定まる．

$$\Delta'_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{i})=\prod_{\{a<b\}\in\mathfrak{p}}\langle e_{i_a},e_{i_b}\rangle_J. \tag{2.7}$$

ただし，$e_1,\dots,e_{2n}$ は $\mathbb{C}^{2n}$ の標準基底で，$\langle\cdot,\cdot\rangle_J$ は $\langle x,y\rangle_J=x^{\mathrm{T}}Jy$ で定まる反対称形式．

注意 2.2. $\overline{S}=(S^*)^{\mathrm{T}}=(S^{\mathrm{D}})^{\mathrm{T}}=JSJ^{\mathrm{T}}$ だから，上の定理は行列成分の複素共役を含んだ積分もカバーしている．

注意 2.3. 帯球関数による直交 Weingarten 関数の定義 (2.3) は [3] で初めて登場した．[14] も参照．また斜交 Weingarten 関数の定義 (2.6) は [12] で初めて登場した．

注意 2.4. ユニタリ Weingarten 関数は，$n\geq k$ のとき，

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\sigma;n)=(-1)^{k-l}\sum_{r=0}^{\infty}a_{k-l+2r}(\sigma)n^{-(2k-l+2r)}$$

の形で表すことができる．ここで，$\sigma\in S_k$ で，l は σ のサイクルの個数．この展開式は特に $n\to\infty$ のときの漸近挙動を与えている．係数 $a_r(\sigma)$ は置換 σ の互換への分解の数え上げや Jucys–Murphy 元と密接に関連している．特に主要項は，$\sigma\in S_k$ のサイクルタイプが $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_l)$ であるとき，Catalan 数 $\mathrm{Cat}(r)=\frac{(2r)!}{(r+1)!\,r!}$ を用いて $a_{k-l}(\sigma)=\prod_{j=1}^{l}\mathrm{Cat}(\mu_j-1)$ と書ける．詳しくは [13, 15]，直交群・斜交群の場合は [8] を参照．

Class $\mathcal{C}$	対称空間	ランダム行列
A I	$\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$	circular orthogonal ensemble (COE)
A II	$\mathrm{U}(2n)/\mathrm{Sp}(2n)$	circular symplectic ensemble (CSE)
A III	$\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(a)\times\mathrm{U}(b)$	
BD I	$\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(a)\times\mathrm{O}(b)$	chiral ensemble
C II	$\mathrm{Sp}(2n)/\mathrm{Sp}(2a)\times\mathrm{Sp}(2b)$	
	$(n=a+b)$	
D III	$\mathrm{O}(2n)/\mathrm{U}(n)$	Bogoliubov-de Gennes (BdG) ensemble
C I	$\mathrm{Sp}(2n)/\mathrm{U}(n)$	

図 1: 古典型コンパクト対称空間

3 コンパクト対称空間

前章では古典型コンパクト Lie 群を扱った．本稿の主題であるこの章では，古典型のコンパクト対称空間を扱い，Weingarten calculus を展開する．

3.1 コンパクト対称空間とランダム行列

図 1 で与えられている 7 系列のコンパクト対称空間を考える．それぞれ A I, A II, ... などと，制限ルート系のラベルがついている．G が古典型の（単純）コンパクト Lie 群であるような対称空間（の制限ルート系）はこれで尽くされることが知られている（Cartan の分類 [1]）．ただし，ここではランダム行列との関係を重視し，$\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$ などではなく $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$ などを扱う．

さて G/K を図 1 に登場する対称空間のどれかとする．$\Omega : G \to G$ を，K を固定点全体とするような G の対合とする（これを Cartan 対合という）．このとき，

$$\mathcal{S} = \{g\Omega(g^{-1}) \mid g \in G\}$$

とおくと，G が

$$g_0.V = g_0 V \Omega(g_0^{-1}) \qquad (g_0 \in G, \quad V \in \mathcal{S})$$

（右辺は単に行列の積）と推移的に作用し，同型 $\mathcal{S} \cong G/K$ が G の作用も込みで成立する．X を G の Haar 測度に従うランダム行列とすると，$V := X\Omega(X^{-1})$ は $\mathcal{S}$ に値をとるランダム行列である．この V を対称空間 G/K に付随するランダム行列と呼ぶ．少し乱暴な言い方だが，V を $\mathcal{C}$ 型（図 1 参照）のランダム行列とも呼ぶ．ランダム行列理論では，これらはそれぞれ図 1 の右の列のように呼ばれている．たとえば [6] を参照．

この章の目的は，7種類のコンパクト空間 G/K それぞれに対応するランダム行列 $V = V^{\mathcal{C}} = (v_{ij})$ に対し，

$$\mathbb{E}[v_{i_1j_1}v_{i_2j_2}\cdots v_{i_kj_k}] \quad \text{または} \quad \mathbb{E}[v_{i_1j_1}v_{i_2j_2}\cdots v_{i_kj_k}\overline{v_{i'_1j'_1}v_{i'_2j'_2}\cdots v_{i'_lj'_l}}]$$

を計算する手法 (Weingarten calculus) を与えることである．

3.2 Circular class (A I, A II)

A I 型対称空間 $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$ を考える．Cartan 対合は $\Omega(g) = (g^{\mathrm{T}})^{-1}$ である．U を Haar 測度に従う $n \times n$ ユニタリ行列とするとき，A I 型のランダム行列は $V = V^{\mathrm{A\,I}} = UU^{\mathrm{T}}$ であり，$\mathcal{S}$ は $n \times n$ 対称ユニタリ行列全体に一致する．この V はランダム行列理論において COE 行列と呼ばれている．

