数理解析研究所講究録
第1946巻 2015年 231-238



# 離散非線形Schrödinger方程式における局在周期解の存在証明

NTTコミュニケーション科学基礎研究所　吉村 和之 (Kazuyuki Yoshimura)
NTT Communication Science Laboratories

**概要**

離散非線形Schrödinger方程式において，サイト間結合係数がゼロの極限としてAnti-Integrable極限が定義される．この極限では，有限個のサイトのみ励起しているような自明な局在周期解が無限個存在する．十分に小さな結合係数に対し，任意の自明解は延長可能であり，延長により得られる局在周期解が存在することがこれまでに証明されている．本研究では，必ずしも小さくない結合係数の場合を扱い，その場合にも自明解の延長による局在周期解が存在することをBanachの不動点定理を用いて証明した．

## 1 はじめに

空間的離散性を有する非線形力学系において，空間的に局在した振動モードが存在し得ることがTakenoらにより最初に指摘された [1, 2]. この局在モードは，系の運動方程式の局在周期解であり，Discrete Breather (DB)，または，Intrinsic Localized Modeと呼ばれている．DBは，現実の物理系における普遍的な励起構造の一つであると考えられており，ジョセフソン結合素子系 [3, 4]，非線形光導波路アレイ [5]，カンチレバーアレイ [6, 7] 等において実験的にも観測されている．DBに関して詳しくは，例えば，解説 [8, 9, 10, 11, 12, 13] を参照されたい．

離散非線形Schrödinger (DNLS)方程式は，種々の物理現象を記述する重要な方程式の一つである (e.g., [14, 15])．$d$次元DNLS方程式は，以下の常微分方程式系により定義される．

$$i\dot{\psi}_n + \kappa(\Delta\psi)_n + \gamma|\psi_n|^2\psi_n = 0 \tag{1}$$

ここで，$n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\psi_n \in \mathbb{C}$, $\kappa \geq 0$, $\gamma = \pm 1$である．作用素$\Delta$は，$d$次元正方格子上の離散ラプラシアンであり，次式で定義される．

$$(\Delta\psi)_n = \sum_{j=1}^{d} \left(\psi_{n+e_j} + \psi_{n-e_j} - 2\psi_n\right) \tag{2}$$

ここで，$\{e_1, \dots, e_d\}$は，$\mathbb{Z}^d$の標準基底ベクトルを表す．なお，$\gamma = +1$と$-1$の場合は，それぞれ，focusing caseおよびdefocusing caseと呼ばれる．

本稿では，以下のような形を持つ(1)式の局在周期解の存在を論じる．

$$\psi_n(t) = \phi_n \exp(i\omega t) \tag{3}$$

式中で，定数$\omega \in \mathbb{R}$は周波数，$\phi_n$は時間変数$t$に依存しないサイト$n$の振幅を表す．以下では，$\phi_n$が実数であり，かつ，局在条件$|\phi_n| \to 0$, $|n| = \sum_{j=1}^{d} |n_j| \to +\infty$を満たすような(3)式の形を持つ解の存在を議論する．このような局在周期解は，DNLS方程式の文脈では，Discrete Soliton (DS)解とも呼ばれる．

