数理解析研究所講究録
第 1946 巻 2015 年 209-216

質量交換を伴う二粒子系—正準形式

富山大・工　角畠　浩 (Hiroshi Kakuhata)
Faculty of Engineering, University of Toyama

1　はじめに

ソリトンが粒子のように振る舞い，ソリトン同士の衝突によって軌道が変化し位相シフトが起こることはよく知られているし [1]，実際，ソリトンを粒子ととらえた Skyrme 模型など原子核や素粒子のモデルとしても用いられている [2]。このような見方にたって，これまでにソリトンを粒子として扱うために，ソリトンの相互作用に類似した相互作用をする二粒子系の振る舞いを調べ，その理論形式を考察してきた [3, 4, 5]。

KdV 方程式など多くのソリトン衝突では振幅を交換することが知られている。例えば，外部磁場中の内部電流を持つストリングの運動を記述する連立非分散方程式 [6, 7]

$$\partial_\tau^2 \boldsymbol{r} - \partial_\sigma^2 \boldsymbol{r} = (\partial_\tau \boldsymbol{r} + \partial_\sigma \boldsymbol{r}) \times (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{r}) \tag{1}$$

のソリトン解は双方向に進行するループソリトンである。ここで，$\boldsymbol{r} = (X, Y, Z)$ はストリングの位置ベクトル，$\boldsymbol{J}$ は一定の外部電流ベクトル，τ は時間，σ はストリングに沿う弧長に対応するパラメータである。それぞれ位相速度 v と $-v$ でソリトンが正面衝突するとき，連立非分散方程式の 2 ソリトン相互作用には，相対速度 $2v$ と振幅の正負に依存して 3 つのパターンがある。

1. 正（負）の振幅同士の衝突のときは，小さい相対速度ではループソリトン同士が重ならず弾くように衝突し，
2. 大きい相対速度では小さいループが大きいループの中を回る。
3. 正と負の振幅の衝突のときには相対速度に関わりなく，小さいループが一時的に消え，このとき大きいループがさらに大きくなる。

このソリトン相互作用におけるソリトンの軌道を解析的に得ることが可能で，ソリトン粒子の加速度を求めると，正（負）の振幅同士では斥力が，正と負の振幅では引力が作用していることがわかる。しかし，質量を一定とする単純な粒子モデルでは，それぞれのソリトン粒子に作用する力の和が 0 にならなず，作用反作用の法則が成立しない [4]。これは現実のソリトンは遠隔作用で相互作用をしないためと考えられ，遠隔作用に基づくポテンシャルでのみ相互作用するような二粒子系では全運動量が保存しないことになる。実際，質量 $m_n (n = 1, 2)$ を定数とするラグランジアン

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{q_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q_2}^2 - U(r) \tag{2}$$

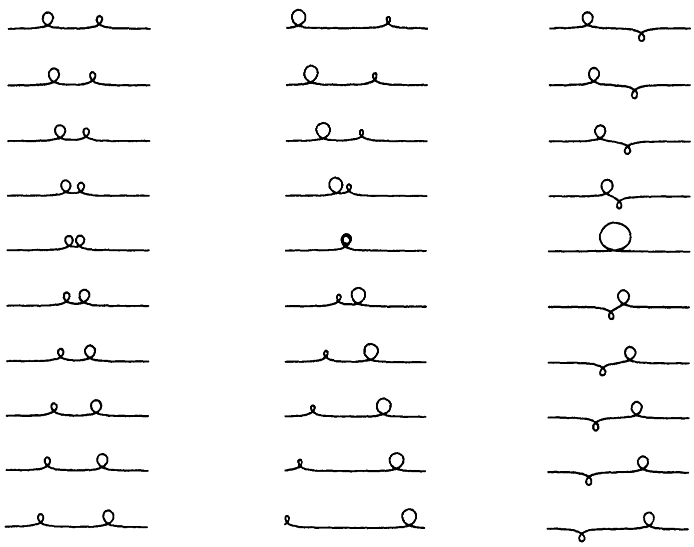

図 1　　$v = 0.12,$　　$v = 0.24,$　　$v = 0.12$

で与えられるモデルでは記述できない。ここで，q_n $(n = 1, 2)$ は各粒子の座標で，記号 "˙" は時間 t による導関数を表し，r は相対座標 $r = q_2 - q_1$ である。従来のソリトン粒子の相互作用の記述ではこの点が十分考慮されていないと思われる [8] 。図 1 の様に，連立非分散方程式のソリトンも衝突する際には振幅を交換する。ソリトン相互作用において Ansatz として振幅を質量と見なせば，ソリトン粒子の衝突は可変質量の粒子に対する 2 体問題になる。しかし質量を交換する粒子系の相互作用はあまり調べられていないようである。