定理 3.1 ([10]). $V = V^{\mathrm{A\,I}} = (v_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ を考える．二つの添え字の列 $\boldsymbol{i} = (i_1, \dots, i_{2k})$ と $\boldsymbol{j} = (j_1, \dots, j_{2l})$ に対し，

$$\mathbb{E}[v_{i_1i_2}v_{i_3i_4}\cdots v_{i_{2k-1}i_{2k}}\overline{v_{j_1j_2}v_{j_3j_4}\cdots v_{j_{2l-1}j_{2l}}}] = \delta_{kl}\sum_{\sigma \in S_{2k}} \delta_\sigma(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})\mathrm{Wg}^{\mathrm{A\,I}}(\sigma; n).$$

ここで $\delta_\sigma(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$ は定理 *2.2* で与えられている．また *Weingarten* 関数 $\mathrm{Wg}^{\mathrm{A\,I}}(\sigma; n)$ は，直交 *Weingarten* 関数の n を $n+1$ に置き換えたものである．

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{A\,I}}(\sigma; n) = \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\sigma; n+1) = \frac{2^k k!}{(2k)!}\sum_{\lambda \vdash k}\frac{f^{2\lambda}}{\prod_{(i,j)\in\lambda}(n+2j-i)}\omega^\lambda(\sigma) \qquad (\sigma \in S_{2k}).$$

次に，A II 型対称空間 $\mathrm{U}(2n)/\mathrm{Sp}(2n)$ を考える．Cartan 対合は $\Omega(g) = (g^{\mathrm{D}})^{-1}$ である．U を Haar 測度に従う $2n \times 2n$ ユニタリ行列とするとき，A II 型のランダム行列は $V = V^{\mathrm{A\,II}} = UU^{\mathrm{D}}$ であり，$\mathcal{S}$ は $2n \times 2n$ self-dual (i.e. $V = V^{\mathrm{D}}$) ユニタリ行列全体に一致する．この V はランダム行列理論において CSE 行列と呼ばれている．次の定理では，記号を簡単にするために，$\hat{V} := VJ$ とおく．J は (2.5) で定義されている．

定理 3.2 ([12]). $\hat{V} = (\hat{v}_{ij})_{1 \le i,j \le 2n}$ を上のように定める．二つの添え字の列 $\boldsymbol{i} = (i_1, \dots, i_{2k})$ と $\boldsymbol{j} = (j_1, \dots, j_{2l})$ に対し，

$$\mathbb{E}[\hat{v}_{i_1i_2}\hat{v}_{i_3i_4}\cdots \hat{v}_{i_{2k-1}i_{2k}}\overline{\hat{v}_{j_1j_2}\hat{v}_{j_3j_4}\cdots \hat{v}_{j_{2l-1}j_{2l}}}] = \delta_{kl}\sum_{\sigma \in S_{2k}} \delta_\sigma(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})\mathrm{Wg}^{\mathrm{A\,II}}(\sigma; n).$$

Weingarten 関数 $\mathrm{Wg}^{\mathrm{A\,II}}(\sigma; n)$ は，斜交 *Weingarten* 関数の n を $n - \frac{1}{2}$ に置き換えたものである．

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{A\,II}}(\sigma; n) = \mathrm{Wg}^{\mathrm{Sp}}(\sigma; n - \tfrac{1}{2}) = \frac{2^k k!}{(2k)!}\sum_{\lambda \vdash k}\frac{f^{\lambda\cup\lambda}}{\prod_{(i,j)\in\lambda}(2n-2i+j)}\pi^\lambda(\sigma) \qquad (\sigma \in S_{2k}).$$

注意 3.1. A I 型および A II 型 (COE, CSE) の Weingarten 関数は，それぞれ直交/斜交 Weingarten 関数のパラメータを少しずらしたものになっている．なぜそのようなものが登場するのか，明確な理由は分からない．必要な Weingarten 関数を計算したところ，既出の直交/斜交 Weingarten 関数に一致したのだ．

3.3 Chiral class (A III, BD I, C II)

A III 型対称空間 $\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(a)\times\mathrm{U}(b)$, $n=a+b$, を考える．Cartan 対合は

$$\Omega(g)=I'_{ab}gI'_{ab}, \qquad I'_{ab}=\begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & -I_b \end{pmatrix}$$

である．U を Haar 測度に従う $n\times n$ ユニタリ行列とすると，A III 型ランダム行列は $V=V^{\mathrm{A\,III}}=UI'_{ab}U^*I'_{ab}$ である．V の代わりに，V に右から（ランダムでない）行列 I'_{ab} を掛けた行列 $W=VI'_{ab}=UI'_{ab}U^*$ を考えることにしよう．W はエルミートかつユニタリであり，I'_{ab} に共役である．

定理 3.3 ([12]). $W=(w_{ij})_{1\le i,j\le n}$ を上のように定める．二つの添え字の列 $\boldsymbol{i}=(i_1,\dots,i_k)$ と $\boldsymbol{j}=(j_1,\dots,j_k)$ に対し，

$$\mathbb{E}[w_{i_1j_1}w_{i_2j_2}\cdots w_{i_kj_k}]=\sum_{\sigma\in S_k}\delta_\sigma(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})\mathrm{Wg}^{\mathrm{A\,III}}(\sigma;a,b).$$

