

## 磁性流体界面解析における界面磁気力

北海道大学大学院・工学研究院 水田 洋

Yo Mizuta

Faculty of Engineering, Hokkaido University

### 1 はじめに

磁性流体界面現象のように磁場と流体が結合した系を数値的に調べる場合、磁場および流体に関する物理法則が十分に満たされていることを確認する手段を用意する必要がある。特に、磁性流体の水平界面が臨界磁場付近で不安定化して規則形状に変化していくような現象では、磁場と流体が短時間の間に微妙なバランスで変化していくため、このような手段が必須になる。

本研究の数値解析では、任意の界面形状・印加磁場分布のもとで調和性と界面条件を満たす界面磁場を求め(汎用磁場解析), Bernoulli 方程式と力学的条件より導いた界面変位・界面応力 and の波数成分に対する方程式を解く(界面力学方程式による流体解析) [1]. この方法でこれまで、非線形応答(界面振幅に関する界面応力 and の勾配行列の固有値,  $\omega^2$  を拡張)から界面安定性の分岐図式を作成したり、磁性流体界面上を伝播する波動の界面変位・界面応力 and の波数スペクトルの時間変化を見ながら、非線形効果が新たに波数成分を生成していく様子を調べてきた [2].

以上のような解析において、充足を確認すべき物理法則として、流体に関してはエネルギー保存則を取り上げなければならない。エネルギー保存則は、[2]でも述べたように、界面力学方程式から導かれ、数値解析において数値的に求めた界面量の妥当性は、界面応力とエネルギー密度 (Flat Space における界面の単位面積あたりのエネルギー) との関係を用いて確めることになる。磁性流体界面現象の場合、界面応力は主に重力  $G$ ・表面張力  $C$ ・磁気応力差  $T$  から構成される。界面応力とエネルギー密度の関係は、重力・表面張力については比較的容易に示される。しかし、磁気応力差については、磁場が Gauss の法則と Ampère の法則を満たすことを前提に界面磁気力す

なわち Maxwell 応力が導かれることから、界面応力とエネルギー密度の関係を示すことは容易でない。ただしこの関係が数値的にも確かめられると、これは汎用磁場解析で求められた界面磁場が磁場法則を満たしていることの確認にもなる。本研究では、エネルギー保存則を磁性流体界面現象を数値的に解析する際の検証に用いるが、本論文では、まずは理論的に、磁気応力差  $T$  と磁気エネルギー  $U_T$  の関係を中心に、界面応力とエネルギー密度の関係を調べていくことにする。

## 2 界面力学におけるエネルギー保存則

界面変位  $\zeta$  を界面に沿う一般化座標  $\mathbf{R} = (X, Y)$  の関数として、波数  $\mathbf{k}$  に属する周期関数  $\zeta_{\mathbf{k}}$  の重ね合わせで  $\zeta(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{k}} \zeta_{\mathbf{k}}(\mathbf{R})$  と表す。ここで  $\zeta_{\mathbf{k}}$  は  $\nabla_2^2 \zeta_{\mathbf{k}} + k^2 \zeta_{\mathbf{k}} = 0$  にしたがうものとする ( $k = |\mathbf{k}|$ ,  $\nabla_2 = (\partial/\partial X, \partial/\partial Y)$  は界面方向偏微分)。磁性流体を非圧縮性渦なしとすると、流体の運動方程式の界面方向成分に界面  $Z = \zeta$  上で力学的条件を適用すれば、 $\rho, d$  を流体密度・流体厚さとして、次の界面力学方程式が導かれる [2]。

$$0 = \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{k \tanh kd} \frac{\partial \zeta_{\mathbf{k}}}{\partial t} \right) - \frac{1}{k^2} \nabla_2^2 S_{\mathbf{k}} \right\}. \quad (1)$$