離散力学系における局在周期解について解析を行う際に有用な概念として，Anti-Integrable (AI)極限が知られている．AI極限は，標準写像におけるカオス軌道を解析するために導入され[16]，その後DB解の研究に適用されている．非線形Klein-Gordon格子やdiatomic Fermi-Pasta-Ulam格子におけるAI極限近傍でのDB解の存在証明[17, 18]や，それらDB解の安定性解析[19, 20, 21, 22, 23, 24]の研究がなされている．DNLS方程式(1)に対しても，結合係数$\kappa$が$\kappa = 0$となる極限としてAI極限が定義される．この極限で，有限個の$n$に対し$\psi_n \neq 0$で他は$\psi_n = 0$であるような自明な局在周期解が無限個存在する．それら自明な解を，Anti-Integrable (AI)解と呼ぶ．任意のAI解に対し，結合係数$\kappa$が十分小さいとき，それから一意的に延長される局在周期解（DS解）の存在が陰関数定理を用いて証明される[17]．しかしながら，全てのAI解の一意的延長が可能であるような$\kappa$の上限を$\kappa_c$とするとき，陰関数定理による証明では$\kappa_c$に対する陽な評価が得られない．これまでに，$d=1$の場合に限り，$\kappa_c$の下界$\kappa_c^*$が与えられており，少なくとも$0 \leq \kappa \leq \kappa_c^*$の範囲で全てのAI解の一意的延長が可能であることが示されている[25]．$d \geq 2$の場合については，AI解の一意延長可能区間に対する評価は全く与えられていない．この意味で，AI解からの一意延長解に相当するDS解の存在証明は，$d \geq 2$のとき十分弱い結合の場合に限られている．

本研究では任意の次元$d$について$\kappa_c$の下界評価を与え，非弱結合DNLS方程式におけるDS解の存在定理を与える．さらに，$d=1$の場合については，文献[25]で与えられた下界$\kappa_c^*$と比較して大幅に改良された下界を与える．証明には，縮小写像に関するBanachの不動点定理を用いる．DS解の存在証明へのBanachの不動点定理の応用は，Chongらによっても行われているが，AI解の一意延長可能区間に対する評価は与えられていない[26]．本研究では，文献[26]とは異なる不動点問題への定式化を行い，そのことにより一意延長可能区間に対する良い評価を与える．加えて，本研究で提案するアプローチは，DS解のプロファイルを定量的に精度良く評価できる利点も備えている．また，DNLS方程式におけるDS解以外の局在周期解として，Dark Discrete Soliton解やDiscrete Vortex解が知られている(e.g., [14, 15])．提案アプローチは，それらの局在周期解の存在証明にも有効な適用範囲の広いものであると考えられる．

以下では，2節で定常DNLS方程式とそのAI極限，および，AI解を説明し，3節でDS解の存在定理を示す．4節で，不動点問題への定式化と定理証明の概略について述べる．

## 2 定常DNLS方程式とAnti-Integrable極限

(3)式をDNLS方程式(1)に代入すると，振幅$\phi_n \in \mathbb{R}$に関する以下の連立代数方程式系が得られる．

$$-\omega\phi_n + \kappa(\Delta\phi)_n + \gamma\phi_n^3 = 0, \quad n \in \mathbb{Z}^d \tag{4}$$

(4)式を定常DNLS方程式と呼ぶ．DS解は，局在条件$\phi_n \to 0$, $|n| \to \infty$を満たす(4)式の解である．ただし，$|n| = \sum_{j=1}^{d} |n_j|$である．

DNLS 方程式 (1) のフォノンバンドは，$-4d\kappa \leq \omega \leq 0$ で与えられる．上記のような DS 解は，フォノンバンドの外側の周波数 $\omega$ に対して存在すると期待される．$\gamma = +1, \omega > 0$ に対する (4) 式の解と，$\gamma = -1, \omega < -4d\kappa$ に対する解は，互いに密接に対応している．$\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ が周波数 $\omega = \omega_0 > 0$ に対する $\gamma = +1$ の場合の解ならば，周波数 $\omega = -4d\kappa - \omega_0$ に対する $\gamma = -1$ の場合の解が $\{(-1)^{|n|}\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ で与えられる．この一対一対応により，$\gamma = +1$ もしくは $\gamma = -1$ のいずれかの場合のみを考察すれば十分であることが分かる．以下では，$\gamma = +1$ の場合を取り扱うこととする．この場合，定常 DNLS 方程式 (4) は，$\omega < -4d\kappa$ の範囲では局在解を持ち得ないことが知られている [15]．よって，以下の議論では，$\gamma = +1, \omega > 0$ を仮定する．