Weingarten 関数 $\mathrm{Wg}^{\mathrm{A\,III}}(\sigma;a,b)$ は S_k 上の類関数であり，以下で与えられる．

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{A\,III}}(\sigma;a,b)=\frac{1}{k!}\sum_{\lambda\vdash k}f^\lambda\frac{s_\lambda(1^a,(-1)^b)}{s_\lambda(1^n)}\chi^\lambda(\sigma) \qquad (\sigma\in S_k).$$

ここで，$s_\lambda(x_1,\dots,x_n)$ は n 変数の *Schur* 多項式である．

Schur 多項式の特殊値 $s_\lambda(1^n)=s_\lambda(\underbrace{1,\dots,1}_{n})$ は，よく知られているように $s_\lambda(1^n)=\frac{f^\lambda}{k!}\prod_{(i,j)\in\lambda}(n+j-i)$ で与えられるが，$s_\lambda(1^a,(-1)^b)=s_\lambda(\underbrace{1,\dots,1}_{a},\underbrace{-1,\dots,-1}_{b})$ にはそのような明示的な公式は知られていないようである．

例 3.1.

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{A\,III}}(\mathrm{id}_2;a,b)=\frac{(a-b+1)(a-b-1)}{(n+1)(n-1)}.$$

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{A\,III}}((12);a,b)=\frac{4ab}{n(n+1)(n-1)}.$$

次に BD I 型対称空間 $O(n)/O(a)\times O(b)$, $n=a+b$, を考える．Cartan 対合は $\Omega(g)=I'_{ab}gI'_{ab}$ である．R を Haar 測度に従う $n\times n$ 直交行列とすると，BD I 型ランダム行列は $V=V^{\mathrm{BD\,I}}=RI'_{ab}R^{\mathrm{T}}I'_{ab}$ であるが，A III 型のときと同じように $W=VI'_{ab}=RI'_{ab}R^{\mathrm{T}}$ を考えることにしよう．W は対称かつ直交であり，I'_{ab} に共役な行列である．

定理 3.4 ([12]). $W=(w_{ij})_{1\le i,j\le n}$ を上のように定める．添え字の列 $\boldsymbol{i}=(i_1,\dots,i_{2k})$ に対し，

$$\mathbb{E}[w_{i_1i_2}w_{i_3i_4}\cdots w_{i_{2k-1}i_{2k}}]=\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{M}_{2k}}\Delta_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{i})\mathrm{Wg}^{\mathrm{BD\,I}}(\mathfrak{p};a,b).$$

ここで $\Delta_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{i})$ は定理 *2.3* で与えられている．*Weingarten* 関数 $\mathrm{Wg}^{\mathrm{BD\,I}}(\sigma;a,b)$ は S_{2k} 上の両側 H_k 不変関数であり，以下で与えられる．

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{BD\,I}}(\sigma;a,b)=\frac{2^kk!}{(2k)!}\sum_{\lambda\vdash k}f^{2\lambda}\frac{Z_\lambda(1^a,(-1)^b)}{Z_\lambda(1^n)}\omega^\lambda(\sigma)\qquad(\sigma\in S_{2k})$$

ここで，$Z_\lambda(x_1,\dots,x_n)$ は n 変数の帯多項式（*zonal polynomial, [7, Chapter VII.2]* 参照）である．

やはり特殊値 $Z_\lambda(1^n)=\prod_{(i,j)\in\lambda}(n+2j-i-1)$ は知られているが，$Z_\lambda(1^a,(-1)^b)$ は知られていない．

例 3.2.

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{BD\,I}}(\sigma_{(1^2)};a,b)=\frac{(a-b)^2(n+1)-2n}{n(n+2)(n-1)}.$$
$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{BD\,I}}(\sigma_{(2)};a,b)=\frac{4ab}{n(n+2)(n-1)}.$$

今度は C II 型対称空間 $Sp(2n)/Sp(2a)\times Sp(2b)$, $n=a+b$, を考える．Cartan 対合は

$$\Omega(g)=I''_{ab}gI''_{ab},\qquad I''_{ab}=\begin{pmatrix}I'_{ab}&0\\0&I'_{ab}\end{pmatrix}$$

である．S を Haar 測度に従う $2n\times 2n$ 斜交行列とすると，C II 型ランダム行列は $V=V^{\mathrm{C\,II}}=SI''_{ab}S^{\mathrm{D}}I''_{ab}$ であるが，今回も $W=VI''_{ab}=SI''_{ab}S^{\mathrm{D}}$ を考えることにしよう．W はエルミートかつ斜交であり，I''_{ab} に共役な行列である．

定理 3.5 ([12]). W を上のように定め，$\hat{W}=(\hat{w}_{ij})_{1\le i,j\le 2n}=WJ$ を考える．添え字の列 $\boldsymbol{i}=(i_1,\dots,i_{2k})$ に対し，

$$\mathbb{E}[\hat{w}_{i_1i_2}\hat{w}_{i_3i_4}\cdots\hat{w}_{i_{2k-1}i_{2k}}]=\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{M}_{2k}}\Delta'_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{i})\mathrm{Wg}^{\mathrm{C\,II}}(\mathfrak{p};a,b).$$

ここで $\Delta'_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{i})$ は定理 *2.4* で与えられている．*Weingarten* 関数 $\mathrm{Wg}^{\mathrm{C\,II}}(\sigma;a,b)$ は S_{2k} 上の両側 H_k *twisted* 関数であり，以下で与えられる．