ここで  $S_{\mathbf{k}}$  は、動圧  $D$ , 重力ポテンシャル  $G$ , 表面張力  $C$ , 磁気応力差  $T$ , 大気圧  $p_0$  の和  $S \equiv (D + G + C + T + p_0)_{Z=\zeta}$  を  $S(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{k}}(\mathbf{R})$  と表すときの周期関数である。もし  $S_{\mathbf{k}}$  を  $\zeta_{\mathbf{k}}$  の関数として表すことができれば、(1) は  $\zeta_{\mathbf{k}}$  に対する時間発展方程式となり、求められた  $\zeta_{\mathbf{k}}$  から界面変位の振る舞いを知ることができる [2]。

界面力学方程式(1)の両辺に  $\partial \zeta / \partial t$  をかけて、界面  $F$  全体で平均すれば、

$$0 = \left\langle \frac{\partial \zeta}{\partial t} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{k \tanh kd} \frac{\partial \zeta_{\mathbf{k}}}{\partial t} \right) + S_{\mathbf{k}} \right\} \right\rangle \quad \left( \langle \dots \rangle \equiv \frac{1}{F} \iint_F dXdY \dots \right) \quad (2)$$

ただし、周期関数  $S_{\mathbf{k}}$  に対する  $\nabla_2^2 S_{\mathbf{k}} + k^2 S_{\mathbf{k}} = 0$  を考慮してある。次に、界面変位も  $\zeta(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{k}} \zeta_{\mathbf{k}}(\mathbf{R})$  のように周期関数に展開し、周期関数の直交性  $\langle \zeta_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{R}) \zeta_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{R}) \rangle \neq 0$  ( $\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2$ ) を用いると、

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\rho}{2k \tanh kd} \left\langle \left( \frac{\partial \zeta_{\mathbf{k}}}{\partial t} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \zeta}{\partial t} S \right\rangle. \quad (3)$$

すなわち、右辺第1項は運動エネルギー、第2項は界面応力和による仕事(いずれも単位時間・単位面積あたり)となり、(3)はエネルギー保存則を表す。

もし  $S = \partial U / \partial \zeta$  のように界面応力和を与えるポテンシャルエネルギー密度  $U(\mathbf{R}) = \sum_k U_k(\mathbf{R})$  が見つければ、(3)は次のように書き換えられる。

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \sum_k \frac{\rho}{2k \tanh kd} \left\langle \left( \frac{\partial \zeta_k}{\partial t} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \sum_k \langle E_k \rangle, \quad (4)$$

$$E_k \equiv \frac{\rho}{2k \tanh kd} \left( \frac{\partial \zeta_k}{\partial t} \right)^2 + U_k. \quad (5)$$

したがって、 $\sum_k \langle E_k \rangle$  は時間的に一定となり、界面の単位面積あたりの平均エネルギーとして保存される。

### 3 エネルギー密度

エネルギー保存則(3)は、与えられた界面応力和  $S$  に対して界面力学方程式が正しく時間積分されていることを確かめるのに役立つ。しかし、 $S$  自身が物理的に正当なものであることは、別の方法で確かめる必要がある。これには、ある界面変位  $\zeta$  で界面応力和  $S(\zeta)$  とポテンシャルエネルギー密度  $U(\zeta)$ 、それからわずかに変化した  $\zeta + \delta\zeta$  で  $U(\zeta + \delta\zeta)$  を求めるとして、次の関係を使う。

$$\delta U \equiv U(\zeta + \delta\zeta) - U(\zeta) = S(\zeta) \delta\zeta. \quad (6)$$