前報において，連立非分散方程式のソリトン衝突の挙動を念頭におきながらも，相互作用中の現実のソリトンの軌道を直接フィットする粒子系のモデルを構成するのではなく，質量を交換しながら相互作用する二粒子系のできるだけ簡単で解析解を持つ toy model の定式化を行い，質量を交換する閉じた 2 体系のモデルを具体的に構成することが可能であることを示した [3]。

本稿では，前報で与えた拘束条件をラグランジアンに組み入れたモデルの正準形式を構成する。以下では，解の挙動には留意せず，力学の形式のみを考察する。次節で質量を交換する二粒子系の概要を述べ，第 3 節で拘束系の正準形式にかかわる Dirac 流の正準形式について記した。第 4 節では質量を交換する二体系の正準形式について述べた。最後にまとめと課題を述べる。

2　質量を交換する二粒子系

本節では，質量を交換する二粒子系の概要を述べる。ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{q_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q_2}^2 - U(r) - V(m) \tag{3}$$

で与えられる系を考える。ここで，$r = q_2 - q_1$ は相対座標，$U(r)$ は粒子間の相互作用ポテンシャル，q_1 と q_2 とともに質量 m_1 と m_2 も力学変数である。ただし $m_n (n = 1, 2)$ の和 M は定数と

して，質量差 $m = m_2 - m_1$ が変数であるとする。 $V(m)$ は

$$V(m) = \frac{1}{M\alpha}\left(\frac{\beta}{2}m^2 - \frac{1}{4}\frac{m^4}{4\alpha}\right) \tag{4}$$

と m の関数であるが m を未定乗数のようにして扱うのでポテンシャルではない。なお，α と β は運動方程式と初期条件から決める未定の定数である。全質量 M，重心座標 Q，換算質量 μ

$$\begin{aligned} M &= m_1 + m_2, \\ Q &= \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{M}, \\ \frac{1}{\mu} &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \end{aligned} \tag{5}$$

をそれぞれ導入すれば，ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}M\left(\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M}r\right)^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - U(r) - V(m)$$

になる。ラグランジアン第 1 項にある $\dot{m}$ は一定質量の場合には現れない項である。Q，r のみならず m についても変分をとると，変分原理により Euler-Lagrange 方程式は

$$\begin{aligned} &M\frac{d}{dt}\left(\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M}r\right) = 0, \\ &\frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) = -\frac{1}{2}\left(\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M}r\right)\dot{m} - \frac{dU}{dr}, \\ &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M}r\right)r\right] = \frac{m}{4M}\dot{r}^2 + \frac{dV}{dm} \end{aligned} \tag{6}$$

で与えられる。重心 Q に対する方程式を積分し，積分定数を P_0 とすれば

$$M\left(\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M}r\right) = P_0$$

となり，これを m の運動方程式に代入して

$$P_0\dot{r} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{2\beta}{\alpha}m - \frac{m^3}{2\alpha^2}$$

を得る。ここで

$$m = \alpha\dot{r}$$

とおけば

$$P_0 = 2\beta$$

を得る。これらを r に対する運動方程式に用いれば，原理的に通常の手順で運動方程式を解くことができる。ポテンシャル $U(r)$ を

$$U(r) = \frac{g_1}{2}\operatorname{sech}^2 r + \frac{g_2}{4}\operatorname{sech}^4 r$$

で与え，g_1 と g_2 が適切な値をとればソリトンの相互作用に類似した二粒子の衝突が記述できることは以前に示した [3]。

正準形式に転換するため，Q, r, m に対する正準運動量を，それぞれ

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = M\left(\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M}r\right),$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r},$$

$$\pi_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{m}} = -\frac{1}{2}\left(\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M}r\right)r$$

と定義する。これらの表式から正準運動量 P と π_m は互いに独立ではなく拘束条件

$$2M\pi_m + Pr = 0 \tag{7}$$

を満たしていることがわかる。このため普通の正準形式を用いることはできない。次節では拘束条件のある系の取り扱いをごく簡略化して述べる。

3 Dirac の処方

今後は時間発展など物理量の間の関係は全て Poisson bracket で与える。また以下では Poisson bracket の convention を

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$$

をとる。さて，拘束条件がある拘束系の力学に対する Dirac の処方について述べよう [9, 10]。ラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ の Hessian が

$$\det\frac{\partial^2 L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = 0$$