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{C\,II}}(\sigma;a,b)=\frac{2^k k!}{(2k)!}\sum_{\lambda\vdash k} f^{\lambda\cup\lambda}\frac{Z'_\lambda(1^a,(-1)^b)}{Z'_\lambda(1^n)}\pi^\lambda(\sigma)\qquad(\sigma\in S_{2k}).$$

ここで，$Z'_\lambda(x_1,\dots,x_n)$ は n 変数の斜交帯多項式（*symplectic zonal polynomial, [7, Chapter VII.2 Example 7]* 参照）である．

$Z'_\lambda(1^n)=\prod_{(i,j)\in\lambda}(2n-2i+j+1)$ である．

例 3.3.

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{C\,II}}(\sigma_{(1^2)};a,b)=\frac{(a-b)^2(2n-1)-n}{n(2n+1)(n-1)}.$$
$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{C\,II}}(\sigma_{(2)};a,b)=\frac{4ab}{n(2n+1)(n-1)}.$$

注意 3.2. $\lambda\vdash k$ とし，$J_\lambda^{(\alpha)}$ をパラメータ $\alpha>0$ の Jack 多項式とする [7, Chapter VI.10]. このとき

$$J_\lambda^{(1)}=\frac{k!}{f^\lambda}s_\lambda,\qquad J_\lambda^{(2)}=Z_\lambda,\qquad J_\lambda^{(1/2)}=2^{-k}Z'_\lambda.$$

3.4 BdG class (D III, C I)

D III 型対称空間 $\mathrm{O}(2n)/\mathrm{U}(n)$ を考える．Cartan 対合は $\Omega(g)=(g^{\mathrm{D}})^{-1}$ で，$\{g\in\mathrm{O}(2n)\mid\Omega(g)=g\}=\mathrm{O}(2n)\cap\mathrm{Sp}(2n)\cong\mathrm{U}(n)$ となる．R を Haar 測度に従う $2n\times2n$ 直交行列とするとき，D III 型ランダム行列は $V=V^{\mathrm{D\,III}}=RR^{\mathrm{D}}$ である．

定理 3.6 ([12]). V を上のように定め，$\hat{V}=(\hat{v}_{ij})_{1\le i,j\le 2n}=VJ$ を考える．添え字の列 $\boldsymbol{i}=(i_1,\dots,i_{2k})$ に対し，k が奇数ならば $\mathbb{E}[\hat{v}_{i_1i_2}\hat{v}_{i_3i_4}\cdots\hat{v}_{i_{2k-1}i_{2k}}]=0$ である．k が偶数のとき，$k=2m$ と書くと，

$$\mathbb{E}[\hat{v}_{i_1i_2}\hat{v}_{i_3i_4}\cdots\hat{v}_{i_{4m-1}i_{4m}}]=\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{M}_{4m}}\Delta_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{i})\mathrm{Wg}^{\mathrm{D\,III}}(\mathfrak{p};n).$$

Weingarten 関数 $\mathrm{Wg}^{\mathrm{D\,III}}(\sigma;n)$ は S_{4m} 上の関数であり，

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{D\,III}}(\zeta\sigma\zeta';n)=\epsilon(\zeta)\mathrm{Wg}^{\mathrm{D\,III}}(\sigma;n)\qquad(\sigma\in S_{4m},\ \zeta,\zeta'\in H_{2m})\tag{3.1}$$

を満たす.（この関数については，*Appendix* で詳しく述べる.）

最後にC I型対称空間$\mathrm{Sp}(2n)/\mathrm{U}(n)$を考える．Cartan対合は$\Omega(g)=I'_{nn}gI'_{nn}$で，$\{g\in \mathrm{Sp}(2n)\mid \Omega(g)=g\}=\{\left(\begin{smallmatrix} h & 0 \\ 0 & \bar{h}\end{smallmatrix}\right)\mid h\in \mathrm{U}(n)\}\cong \mathrm{U}(n)$となる．$S$をHaar測度に従う$2n\times 2n$斜交行列とするとき，D III型ランダム行列は$V=V^{\mathrm{D\,III}}=SI'_{nn}S^{\mathrm{D}}I'_{nn}$である．$V$の代わりに$W=VI'_{nn}=SI'_{nn}S^{\mathrm{D}}$を考える．

定理 3.7 ([12]). Wを上のように定め，$\hat{W}=(\hat{w}_{ij})_{1\le i,j\le 2n}=WJ$を考える．添え字の列$\boldsymbol{i}=(i_1,\dots,i_{2k})$に対し，$k$が奇数ならば$\mathbb{E}[\hat{w}_{i_1i_2}\hat{w}_{i_3i_4}\cdots\hat{w}_{i_{2k-1}i_{2k}}]=0$である．$k$が偶数のとき，$k=2m$と書くと，

$$\mathbb{E}[\hat{w}_{i_1i_2}\hat{w}_{i_3i_4}\cdots\hat{w}_{i_{4m-1}i_{4m}}]=\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{M}_{4m}}\Delta'_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{i})\mathrm{Wg}^{\mathrm{C\,I}}(\mathfrak{p};n).$$

*Weingarten*関数$\mathrm{Wg}^{\mathrm{C\,I}}(\sigma;n)$は$S_{4m}$上の関数であり，

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{C\,I}}(\zeta\sigma\zeta';n)=\epsilon(\zeta')\mathrm{Wg}^{\mathrm{D\,III}}(\sigma;n)\qquad(\sigma\in S_{4m},\ \zeta,\zeta'\in H_{2m}) \tag{3.2}$$

を満たす.（この関数については，*Appendix*で詳しく述べる.）

(3.1)または(3.2)のような式を満たす関数を，bispherical functionsと呼ぶ．D III型とC I型 の2つのWeingarten関数の扱いは，論文[12]では不十分だったので，Appendixで詳しく議論する．

参考文献

[1] E. Cartan, Sur certaines formes Riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple (French), Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **44** (1927), 345–467.