以下では、 $S(\zeta)$  に対応する  $U(\zeta)$  を示していくことにする。

重力加速度・表面張力係数・界面形状の主曲率を  $g, \gamma, \kappa_{1,2}$ 、接線磁場・法線磁束密度・流体/真空の透磁率 ( $j = + / -$ )・界面を横切る値の跳び(真空-流体)を  $h_{X,Y}, \mu_j, b_Z, [\dots]$  と表せば、重力ポテンシャル  $G$ ・表面張力  $C$ ・磁気応力差  $T$  および界面応力和  $S$  は次のようになる。

$$G = \rho g \zeta, \quad C = -\gamma(\kappa_1 + \kappa_2), \quad T = -[1/\mu_j] \{ \mu_+ \mu_- (h_X^2 + h_Y^2) + b_Z^2 \} / 2, \quad (7)$$

$$S = G + C + T. \quad (8)$$

ただし(8)において、界面の動きは充分遅く、また大気圧は一様であるとして、 $D, p_0$  は省略した。本節ではこれ以降、 $G, C, T$  に対応するエネルギー密度  $U_G, U_C, U_T$  を示す。なお、 $U(\zeta)$  はこれらのエネルギー密度の和である。

### 3.1 重力ポテンシャルのエネルギー密度

重力ポテンシャル  $G$  を導くエネルギー密度が  $U_G$  であることは、以下のよう容易に示される。

$$U_G(\zeta) = \frac{1}{2} \rho g \zeta^2, \quad (9)$$

$$\delta U_G = U_G(\zeta + \delta\zeta) - U_G(\zeta) = \left( \frac{1}{2} \rho g \zeta^2 \right)_{\zeta + \delta\zeta} - \left( \frac{1}{2} \rho g \zeta^2 \right)_{\zeta} = \rho g \zeta \delta\zeta = G \delta\zeta. \quad (10)$$

### 3.2 表面張力のエネルギー密度

表面張力は、界面の法線方向の移動に伴って面積素の大きさが変化するとき、それに伴う仕事が面積素の変化に比例することから導かれている [3].

界面上の点の座標ベクトルとその微分を  $\mathbf{r}(\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \zeta(X, Y) \end{pmatrix}$ ,  $r_X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \zeta_X \end{pmatrix}$ ,  $r_Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \zeta_Y \end{pmatrix}$  とすれば、ある面積素の大きさは  $dS = |\mathbf{dr}_X \times \mathbf{dr}_Y| = \sqrt{1 + (\nabla\zeta)^2} dXdY$  と表される。ただし、 $\mathbf{dr}_X = r_X dX$ ,  $\mathbf{dr}_Y = r_Y dY$ ,  $(\nabla\zeta)^2 = (\zeta_X)^2 + (\zeta_Y)^2$  である。

$\mathbf{e}$  を界面に対する法線単位ベクトルとする。  $\mathbf{r}$  が法線方向へ微小移動して  $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \delta\zeta \mathbf{e}$  に、面積素の大きさが  $d\bar{S} = (dS)_{\zeta + \delta\zeta}$  になるとすれば、面積素の大きさの変化は  $\delta dS = (dS)_{\zeta + \delta\zeta} - (dS)_{\zeta} = -(\kappa_1 + \kappa_2) \sqrt{1 + (\nabla\zeta)^2} \delta\zeta dXdY$  となる [4]. ただし、 $\kappa_{1,2}$  は界面形状の主曲率である。したがって、 $\gamma$  を表面張力係数とすれば、表面張力とそのエネルギー密度は次のようになる。

$$U_C(\zeta) = \frac{\gamma dS}{dXdY} = \gamma \sqrt{1 + (\nabla\zeta)^2}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \delta U_C &= U_C(\zeta + \delta\zeta) - U_C(\zeta) = \left( \gamma \sqrt{1 + (\nabla\zeta)^2} \right)_{\zeta + \delta\zeta} - \left( \gamma \sqrt{1 + (\nabla\zeta)^2} \right)_{\zeta} \\ &= -\gamma (\kappa_1 + \kappa_2) \sqrt{1 + (\nabla\zeta)^2} \delta\zeta = C \delta\zeta. \end{aligned} \quad (12)$$