のとき，拘束条件

$$\phi_i(p, q) = 0 \tag{8}$$

が存在する。拘束条件に従う相空間の点は相空間の超曲面をつくる。このとき， Poisson bracket は全相空間で定義されるので，この超曲面上で用いることは出来ない。すなわち，Poisson bracket の内部で用いてはならない。そこで

- 全相空間で成立する等式 ： 強等式 (strong equality)

- 超曲面上でのみ成立する等式 ： 弱等式 (weak equality)

$$\phi_i(p, q) \approx 0$$

として，等式を区別する。この区別でいうと拘束条件 (8) は正確には $\phi_i \approx 0$ と記すべきものである。超曲面上では拘束条件が成立しているので，拘束条件を Poisson bracket の外では使ってよい。

ラグランジアンの Legendre 変換で与えられる超曲面上のハミルトニアン

$$H = p_i \dot{q}_i - L|_{(q_i, \dot{q}_i) \to (p_i, q_i)}$$

を拡張して

$$H_T = H + \sum_i u_i \phi_i$$

を全相空間上のハミルトニアン（全ハミルトニアン）とする。ここで u_i は Lagrange 乗数である。拘束条件は時間発展した後にも成立していなければならない。時間発展は全ハミルトニアンとの Poisson bracket で記述されるから，整合性条件

$$\dot{\phi}_i = \{H_T, \phi_i\} \approx 0$$

が成立しなければならない。$\{H_T, \phi_i\} \neq 0$ のとき，概ね以下のように分類される。

1. $\{H_T, \phi_i\} = g(p, q) + u_n h_n(p, q) \approx 0$
2. $\{H_T, \phi_m\} = \chi_m \approx 0$: χ_m は ϕ_i とは独立の拘束条件
3. $\{H_T, \phi_i\} = f(p, q)_{ij} \phi_j \approx 0$

第1の場合には乗数 u_n が決定される。第2の場合には新たな拘束条件 $\chi_m \approx 0$ が得られる。これは2次拘束条件と呼ばれる。2次拘束条件の整合性条件

$$\dot{\chi}_i = \{H_T, \chi_i\} \approx 0$$

からさらに新たな2次拘束条件が得られる場合もある。第3の場合には u_i は全く任意である。

4 質量を交換する二粒子系の正準形式

正準形式を得るため，質量を交換する二粒子系のラグランジアン (3) から，ハミルトニアン

$$H = P\dot{Q} + p\dot{r} + \pi\dot{m} - L = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + U(r) + V(m) \tag{9}$$

に移行する。このハミルトニアン H では m の時間発展を記述できないので，Dirac の処方に従って， Lagrange 乗数 u を導入し，ハミルトニアンとして

$$H_T = H + u\phi = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + U(r) + V(m) + u(2M\pi_m + Pr) \tag{10}$$

を定義する。拘束条件 $\phi = 2M\pi_m + Pr \approx 0$ の整合性条件から

$$\dot{\phi} = \{H_T, \phi\} \approx 0$$

でなければならない。この整合性条件から２次拘束条件として

$$\dot{\phi} = \{H_T, \phi\} = -\frac{m}{2}\frac{p^2}{\mu^2} - 2M\frac{dV}{dm} + P\frac{p}{\mu} \approx 0 \tag{11}$$

を得る。これは Euler-Lagrange 方程式 (6) の第３式，m に対する運動方程式と等価である。２次拘束条件の解の Ansatz として，$P \approx 2\beta$ とおけば，

$$\left(\frac{p}{\mu} - \frac{m}{\alpha}\right)\left[2\beta - \frac{m}{2}\left(\frac{p}{\mu} - \frac{m}{\alpha}\right)\right] \approx 0$$

となるので，２次拘束条件には

$$\begin{aligned} P &= 2\beta, \\ \frac{p}{\mu} &= \frac{m}{\alpha} \end{aligned} \tag{12}$$

なる解があることがわかる。２次拘束条件を

$$\chi = \frac{m}{2}p^2 + 2M\mu^2\frac{dV}{dm} - \mu P p \approx 0 \tag{13}$$

と設定すれば，χ の整合性条件

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \{H_T, \chi\} \\ &= (\mu P - mp)\frac{dU}{dr} + \left(Mp^2 - 4M\mu m\frac{dV}{dm} + M^2\mu^2\frac{d^2V}{dm^2} + \mu P^2\right)u \approx 0 \end{aligned} \tag{14}$$