[2] B. Collins, Moments and cumulants of polynomial random variables on unitary groups, the Itzykson-Zuber integral, and free probability, Int. Math. Res. Not. (2003), no. 17, 953–982.

[3] B. Collins and S. Matsumoto, On some properties of orthogonal Weingarten functions, J. Mathematical Phys. **50** (2009), no. 11, 113516, 14 pp.

[4] B. Collins, S. Matsumoto, and N. Saad, Integration of invariant matrices and moments of inverses of Ginibre and Wishart matrices, arXiv:1205.0956, to appear in J. Multivariate Analysis.

[5] B. Collins and P. Śniady, Integration with respect to the Haar measure on unitary, orthogonal and symplectic group, Comm. Math. Phys. **264** (2006), no. 3, 773–795.

[6] P. J. Forrester, Log-gases and random matrices, London Mathematical Society Monographs Series **34**, Princeton University Press, 2010.

[7] I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, second ed., Oxford University Press, Oxford, 1995.

[8] S. Matsumoto, Jucys-Murphy elements, orthogonal matrix integrals, and Jack measures, Ramanujan J. **26** (2011), no. 1, 69–107.

[9] S. Matsumoto, General moments of the inverse real Wishart distribution and orthogonal Weingarten functions, J. Theor. Prob. **25** (2012), no. 3, 798–822.

[10] S. Matsumoto, General moments of matrix elements from circular orthogonal ensembles, Random Matrices: Theory Appl. **1** (2012), no. 3, 1250005, 18 pages.

[11] S. Matsumoto, Moments of a single entry of circular orthogonal ensembles and Weingarten calculus, Let. Math. Phys. **103** (2013), 113–130.

[12] S. Matsumoto, Weingarten calculus for matrix ensembles associated with compact symmetric spaces, Random Matrices: Theory Appl. **2** (2013), no. 2, 1350001, 26 pages.

[13] 松本, Jucys-Murphy 元を変数とする対称関数, 数理解析研究所講究録 no. 1770 (2011), 35–51.

[14] 松本, 直交群の Weingarten 関数と帯多項式, 数理解析研究所講究録 別冊 B36 (2012), 113–129.

[15] S. Matsumoto and J. Novak, Jucys-Murphy elements and unitary matrix integrals, International Mathematics Research Notices (2013), no. 2, 362–397.

[16] J. Novak, Jucys-Murphy elements and the unitary Weingarten function, Banach Center Publications **89** (2010), 231–235.

[17] D. Weingarten, Asymptotic behavior of group integrals in the limit of infinite rank, J. Mathematical Phys. **19** (1978), no. 5, 999–1001.

A Remarks on Weingarten functions for BdG classes

A.1 Introduction

Weingarten calculus is a method for computations of moments of matrix elements from Haar-distributed unitary, orthogonal, or symplectic random matrices. In a recent work [M], we extended these methods to random matrices associated with classical compact symmetric spaces. Cartan classified those spaces into seven infinite series labeled by A I, A II, A III, BD I, C I, C II, and D III. In Weingarten calculus for each class $\mathcal{C}$ with $\mathcal{C} =$ A I, A II, ..., we introduced a function $\mathrm{Wg}^{\mathcal{C}}$ on symmetric groups, called the Weingarten function for class $\mathcal{C}$.

The Weingarten functions have explicit Fourier expansions. In fact, the Weingarten functions for class A III and unitary groups are linear combinations of irreducible characters for symmetric groups. Similarly, those for classes A I, BD I and orthogonal groups are given in terms of spherical functions for the Gelfand pair (S_{2k}, H_k), whereas those for classes A II, C II and symplectic groups are done by twisted spherical functions for the twisted Gelfand pair (S_{2k}, H_k, ϵ). Here H_k is the hyperoctahedral subgroup in the symmetric group S_{2k}. However, in the paper [M] we could not give such expressions for BdG classes — D III and C I.

The purpose in this note is to establish new Fourier expansions for the remaining two Weingarten functions. They essentially coincide with the Weingarten function for unitary groups. Our tool is the theory of bispherical functions developed by Ivanov [I]. [1] Throughout this note, we employ notations in [M].

A.2 Bispherical functions

We review the theory of bispherical functions developed in [I]. Let m be a positive integer. Consider the symmetric group S_{2k} and hyperoctahedral subgroup H_k with $k = 2m$. We denote by $\mathcal{H}_m$ the $\mathbb{C}$-vector space consisting of all complex-valued functions on S_{4m} with property

$$f(\zeta\sigma\zeta') = \epsilon(\zeta)f(\sigma) \qquad \text{for all } \sigma \in S_{4m} \text{ and } \zeta, \zeta' \in H_{2m}. \tag{A.1}$$

Here ϵ is the signature function on S_{4m}.