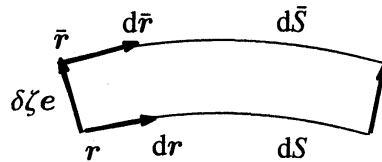


Fig. 1: 表面張力を導くための、界面の法線方向微小移動と面積素の大きさの変化。

### 3.3 磁気応力差のエネルギー密度

界面近傍で磁場は流体・真空両領域に存在するが、まず、流体側の磁気エネルギーを考える。磁束密度の大きさを  $B$ 、流体領域の透磁率を  $\mu_+$  とすれば、Flat Space の単位面積あたりのエネルギー密度は  $U_{T+}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \frac{B^2}{2\mu_+}$  となる。界面移動  $\delta\zeta$  による  $U_{T+}$  の変化からは、以下のように Maxwell 応力の法線成分が導かれる。

$$\begin{aligned} \delta U_{T+} &= \left( \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \frac{B^2}{2\mu_+} \right)_{\zeta=\zeta+\delta\zeta_+} - \left( \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \frac{B^2}{2\mu_+} \right)_{\zeta=\zeta} \\ &= \frac{1}{2\mu_+} \left\{ B^2(\zeta) + \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \left( \frac{\delta B^2}{\delta \zeta} \right)_Z \right\} \delta\zeta_+ \\ &= \frac{B^2 - 2(B_X^2 + B_Y^2)}{2\mu_+} \delta\zeta_+ = \frac{B_Z^2 - (B_X^2 + B_Y^2)}{2\mu_+} \delta\zeta_+ \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{B_Z^2}{\mu_+} - \mu_+ (H_X^2 + H_Y^2) \right\} \delta\zeta_+ = T_+ \delta\zeta_+ \end{aligned} \quad (13)$$

ここで(13)の2行目は、積分範囲の変化と界面移動によって生じる磁場の变化からの寄与の和である。第2項には、Ampère の法則と Gauss の法則から導かれる後述の  $\int_{-\infty}^{\zeta} dZ \left( \frac{\delta B^2}{\delta \zeta} \right)_Z = -2(B_X^2 + B_Y^2)_\zeta$  を用いると、3行目第1辺となる。ここで、磁束密度の接線成分を  $B_X, B_Y$ 、法線成分を  $B_Z$  と表せば、 $B^2 = B_X^2 + B_Y^2 + B_Z^2$ 。さらに、 $\mathbf{B}$  を磁束密度ベクトル、 $\mathbf{H}$  を磁場ベクトルとして、 $\mathbf{B} = \mu_+ \mathbf{H}$  を仮定すれば、Maxwell 応力の法線成分  $T_+$  が4行目のよう

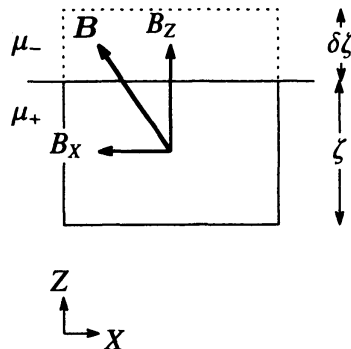


Fig. 2: 磁気応力差を導くための、流体領域・真空領域と界面の微小変化。

に得られる.

以上の  $U_{T+}, T_+$  に対し, 真空側からの寄与を加えると, エネルギー密度および Maxwell 応力の法線成分の関係は, 次のようになる.

$$U_T(\zeta) = U_{T+}(\zeta) + U_{T-}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \frac{B^2}{2\mu_+} + \int_{\zeta}^{\infty} dZ \frac{B^2}{2\mu_-}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \delta U_T &= U_T(\zeta + \delta\zeta) - U_T(\zeta) = \delta U_{T+} + \delta U_{T-} = T_+ \delta\zeta_+ + T_- \delta\zeta_- \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{B_Z^2}{\mu_+} - \mu_+ (H_X^2 + H_Y^2) - \frac{B_Z^2}{\mu_-} + \mu_- (H_X^2 + H_Y^2) \right\} \delta\zeta \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_-} - \frac{1}{\mu_+} \right) \left\{ \mu_+ \mu_- (H_X^2 + H_Y^2) + B_Z^2 \right\} \delta\zeta = T \delta\zeta. \end{aligned} \quad (15)$$