(4) 式を簡単化するために，$\phi_n = \sqrt{\mu}\, u_n$ により新変数 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ を定義する．ただし，$\mu = \omega + 2d\kappa$ である．(4) 式で $\gamma = +1$ を仮定し $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ を用いて書き換えると以下の方程式を得る．

$$u_n - u_n^3 = \varepsilon \sum_{j=1}^{d} \left(u_{n+e_j} + u_{n-e_j}\right), \quad n \in \mathbb{Z}^d \tag{5}$$

ここで，$\varepsilon$ は $\varepsilon = \kappa/\mu$ により定義されるパラメータである．以後、定常 DNLS 方程式として，(4) 式の代わりに (5) 式を用いる．(5) 式の AI 極限は $\varepsilon = 0$ で定義され，このとき次式で与えられる無限個の AI 解が存在する．

$$u_n = \sigma_n, \quad \sigma_n \in \{0, \pm 1\} \tag{6}$$

各サイト $n$ に対する振幅 $u_n$ は独立に定めることができ，$u_n$ は 0 または $\pm 1$ の値を取る．(6) 式は，任意の AI 解 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ が，コード列 $\sigma \equiv \{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ により指定されることを示している．非ゼロ成分が有限個のコード列の集合を $\mathcal{S}$ で表す．すなわち，$\mathcal{S} \equiv \{\sigma; \sum_n |\sigma_n| < \infty\}$ である．このとき，各 $\sigma \in \mathcal{S}$ は局在した AI 解を与える．

任意にコード列 $\sigma \in \mathcal{S}$ が与えられたとき，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して，対応する AI 解 (6) から延長される (5) 式の解が一意的に存在することが，陰関数定理を用いて証明される [17]．次節の定理では，必ずしも小さくない $\varepsilon$ に対し AI 解の一意延長が可能であることを述べる．定理の証明には Banach の不動点定理が用いられる．$l^\infty(\mathbb{Z}^d)$ を有界な実数列 $u = \{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ の空間とし，そのノルムを $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{Z}^d} |u_n|$ で定義する．すなわち，

$$l^\infty(\mathbb{Z}^d) \equiv \left\{ u = \{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d};\ \|u\| = \sup_n |u_n| < +\infty \right\}. \tag{7}$$

このとき，$l^\infty(\mathbb{Z}^d)$ は Banach 空間となる．(5) 式を $l^\infty(\mathbb{Z}^d)$ における非線形方程式と考えて解く．

## 3 Discrete Soliton 解の存在定理

コード列 $\sigma \in \mathcal{S}$ が与えられたとき，$\sigma$ において非ゼロ成分を持つサイト番号 $n$ の集合を $A(\sigma)$ で表す．すなわち，$A(\sigma) \equiv \{n; \sigma_n \neq 0\} \subset \mathbb{Z}^d$．$d$ 次元 DNLS 方程式に対する DS 解の存在定理は，以下のように述べられる．

**定理 1.** 定数 $\varepsilon_0, c_0, r_0$ は以下で与えられるとする．

$$\varepsilon_0 = \frac{9\sqrt{65} - 71}{16d}, \quad c_0 = \frac{\sqrt{65} - 7}{4}, \quad r_0 = \frac{1}{10}. \tag{8}$$

任意の $\sigma \in \mathcal{S}$ に対し，$\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ のとき，$\varepsilon$ に関し連続で $u_n(0) = \sigma_n$, $n \in \mathbb{Z}^d$ を満たす (5) 式の解の族 $\{u_n(\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ が一意に存在する．さらに，各 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ に対し，$\{u_n(\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ は以下の評価式を満たす．

$$|u_n(\varepsilon) - \sigma_n| \le \begin{cases} c & \text{if } |n| \le m+1, \\ c\,r^{|n|-m-1} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{9}$$