For each partition λ of m, we define the function ϑ^λ in $\mathcal{H}_m$ as follows. By virtue of the property (A.1), it is sufficient to determine the values of ϑ^λ at σ_μ ($\mu \vdash 2m$), where σ_μ is the canonical permutation in S_{4m} of coset-type μ (see the definition in [M, §2.2.1]). We now set

$$\vartheta^\lambda(\sigma_\mu) = \begin{cases} 2^{\ell(\nu)}\chi^\lambda_\nu & \text{if } \mu = 2\nu \text{ with some } \nu \vdash m, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{A.2}$$

Here χ^λ_ν is the character value of S_m. We call the function ϑ^λ a *bispherical function.*

[1] The author would like to thank Pablo Diaz for telling me about Ivanov's paper [I].

Lemma A.1 ([I]). *The family $(\vartheta^\lambda)_{\lambda\vdash m}$ forms a linear basis of $\mathcal{H}_m$.*

We need convolution products of ϑ^λ with irreducible characters χ^μ, zonal spherical functions ω^ρ, and twisted spherical functions π^ρ.

Lemma A.2. *Let $\lambda \vdash m$, $\mu \vdash 4m$, and $\rho \vdash 2m$. Then*

1.
$$\chi^\mu * \vartheta^\lambda = \vartheta^\lambda * \chi^\mu = \begin{cases} \frac{(4m)!}{f^{2\lambda\cup 2\lambda}}\vartheta^\lambda & \text{if } \mu = 2\lambda \cup 2\lambda, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

2. $\vartheta^\lambda * \omega^\rho = \vartheta^\lambda * \chi^{2\rho}$ *and* $\pi^\rho * \vartheta^\lambda = \chi^{\rho\cup\rho} * \vartheta^\lambda$.

Proof. The bispherical function ϑ^λ is a matrix element of the irreducible representation of S_{4m} associated with $2\lambda \cup 2\lambda$ (see [I, §1]), whereas the irreducible character χ^μ is the trace of a representation matrix associated with μ. Therefore the first claim follows from the orthogonality relations for matrix elements (see, e.g., [CST, Lemma 1.5.7 (ii)]).

Under the identification between the functional algebra $L(S_{4m})$ and the group algebra $\mathbb{C}[S_{4m}]$, the element ϑ^λ in $\mathcal{H}_m$ is of the form $e_m^- t_\lambda e_m^+$ with some $t_\lambda \in \mathbb{C}[S_{4m}]$, where

$$e_m^+ = \frac{1}{|H_{2m}|}\sum_{\zeta\in H_{2m}} \zeta \qquad \text{and} \qquad e_m^- = \frac{1}{|H_{2m}|}\sum_{\zeta\in H_{2m}} \epsilon(\zeta)\zeta.$$

Spherical functions are by definition $\omega^\rho = \chi^{2\rho}e_m^+$ and $\pi^\lambda = \chi^{\rho\cup\rho}e_m^-$. Since e_m^+ and e_m^- are idempotents, we obtain the second claim. □

We also need a mirror-symmetric version of $\mathcal{H}_m$. Denote by $\tilde{\mathcal{H}}_m$ the $\mathbb{C}$-vector space consisting of all complex-valued functions on S_{4m} with property

$$f(\zeta\sigma\zeta') = \epsilon(\zeta')f(\sigma) \qquad \text{for all } \sigma \in S_{4m} \text{ and } \zeta, \zeta' \in H_{2m}.$$

Let $\mathcal{I}_m$ be the anti-isomorphism of $L(S_{4m})$ defined by

$$[\mathcal{I}(f)](\sigma) = f(\sigma^{-1}) \qquad (f \in L(S_{4m}), \quad \sigma \in S_{4m}).$$

This gives a bijection from $\mathcal{H}_m$ to $\tilde{\mathcal{H}}_m$. For each partition $\lambda \vdash m$, denote by $\tilde{\vartheta}^\lambda$ the image of ϑ^λ under $\mathcal{I}_m$.

Lemma A.3. $\tilde{\vartheta}^\lambda(\sigma_{2\nu}) = (-2)^{\ell(\nu)}\chi^\lambda_\nu$ *for all* $\lambda, \nu \vdash m$.

Proof. From Lemma A.4 below, $\tilde{\vartheta}^\lambda(\sigma_{2\nu}) = \vartheta(\sigma_{2\nu}^{-1}) = (-1)^{\ell(\nu)}\vartheta^\lambda(\sigma_{2\nu}) = (-1)^{\ell(\nu)}2^{\ell(\nu)}\chi^\lambda_\nu$. □

Lemma A.4. *Let $\mu \vdash k$. There exist x and y in H_k with $\sigma_\mu^{-1} = x\sigma_\mu y$ and $\epsilon(x) = \epsilon(y) = (-1)^{\ell(\mu)}$.*

Proof. It is sufficient to prove existences $x, y \in H_k$ satisfying $\sigma_{(k)}^{-1} = x\sigma_{(k)}y$ with $\epsilon(x) = \epsilon(y) = -1$. We can take $x = (1,2)$ and $y = (1,2)(1,3,\dots,2k-1)(2,4,\dots,2k)$. In fact,

$$x\sigma_{(k)}y = x\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2k-1 & 2k \\ 1 & 2k & 2 & 3 & \cdots & 2k-2 & 2k-1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2k-1 & 2k \\ 1 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 2k & 2 \end{pmatrix},$$

which equals $\sigma_{(k)}^{-1}$. □

Lemma A.5. $\tilde{\vartheta}^\lambda * \pi^\rho = \delta_{\rho,2\lambda}\frac{(4m)!}{f^{2\lambda\cup 2\lambda}}\tilde{\vartheta}^\lambda$ *for all* $\lambda \vdash m$ *and* $\rho \vdash 2m$.