(15) の 1 行目第 4 辺で, 界面移動量  $\delta\zeta_{\pm}$  は流体・真空各領域から外向きを正と定義するので,  $\delta\zeta_+ = -\delta\zeta_- = \delta\zeta$  より 2 行目となり, 最後の  $T$  は (7) の磁気応力差に一致する. なお  $H_X, H_Y, B_Z$  は, 磁場の界面条件より両領域で共通になる.

#### 4 Maxwell 応力の導出

式(13)は, 界面の微小移動に伴う磁場エネルギーの変化と Maxwell 応力の間のよく知られた関係である. しかしこの関係は, 熱力学的に導く [5] では, 磁性流体界面現象を特に意識しているわけではなく, [6, 7] などでは, Joule 損失と Lorentz 力を用いて導出されていて, 電導性が小さい磁性流体にはふさわしくない. また [8] では, 有限な影響体積と仮想的な磁場発生電流を想定しており, 汎用性に乏しい. このため本節では, 磁性流体界面を意識した一般的な設定で, 磁場エネルギーの変化から Maxwell 応力を波数空間と実空間の両方で導出する.

##### 4.1 波数空間における導出

この節では, (13) の 2 行目から 3 行目を導くために用いた以下の関係を, 波数成分ごとの磁場成分を用いて導く.

$$\int_{-\infty}^{\zeta} dZ \left( \frac{\delta B^2}{\delta\zeta} \right)_Z = -2 (B_X^2 + B_Y^2)_\zeta. \quad (16)$$

$B_{X,Y,Z}$  が Laplace 方程式  $\nabla^2 \Phi = 0$  を満たす調和場  $\Phi$  から求められる場合,  $X, Y$  を界面方向,  $Z$  を法線方向とする直交曲線座標を  $(X, Y, Z)$ , 波数

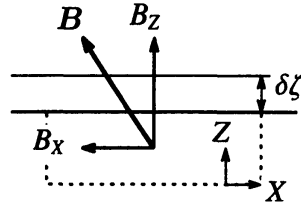


Fig. 3: 波数空間で Maxwell 応力を導くための、界面近傍領域.

を  $\mathbf{k} = (k_X, k_Y)$ , その大きさを  $k = |\mathbf{k}|$  とすれば,  $B_{X,Y,Z}$  の振る舞いは  $B_{X,Y,Z} \propto e^{i(k_X X + k_Y Y) + kZ}$  と表すことができる (流体領域の場合). このときは,

$$\frac{\partial B_{X,Y,Z}}{\partial X} = ik_X B_{X,Y,Z}, \quad \frac{\partial B_{X,Y,Z}}{\partial Y} = ik_Y B_{X,Y,Z}, \quad \int_{-\infty}^Z dZ' B_{X,Y,Z}(Z') = \frac{1}{k} B_{X,Y,Z}(Z). \quad (17)$$

調和場は, Ampère の法則  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$  と Gauss の法則  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  を前提としている. これらを  $B_{X,Y,Z}$  で表して (17) を用いると, 次の関係が導かれる.

$$\begin{aligned} B_X(Z) &= \int_{-\infty}^Z dZ' \left( \frac{\partial B_Z}{\partial X} \right)_{Z'} = i \frac{k_X}{k} B_Z(Z), \\ B_Y(Z) &= \int_{-\infty}^Z dZ' \left( \frac{\partial B_Z}{\partial Y} \right)_{Z'} = i \frac{k_Y}{k} B_Z(Z), \\ B_Z(Z) &= - \int_{-\infty}^Z dZ' \left( \frac{\partial B_X}{\partial X} + \frac{\partial B_Y}{\partial Y} \right)_{Z'}. \end{aligned} \quad (18)$$