ただし，$c = c_0\,\varepsilon/\varepsilon_0$, $r = r_0\,\varepsilon/\varepsilon_0$, $m = \max_{n\in A(\sigma)} |n|$ である．

**注 1.** $m$ の定義により，$|n| > m$ に対し $\sigma_n = 0$ となる．したがって，(9) 式の下段の不等式は $|u_n(\varepsilon)| \le c\,r^{|n|-m-1}$ と同値である．$0 \le r < 1$ なので，これはサイト振幅 $u_n(\varepsilon)$ が $|n|$ の増加に従い指数関数的に減少し，局在していることを示している．

定理 1 では，AI 解 $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ を，$\varepsilon > 0$ に対する (5) 式の DS 解の近似解として用いている．より精密な近似解を用いることにより，DS 解 $\{u_n(\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ の存在が保証されるパラメータ $\varepsilon$ の区間評価は改良されると期待される．任意に $\sigma \in \mathcal{S}$ が与えられたとき，1 次元系においては，$\sigma$ に対応する DS 解について AI 解よりも精密な近似解を容易に構成できる．

$d = 1$ の場合を考える．$\sigma \in \mathcal{S}$ は $n = n_1, \ldots, n_m$ に対してのみの非ゼロ成分を持つ，すなわち $A(\sigma) = \{n_1, \ldots, n_m\} \subset \mathbb{Z}$ と仮定する．このとき，以下のような改良された近似解を構成することができる．

$$u_n^* = \begin{cases} \sigma_{n_1}\varepsilon^{n_1-n} & \text{if } n < n_1, \\ \sigma_n + \chi(\sigma_n)(\sigma_{n+1} + \sigma_{n-1})\varepsilon & \text{if } n_1 \le n \le n_m, \\ \sigma_{n_m}\varepsilon^{n-n_m} & \text{if } n > n_m. \end{cases} \tag{10}$$

式中の $\chi(q)$ は整数 $q$ の関数であり，$\chi(q) = (3\delta_{q,0} - 1)/2$ と定義される．ただし，$\delta_{q,0}$ はクロネッカーのデルタを表す．(10) 式の近似解を用いて，下記の 1 次元 DNLS 方程式に対する DS 解の存在定理を得ることができる．

**定理 2.** $d = 1$, $\sigma \in \mathcal{S}$, $A(\sigma) = \{n_1, \ldots, n_m\}$ と仮定する．$\{u_n^*\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を (10) 式で与えられる近似解とする．定数を $\varepsilon_0 = 0.1453$, $c_0 = 0.16$, $r_0 = 0.3$ とする．このとき，区間 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ において，$\varepsilon$ に関し連続で $u_n(0) = \sigma_n$, $n \in \mathbb{Z}$ を満たす (5) 式の解の族 $\{u_n(\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が一意に存在する．さらに，各 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ に対し，$\{u_n(\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は以下の評価式を満たす．

$$|u_n(\varepsilon) - u_n^*| \le \begin{cases} c\,r^{n_1-1-n} & \text{if } n < n_1 - 1, \\ c & \text{if } n_1 - 1 \le n \le n_m + 1, \\ c\,r^{n-(n_m+1)} & \text{if } n > n_m + 1. \end{cases} \tag{11}$$

ただし，$c = c_0\,\varepsilon/\varepsilon_0$, $r = r_0\,\varepsilon/\varepsilon_0$ である．

**注 2.** $\gamma = +1$ のとき，(4) 式における本質的なパラメータは $\alpha \equiv \kappa/\omega$ のみであることが示され，AI 極限は $\alpha = 0$ により定義される．文献 [25] では，全ての AI 解は，少なくとも $\alpha = (3\sqrt{3} - 1)/52 \simeq 0.0807$ まで一意に延長可能であることが証明されている．一方，定理 2 における一意延長可能区間の境界 $\varepsilon_0 = 0.1453$ は $\alpha = 0.2048\cdots$ に相当し，大幅に改良された評価であることが分かる．ま