Proof. We can see that $\mathcal{I}_m(\pi^\rho) = \pi^\rho$. In fact, it follows from Lemma A.4 that $\pi^\rho(\sigma_\mu^{-1}) = \pi^\rho(\sigma_\mu)$ for each $\mu \vdash 2m$. Therefore $\tilde{\vartheta}^\lambda * \pi^\rho = \mathcal{I}(\pi^\rho * \vartheta^\lambda)$. The result follows from Lemma A.2. □

A.3 Weingarten functions for class D III

Recall the Weingarten function for class D III given in [M, §5.1]. Define the element $T_n^{\mathrm{D\,III}}$ in $\mathcal{H}_m$ by

$$T_n^{\mathrm{D\,III}}(\sigma_{2\nu}) = (-1)^m(2n)^{\ell(\nu)} \qquad (\nu \vdash m).$$

We remark that the definition in [M] has a slight mistake. The Weingarten function $\mathrm{Wg}^{\mathrm{D\,III}}$ is defined by the convolution product of $T_n^{\mathrm{D\,III}}$ with the orthogonal Weingarten function $\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\cdot;2n)$ in $L(S_{4m})$.

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{D\,III}}(\cdot;n) = \frac{1}{|H_{2m}|}T_n^{\mathrm{D\,III}} * \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\cdot;2n).$$

Proposition A.6. *The Weingarten function* $\mathrm{Wg}^{\mathrm{D\,III}}(\cdot;n)$ *on* S_{4m} *belongs to* $\mathcal{H}_m$ *and has the expansion*

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{D\,III}}(\cdot;n) = \frac{(-1)^m}{2^{2m}m!}\sum_{\lambda\vdash m}\frac{f^\lambda}{C_\lambda(n-\frac{1}{2})}\vartheta^\lambda.$$

In particular, for any $\nu \vdash m$,

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{D\,III}}(\sigma_{2\nu};n) = \frac{(-1)^m}{2^{2m-\ell(\nu)}m!}\sum_{\lambda\vdash m}\frac{f^\lambda\chi_\nu^\lambda}{C_\lambda(n-\frac{1}{2})} = \frac{(-1)^m}{2^{2m-\ell(\nu)}}\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}\left(\nu;n-\tfrac{1}{2}\right).$$

Here $\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\nu;z)$ *is the value of the unitary Weingarten function* $\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\cdot;z)$ *at a permutation of cycle-type* ν.

Proof. Recall the identity $n^{\ell(\nu)} = \frac{1}{m!}\sum_{\lambda\vdash m}f^\lambda C_\lambda(n)\chi_\nu^\lambda$, given in, e.g., [M, §2.1.2]. This gives

$$T_n^{\mathrm{D\,III}}(\sigma_{2\nu}) = \frac{(-1)^m2^{\ell(\nu)}}{m!}\sum_{\lambda\vdash m}f^\lambda C_\lambda(n)\chi_\nu^\lambda = \frac{(-1)^m}{m!}\sum_{\lambda\vdash m}f^\lambda C_\lambda(n)\vartheta^\lambda(\sigma_{2\nu}).$$

Equivalently, $T_n^{\mathrm{D\,III}} = \frac{(-1)^m}{m!}\sum_{\lambda\vdash m} f^\lambda C_\lambda(n)\vartheta^\lambda$. Combining this with the expression $\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\cdot;2n) = \frac{|H_{2m}|}{|S_{4m}|}\sum_{\rho\vdash 2m}\frac{f^{2\rho}}{D_\rho(2n)}\omega^\lambda$ (see [M, §2.2.2]), we have

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{D\,III}}(\cdot;n) = \frac{(-1)^m}{m!\,(4m)!}\sum_{\lambda\vdash m} f^\lambda C_\lambda(n)\sum_{\rho\vdash 2m}\frac{f^{2\rho}}{D_\rho(2n)}(\vartheta^\lambda * \omega^\rho).$$

Lemma A.2 implies that $\vartheta^\lambda * \omega^\rho = \chi^{2\rho} * \vartheta^\lambda = \delta_{\rho,\lambda\cup\lambda}\frac{(4m)!}{f^{2\lambda\cup 2\lambda}}\vartheta^\lambda$. Since

$$\frac{C_\lambda(n)}{D_{\lambda\cup\lambda}(2n)} = \prod_{(i,j)\in\lambda}\frac{n+j-i}{(2n+2j-(2i-1)-1)(2n+2j-2i-1)} = \frac{1}{2^{2m}C_\lambda(n-\frac{1}{2})},$$

we obtain the first identity. The second identity follows from the definition of unitary Weingarten functions (see [M, (2.1)]). □

Example A.1. Using values of unitary Weingarten functions (see, e.g., [M, Example 2.1]), we have