ここで, (18) の  $B_Z$  について界面移動による変化を求めると

$$\begin{aligned} \frac{\delta B_Z(\zeta)}{\delta \zeta} &= - \int_{-\infty}^{\zeta} dZ' \frac{\delta}{\delta \zeta} \left( \frac{\partial B_X}{\partial X} + \frac{\partial B_Y}{\partial Y} \right)_{Z'} - \left( \frac{\partial B_X}{\partial X} + \frac{\partial B_Y}{\partial Y} \right)_{\zeta} \\ &= -i \left\{ \left( \frac{k_X}{k} \frac{\delta B_X}{\delta \zeta} + \frac{k_Y}{k} \frac{\delta B_Y}{\delta \zeta} \right) + (k_X B_X + k_Y B_Y) \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

1行目右辺の第1項は界面移動によって生じる磁場の変化, 第2項は積分範囲の変化からの寄与を表している. なお2行目では, (17) の第1,2式を用いた. (19)からはさらに, (18)の第1,2式, すなわち Ampère の法則を用いて,

$$\begin{aligned} B_Z \frac{\delta B_Z}{\delta \zeta} &= -i B_Z \left\{ \left( \frac{k_X}{k} \frac{\delta B_X}{\delta \zeta} + \frac{k_Y}{k} \frac{\delta B_Y}{\delta \zeta} \right) + (k_X B_X + k_Y B_Y) \right\} \\ &= - \left\{ \left( B_X \frac{\delta B_X}{\delta \zeta} + B_Y \frac{\delta B_Y}{\delta \zeta} \right) + k (B_X^2 + B_Y^2) \right\} \\ &= - \left\{ \frac{\delta}{\delta \zeta} \left( \frac{B_X^2 + B_Y^2}{2} \right) + k (B_X^2 + B_Y^2) \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

が導かれ、これは  $B^2 = B_X^2 + B_Y^2 + B_Z^2$  により、

$$\frac{\delta B^2}{\delta \zeta} = -2k(B_X^2 + B_Y^2) \quad (21)$$

とまとめられる。(16)は、(17)の第3式を想定して、(21)を書き換えたものと考えられる。

## 4.2 実空間における導出

界面の下側(流体側)に、Fig. 4に示すような、3辺の長さが  $l_x, l_y, l_z$  で上側は界面に接している直方体領域を考え、この付近の磁束密度ベクトルを  $\mathbf{B} = (B_X, B_Y, B_Z)$  とする。 $l_z$  が充分小さければ、 $dV = l_x l_y l_z$ ,  $S_Z = l_x l_y$  として、この領域内には単位面積当たり  $U_{T+} = B^2 dV / 2\mu_+ S_Z$  だけの磁気エネルギーが含まれる。ここで、Ampèreの法則を近似的に  $B_Z l_z = B_X l_x = B_Y l_y$  と表して用いれば、

$$\begin{aligned} B^2 dV &= (B_X^2 + B_Y^2 + B_Z^2) dV = \left( B_X \frac{B_Z l_z}{l_x} + B_Y \frac{B_Z l_z}{l_y} + B_Z^2 \right) dV \\ &= B_Z l_z \left( B_X \frac{dV}{l_x} + B_Y \frac{dV}{l_y} + B_Z \frac{dV}{l_z} \right) \\ &= B_Z l_z (B_X S_X + B_Y S_Y + B_Z S_Z) = B_Z l_z (\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}). \end{aligned} \quad (22)$$

(22)の3行目では、面積素ベクトル  $\left( \frac{1}{l_x}, \frac{1}{l_y}, \frac{1}{l_z} \right) dV = (S_X, S_Y, S_Z) = \mathbf{S}$  を用いた。

次に、 $l_z$  を  $\delta l_z$  だけ微小変化させて界面を移動し、領域内の磁気エネルギーの変化  $\delta U_{T+}$  を調べる。移動前後の界面にはさまれた領域に Gauss の法