た，この値は，文献 [25] で数値的に得られた一意延長可能区間の上限値 $\alpha \simeq 0.28958$ に近い値となっている．

## 4 不動点問題の定式化と証明の概略

方程式 (5) を $l^\infty(\mathbb{Z}^d)$ で解く問題を，不動点問題の形に書き直す．まず，(5) 式の近似解 $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d} \in l^\infty(\mathbb{Z}^d)$ で条件 $1-3a_n^3 \neq 0$ を満たすものを取る．近似解 $a$ を用いて，新しい変数 $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ を次式で定義する．

$$u_n = a_n + x_n, \quad n \in \mathbb{Z}^d \tag{12}$$

(12) 式を (5) 式に代入すると，変数 $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ に関する以下の方程式を得る．

$$x_n = \frac{1}{1-3a_n^2}\left[\varepsilon\sum_{j=1}^{d}\left(x_{n+e_j}+x_{n-e_j}\right)+3a_nx_n^2+x_n^3+R_n(a)\right], \quad n\in\mathbb{Z}^d \tag{13}$$

ここで，$R_n(a)$ は次式で与えられる近似解 $a$ に伴う誤差である．

$$R_n(a) = \varepsilon\sum_{j=1}^{d}\left(a_{n+e_j}+a_{n-e_j}\right)+a_n-a_n^3 \tag{14}$$

(13) 式の右辺は，パラメータ $\varepsilon$ に連続的に依存する非線形写像 $F_\varepsilon : l^\infty(\mathbb{Z}^d)\times\mathbb{R}\to l^\infty(\mathbb{Z}^d)$ を定める．この表記の下，(13) 式は以下のように略記される．

$$x = F_\varepsilon x, \quad x \in l^\infty(\mathbb{Z}^d) \tag{15}$$

この式は，方程式 (13) の解が，写像 $F_\varepsilon$ の不動点に他ならないことを示している．

上記の不動点問題の定式化において，$x$ に関して 1 次の項全てを (13) 式の右辺から除くのではなく，係数 $\varepsilon$ を伴う項は右辺に残した．このことにより，写像 $F_\varepsilon$ の陽な表式が得られ，$F_\varepsilon x$ の作用を精度良く評価することが可能となる．本問題の定式化のポイントの一つである．なお，本研究では $\varepsilon=0$ からの AI 解の延長を論じるため，$\varepsilon$ が比較的小さな領域領域を扱う．そのため，上述の様な定式化を行っても $F_\varepsilon$ は縮小写像となり得ることを注意しておく．

本研究では，(5) 式のサイト位置 $|n|$ に関して指数関数的に局在した解の存在証明を目的とする．したがって，(15) 式を解く際に，解の指数関数的局在を保証するような $l^\infty(\mathbb{Z}^d)$ の適切な部分集合を用いる必要がある．与えられた $\sigma\in\mathcal{S}$ に対し，集合 $A(\sigma)$ と定数 $m$ を $A(\sigma)=\{n;\, \sigma_n\neq 0\}\subset\mathbb{Z}^d$，および，$m=\max_{n\in A(\sigma)}|n|$ と定義する．2 つのパラメータ $c$ と $r$ により規定される閉凸部分集合 $B_m(c,r)\in l^\infty(\mathbb{Z}^d)$ を以下のように定義する．

$$B_m(c,r) \equiv \left\{x;\, |x_n|\le c \text{ if } |n|\le m+1,\ |x_n|\le cr^{|n|-m-1} \text{ otherwise}\right\} \tag{16}$$

ただし，$c>0$, $0<r<1$ を満たすとする．この定義より，もし (15) 式が $B_m(c,r)$ 内に解 $x$ を持ち，かつ，近似解 $a$ が指数関数的に局在しているならば，元の方程式 (5) が指数関数的に局在する解を持つことは明らかである．