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{D\,III}}(\sigma_{(2)};n) = \frac{-1}{2}\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}((1);n-\tfrac{1}{2}) = \frac{-1}{2(n-\frac{1}{2})} = \frac{-1}{2n-1}.$$
$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{D\,III}}(\sigma_{(2,2)};n) = \frac{1}{2^2}\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}((1,1);n-\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4(n+\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})} = \frac{1}{(2n+1)(2n-3)}.$$
$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{D\,III}}(\sigma_{(4)};n) = \frac{1}{2^3}\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}((2);n-\tfrac{1}{2}) = \frac{-1}{8(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})} = \frac{-1}{(2n-1)(2n+1)(2n-3)}.$$

A.4 Weingarten functions for class C I

The discussion is parallel to the one given in the previous subsection. Define the element $T_n^{\mathrm{C\,I}}$ in $\tilde{\mathcal{H}}_m$ by

$$T_n^{\mathrm{C\,I}}(\sigma_{2\nu}) = (-2n)^{\ell(\nu)} \qquad (\nu\vdash m).$$

The Weingarten function for class C I (see [M, §5.2]) is

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{C\,I}}(\cdot;n) = \frac{1}{|H_{2m}|}T_n^{\mathrm{C\,I}} * \mathrm{Wg}^{\mathrm{Sp}}(\cdot;n).$$

Here $\mathrm{Wg}^{\mathrm{Sp}}(\cdot;n)$ is the symplectic Weingarten function (see [M, (2.8)]).

Proposition A.7. *The Weingarten function* $\mathrm{Wg}^{\mathrm{C\,I}}(\cdot;n)$ *on* S_{4m} *belongs to* $\tilde{\mathcal{H}}_m$ *and has the expansion*

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{C\,I}}(\cdot;n) = \frac{1}{2^{2m}m!}\sum_{\lambda\vdash m}\frac{f^\lambda}{C_\lambda(n+\frac{1}{2})}\tilde{\vartheta}^\lambda.$$

In particular, for any $\nu \vdash m$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Wg}^{\mathrm{CI}}(\sigma_{2\nu};n) = \frac{(-1)^{\ell(\nu)}}{2^{2m-\ell(\nu)}m!}\sum_{\lambda\vdash m}\frac{f^\lambda \chi^\lambda_\nu}{C_\lambda(n+\frac{1}{2})} &= \frac{(-1)^{\ell(\nu)}}{2^{2m-\ell(\nu)}}\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}\left(\nu; n+\tfrac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2^{2m-\ell(\nu)}}\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}\left(\nu; -n-\tfrac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Proof. As in the proof of Proposition A.6, we see

$$T_n^{\mathrm{CI}}(\sigma_{2\nu}) = \frac{(-2)^{\ell(\nu)}}{m!}\sum_{\lambda\vdash m} f^\lambda C_\lambda(n)\chi^\lambda_\nu.$$

It follows from Lemma A.3 that $T_n^{\mathrm{CI}} = \frac{1}{m!}\sum_{\lambda\vdash m} f^\lambda C_\lambda(n)\tilde{\vartheta}^\lambda$. Using this and Lemma A.5,

$$\begin{aligned}\mathrm{Wg}^{\mathrm{CI}}(\cdot;n) &= \frac{1}{|H_{2m}|}\frac{1}{m!}\sum_{\lambda\vdash m} f^\lambda C_\lambda(n)\frac{|H_{2m}|}{|S_{4m}|}\sum_{\rho\vdash 2m}\frac{f^{\rho\cup\rho}}{D'_\rho(n)}(\tilde{\vartheta}^\lambda * \pi^\rho)\\ &= \frac{1}{m!}\sum_{\lambda\vdash m} f^\lambda \frac{C_\lambda(n)}{D'_{2\lambda}(n)}\tilde{\vartheta}^\lambda.\end{aligned}$$

The result follows since

$$\frac{C_\lambda(n)}{D'_{2\lambda}(n)} = \prod_{(i,j)\in\lambda}\frac{n+j-i}{(2n-2i+(2j-1)+1)(2n-2i+2j+1)} = \frac{1}{2^{2m}C_\lambda(n+\frac{1}{2})}.$$

Note the identity $\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\nu;z) = (-1)^{\ell(\nu)}\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\nu;-z)$. □

Example A.2.

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{CI}}(\sigma_{(2)};n) = \frac{1}{2}\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}((1);-n-\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2(-n-\frac{1}{2})} = \frac{-1}{2n+1}.$$

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{CI}}(\sigma_{(2,2)};n) = \frac{1}{2^2}\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}((1,1);-n-\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4(-n+\frac{1}{2})(-n-\frac{3}{2})} = \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Wg}^{\mathrm{CI}}(\sigma_{(4)};n) &= \frac{1}{2^3}\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}((2,2);-n-\tfrac{1}{2}) = \frac{-1}{8(-n-\frac{1}{2})(-n+\frac{1}{2})(-n-\frac{3}{2})}\\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n-1)(2n+3)}.\end{aligned}$$

References

[CST] T. Ceccherini-Silberstein, F. Scarabotti, and F. Tolli, Representation theory of the symmetric groups. The Okounkov-Vershik approach, character formulas, and partition algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 121. Cambridge University Press, 2010.

[I] V. N. Ivanov, Bispherical functions on a symmetric group that are associated with the hyperoctahedral subgroup. Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **240** (1997), Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 2, 96–114, 292; translation in J. Math. Sci. (New York) **96** (1999), no. 5, 3505–3516.

[M] S. Matsumoto, Weingarten calculus for matrix ensembles associated with compact symmetric spaces. Random Matrices: Theory Appl. **2** (2013), no. 2, 1350001, 26 pages.