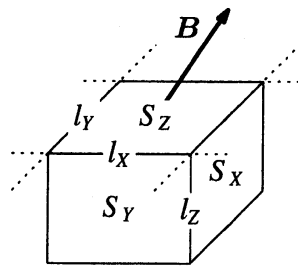


Fig. 4: 実空間で Maxwell 応力を導くための、直方体領域。



則を適用すると、 $\delta(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}) = 0$ となる。これより、以下の関係が導かれる。

$$\begin{aligned}
 0 &= B_Z l_Z \delta(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}) = B_Z l_Z (\delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{S}) \\
 &= B_Z l_Z \{(\delta B_X S_X + \delta B_Y S_Y + \delta B_Z S_Z) + (B_X \delta S_X + B_Y \delta S_Y)\} \\
 &= (B_X \delta B_X l_X S_X + B_Y \delta B_Y l_Y S_Y + B_Z \delta B_Z l_Z S_Z) + (B_X^2 l_X \delta S_X + B_Y^2 l_Y \delta S_Y) \\
 &= \frac{\delta B^2}{2} dV + (B_X^2 + B_Y^2) \delta dV. \tag{23}
 \end{aligned}$$

ここで、2行目には  $\delta S_Z = \delta(l_X l_Y) = 0$  を、3行目には Ampère の法則を用い、4行目は  $l_X \delta S_X = l_X l_Y \delta l_Z = S_Z \delta l_Z = \delta dV$ ,  $l_Y \delta S_Y = l_X l_Y \delta l_Z = S_Z \delta l_Z = \delta dV$  でまとめた。(23)を以下の1行目で用い、2行目で  $\delta dV / S_Z = \delta l_Z = \delta \zeta_+$  とすれば、

$$\begin{aligned}
 \delta U_{T+} &= \frac{\delta(B^2 dV)}{2\mu_+ S_Z} = \frac{B^2 \delta dV + (\delta B^2) dV}{2\mu_+ S_Z} = \frac{B^2 \delta dV - 2(B_X^2 + B_Y^2) \delta dV}{2\mu_+ S_Z} \\
 &= \frac{B_Z^2 - (B_X^2 + B_Y^2)}{2\mu_+} \frac{\delta dV}{S_Z} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{B_Z^2}{\mu_+} - \mu_+ (H_X^2 + H_Y^2) \right\} \delta \zeta_+ \tag{24}
 \end{aligned}$$

のように磁気エネルギーの変化が求められ、これは(13)に一致している。

## 5 汎用磁場解析による界面磁場

本節では、界面形状や印加磁場分布が任意でも、調和性と界面条件を厳密に満たす磁場を界面に限って求める汎用解析について、求められた界面磁場が、Maxwell 応力を求めるために用いた Ampère の法則と Gauss の法則を満たすことを確認する。

まず、汎用解析の方法をまとめる[1]。界面上の接線磁場  $h_{X,Y}$ , 法線磁束密度  $b_Z$  は、既知の外部印加磁場  $h^0$  より直接定義できる基本場  $h_{X,Y}^0 = t_{X,Y} \cdot h^0$ ,  $b_Z^0 = t_Z \cdot h^0 / P$  と、基本場と合わせて調和性と界面条件を満たす誘導場  $h_{X,Y}^1$ ,  $b_Z^1$  に分ける。ここで、 $t_{X,Y}, t_Z$  は接線および法線単位ベクトル、また、 $P \equiv (1/\mu_- + 1/\mu_+)/2$ ,  $M \equiv (1/\mu_- - 1/\mu_+)/2$  である。