定理1の証明では，近似解として $a=\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ を用いる．まず，(15) 式を $B_m(c_0,r_0)$ 内で考えてパラメータ依存する写像に関する Banach の不動点定理 (e.g., [27]) を $F_\varepsilon$ に適用し，$\varepsilon$ に関し連続かつ $x(\varepsilon)=0$ を満たす (15) 式の解 $x(\varepsilon)\in B_m(c_0,r_0)$ が，区間 $[0,\varepsilon_0)$ において一意に存在することを示す．これより，同区間において，定常 DNLS 方程式 (5) の $\sigma$ から連続的に一意延長される解 $u(\varepsilon)=\{u_n(\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ の存在が帰結される．

不動点定理を適用するためには，以下の (i)-(iii) の条件が満たされることを示せばよい: (i) 各 $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$ に対し $F_\varepsilon(B_m(c_0,r_0))\subset B_m(c_0,r_0)$; (ii) $\varepsilon$ に依存しない定数 $K\in[0,1)$ が存在し，$F_\varepsilon$ の $x$ に関する Fréchet 微分 $DF_\varepsilon(x)$ が全ての $x\in B_m(c_0,r_0)$ に対し $\|DF_\varepsilon(x)\|\leq K$ を満たす; (iii) $F_\varepsilon$ が $\varepsilon$ に関して連続．条件 (i)-(iii) の内，パラメータに関する連続性条件 (iii) は $F_\varepsilon$ の定義より明らかなので，残りの条件 (i) と (ii) を示せばよい．写像 $F_\varepsilon$ の表式が (13) 式の右辺により陽に与えられているので，初等的な不等式評価により $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$ に対して条件 (i) と (ii) の成立を示すことができる．

上記手順に従い，区間 $[0,\varepsilon_0)$ で (15) 式の解 $x(\varepsilon)\in B_m(c_0,r_0)$ の一意存在が示されたとする．次に，解の波形に関する評価式 (9) を示す．そのためには，任意に $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$ を固定し，方程式 (15) を部分集合 $B_m(c,r)$ 内で考える．ただし，$c=c_0\,\varepsilon/\varepsilon_0$, $r=r_0\,\varepsilon/\varepsilon_0$ である．先と同様に初等的な不等式評価により，固定された $\varepsilon$ に対する写像 $F_\varepsilon$ が $B_m(c,r)$ 上の縮小写像であることを示せる．パラメータ依存しない写像に関する通常の Banach の不動点定理を適用して，$B_m(c,r)$ 内に (15) 式の解 $x^*$ の一意的存在が示される．$B_m(c,r)\subset B_m(c_0,r_0)$ と，$x(\varepsilon)$ の一意性より，$x(\varepsilon)=x^*\in B_m(c,r)$ が得られる．これより，ただちに評価式 (9) が従う．

定理2の証明については，近似解として (10) の $\{u_n^*\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を用いて，同様の議論を行えばよい．

## 参考文献


[1] S. Takeno, K. Kisoda, and A. J. Sievers, "Intrinsic localized vibrational modes in anharmonic crystals: stationary modes," Prog. Theor. Phys. Suppl. **94**, 242–269 (1988).

[2] A. J. Sievers and S. Takeno, "Intrinsic localized modes in anharmonic crystals," Phys. Rev. Lett. **61**, 970–973 (1988).

[3] E. Trias, J. J. Mazo, and T. P. Orlando, "Discrete breathers in nonlinear lattices: Experimental detection in a Josephson array," Phys. Rev. Lett. **84**, 741–744 (2000).

[4] P. Binder, D. Abraimov, A. V. Ustinov, S. Flach, and Y. Zolotaryuk, "Observation of breathers in Josephson ladders," Phys. Rev. Lett. **84**, 745–748 (2000).

[5] H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A. R. Boyd, and J. S. Aitchison, "Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays," Phys. Rev. Lett. **81**, 3383-3386 (1998).