から Lagrange 乗数 u が決定される。従って，ここで整合性の条件は完結し，これ以上，新たな拘束条件は出てこない。よって，具体的にポテンシャル $U(r)$ を与えれば，Hamilton 方程式

$$\dot{f} = \{H_T, f\}$$

と整合性条件から系の解を決定することができる。ここで f は正準変数で，$f = Q, P, r, p, m, \pi_m$ である。Euler-Lagrange レベルでの状況が正準形式においても実現されていることがわかる。

5 まとめと課題

ソリトン粒子の力学を構成することを目指して，ソリトン相互作用に対応するモデルとして質量を交換しながら相互作用する二粒子系の理論的枠組みを構成した。このため質量を交換する二粒子系を，拘束条件 $2M\pi_m + Pr \approx 0$ を持つ２体問題として正準形式を与えた。このとき全運動量 P とパラメータ β の間の関係および質量 m と相対速度 p/μ の間の関係

$$\begin{aligned} P &= 2\beta, \\ \frac{m}{\alpha} &= \frac{p}{\mu} \end{aligned}$$

を２次拘束条件 $\chi \approx 0$ の解として用いた。

本稿の定式化では拘束条件そのものではなく，２次拘束条件 (13) の特別な解 (12) を用いたため，乗数 u が複雑になってしまった。もちろんこの２次拘束条件 (13) のにはこの他の解もあるので，拘束条件 $m = \alpha\dot{r}$ を明示的にする必要がある。しかし，このモデルで設定したこの拘束条件 $m = \alpha\dot{r}$ は相対速度 $\dot{r}$ を含み， non-holonomic であるため，この条件を実現するためには若干の工夫が必要である。例えば，ラグランジアンを

$$L = \frac{1}{2}M\left(\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M}r\right)^2 + p\dot{r} - \frac{p^2}{2\mu} - U(r) - V(m) - \lambda\left(\frac{p}{\mu} - \frac{m}{\alpha}\right) + \frac{\xi}{2}\lambda^2$$

とすれば拘束条件 $m = \alpha\dot{r}$ を実現することが可能である。ここで，p, λ, ξ は新たな乗数である。やや紛らわしいが p を r に共役な運動量としてではなく，「座標」として導入し，拘束条件を通じて「運動量」にしている。実際，Euler-Lagrange 方程式として

$$\begin{aligned}
&M\frac{d}{dt}\left(\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M}r\right) = 0,\\
&\dot{p} = -\frac{1}{2}\left(\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M}r\right)\dot{m} - \frac{dU}{dr},\\
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M}r\right)r\right] = \frac{m}{4M}\frac{p^2}{\mu^2} + \frac{dV}{dm} + \frac{m}{2M}\frac{p}{\mu^2}\lambda\\
&\dot{r} - \frac{p}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu} = 0\\
&-\frac{p}{\mu} + \frac{m}{\alpha} + \xi\lambda = 0\\
&\lambda^2 = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

を得るので，下から順に拘束方程式を用いればもとの方程式 (6) で $m = \alpha\dot{r}$ を設定した方程式を再現することが出来る。このモデルの取り扱いは今後の課題としたい。

参考文献

[1] 例えば，M. J. Ablowitz and H. Segur, "SOLITONS AND THE INVERSE SCATTERING TRANSFORM", SIAM, 1981.

[2] 例えば, V. G. Makhankov, Y. P. Rybakov, V. I. Sanyuk, "The Skyrme Model: Fundamentals Methods Applications", Springer-Verlag, 1993.

[3] 角畠浩，「質量交換を伴う二粒子系」，数理解析研究所講究録 1890「非線形波動現象の数理と応用」，p.228，京都大学数理解析研究所，2014 年

[4] 角畠浩，紺野公明，「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル」，数理解析研究所講究録 1701「波動現象の数理と応用」，p.197，京都大学数理解析研究所，2010 年

[5] 角畠浩，紺野公明，「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル II」，数理解析研究所講究録 1761「非線形波動現象の多様性と普遍性」，p.1118，京都大学数理解析研究所，2011 年

[6] H. Kakuhata and K.Konno, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 757.

[7] H. Kakuhata and K.Konno, Theor. Math. Phys. **65** (2002) 713.

[8] F. Abdullaev, S. Darmanyan and P. Khabibullaev, *Optical Solitons*, Springer-Verlag, 1993.

[9] 大貫義郎,「解析力学」, 岩波書店, 1987 年

[10] 山本義隆, 中村孔一,「解析力学 II」, 朝倉書店, 2002 年