[6] M. Sato, B. E. Hubbard, A. J. Sievers, B. Ilic, D.A. Czaplewski, and H. G. Craighead, "Observation of locked intrinsic localized vibrational modes in a micromechanical oscillator array," Phys. Rev. Lett. **90**, 044102 (2003).

[7] M. Kimura and T. Hikihara, "Coupled cantilever array with tunable on-site nonlinearity and observation of localized oscillations," Phys. Lett. A **373**, 1257–1260 (2009).

[8] 武野 正三, "格子力学と非線形波動," 数理科学 No. 387, 54–61 (1995).

[9] S. Aubry, "Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization," Physica D **103**, 201–250 (1997).

[10] S. Flach and C. Willis, "Discrete breathers," Phys. Rep. **295**, 181–264 (1998).

[11] S. Aubry, "Discrete breathers: localization and transfer of energy in discrete Hamiltonian nonlinear systems," Physica D **216**, 1–30 (2006).

[12] S. Flach and A. V. Gorbach, "Discrete breathers - Advances in theory and applications," Phys. Rep. **467**, 1–116 (2008).

[13] K. Yoshimura, Y. Doi, and M. Kimura, "Localized modes in nonlinear discrete systems," in M. Ohtsu and T. Yatsui (eds.) *Progress in Nanophotonics 3* (New York: Springer-Verlag, 2014).

[14] P. G. Kevrekidis (ed.), *The Discrete Nonlinear Schrödinger Equation: Mathematical Analysis, Numerical Computations and Physical Perspectives* (Berlin: Springer-Verlag, 2009).

[15] D. E. Pelinovsky, *Localization in Periodic Potentials: From Schrödinger Operators to the Gross-Pitaevskii Equation* (Cambridge: Cambridge University Press, 2011).

[16] S. Aubry and G. Abramovich, 1990 "Chaotic trajectories in the standard map: the concept of anti-integrability," Physica D **43**, 199–219 (1990).

[17] R. S. MacKay and S. Aubry, "Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators," Nonlinearity **7**, 1623–1643 (1994).

[18] R. Livi, M. Spicci, and R. S. MacKay, "Breathers on a diatomic FPU chain," Nonlinearity **10**, 1421–1434 (1997).

[19] J. F. R. Archilla, J. Cuevas, B. Sánchez-Rey, and A. Alvarez, "Demonstration of the stability or instability of multibreathers at low coupling," Physica D **180**, 235–255 (2003).

[20] J. Cuevas, J. F. R. Archilla, F. R. Romero, "Effect of the introduction of impurities on the stability properties multibreathers at low coupling," Nonlinearity **18**, 769-790 (2005).

[21] V. Koukouloyannis and P. G. Kevrekidis, "On the stability of multibreathers in Klein-Gordon chains," Nonlinearity **22**, 2269-2285 (2009).

[22] D. Pelinovsky and A. Sakovich, "Multi-site breathers in Klein-Gordon lattices: stability, resonances, and bifurcations," Nonlinearity **25**, 3423–3451 (2012).

[23] K. Yoshimura, "Stability of discrete breathers in nonlinear Klein-Gordon type lattices with pure anharmonic couplings," Journal of Mathematical Physics **53** 102701

[24] K. Yoshimura, "Existence and stability of discrete breathers in diatomic Fermi-Pasta-Ulam type lattices," Nonlinearity **24**, 293–317 (2011).

[25] Alfimov G L, Brazhnyi V A and Konotop V V 2004 On classification of intrinsic localized modes for the discrete nonlinear Schrödinger equation *Physica D* **194** 127–50

[26] Chong C, Pelinovsky D E and G. Schneider 2012 On the validity of the variational approximation in discrete nonlinear Schrödinger equations *Physica D* **241** 115–24

[27] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-Point Teorems* (New York: Springer-Verlag, 1986).