誘導場は、Green の定理から導いた 3次元界面磁場方程式 ((25)左), または、これを書き換えた直接的な表式(同右)から求める。

$$\begin{cases} (P + M \hat{G}_Z) b_Z^1 = -M \hat{G}_Z b_Z^0, & \begin{cases} b_Z^1 = \hat{H}_Z (1 - \hat{H}_Z)^{-1} b_Z^0, \\ h_{X,Y}^1 + M \hat{G}_{X,Y} b_Z^1 = -M \hat{G}_{X,Y} b_Z^0, & \begin{cases} h_{X,Y}^1 = \hat{H}_{X,Y} (1 - \hat{H}_Z)^{-1} b_Z^0. \end{cases} \end{cases} \end{cases} \tag{25}$$

ここでは、 $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  を観測点とソース点の位置ベクトル、 $\nu$  を  $\mathbf{r}'$  に関する微分または  $\mathbf{r}'$  だけの関数、 $\psi(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) = -1/4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$  を 3次元 Poisson 方程式

$\Delta'\psi = \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})$  の基本解,  $\iint_F dS'$  を界面  $F$  上のソース点  $\mathbf{r}'$  にわたる面積分として, 次のように **3次元 Hilbert 変換演算子** を定義した.

$$\hat{G}_I F(X, Y) \equiv t_I \cdot \hat{G} F(X', Y') \quad (I=X, Y, Z), \quad \hat{G} F(X, Y) \equiv 2 \iint_F dS' (\nabla' \psi) F(X', Y'), \quad (26)$$

$$\hat{H}_{X, Y} F(X, Y) \equiv -M \hat{G}_{X, Y} F(X, Y), \quad \hat{H}_Z F(X, Y) \equiv -(M/P) \hat{G}_Z F(X, Y). \quad (27)$$

ここで更に, (25) から (27) までを以下のようにコンパクトに書き換える. まず,  $\nabla' \psi = -\nabla \psi$  より, (26) の  $\hat{G}_I$  は次のようになる.

$$\hat{G}_I [F(X, Y)] = t_I \cdot \nabla \iint_F dS' (-2\psi) F(X', Y') = t_I \cdot \nabla \hat{G} [F(X', Y')], \quad (28)$$

$$\hat{G} [F(X, Y)] \equiv \iint_F dS' (-2\psi) F(X', Y') = \iint_F dS' \frac{F(X', Y')}{2\pi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}. \quad (29)$$

ここで  $t_I \cdot \nabla$  は,  $I=X, Y, Z$  に対して  $t_X \cdot \nabla = \partial/\partial X$ ,  $t_Y \cdot \nabla = \partial/\partial Y$ ,  $t_Z \cdot \nabla = \partial/\partial Z$  と置き換えることができるので, (27) より

$$\hat{H}_{X, Y} [F(X, Y)] = -M \left( \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y} \right) \hat{G} [F(X, Y)], \quad (30)$$

$$\hat{H}_Z [F(X, Y)] = -\frac{M}{P} \frac{\partial}{\partial Z} \hat{G} [F(X, Y)].$$

次に, (25) 右からは, 基本場・誘導場を合わせた法線磁束密度が

$$b_Z = b_Z^0 + b_Z^1 = b_Z^0 + \hat{H}_Z (1 - \hat{H}_Z)^{-1} b_Z^0 = (1 - \hat{H}_Z)^{-1} b_Z^0 \quad (31)$$

となることが示される. したがって,

$$\begin{cases} h_X^1 = \hat{H}_X [b_Z] = -M \frac{\partial}{\partial X} \hat{G} [b_Z] = -M \iint_F dS' \frac{\partial}{\partial X} (-2\psi) b'_Z, \\ h_Y^1 = \hat{H}_Y [b_Z] = -M \frac{\partial}{\partial Y} \hat{G} [b_Z] = -M \iint_F dS' \frac{\partial}{\partial Y} (-2\psi) b'_Z, \\ b_Z^1 = \hat{H}_Z [b_Z] = -\frac{M}{P} \frac{\partial}{\partial Z} \hat{G} [b_Z] = -\frac{M}{P} \iint_F dS' \frac{\partial}{\partial Z} (-2\psi) b'_Z. \end{cases} \quad (32)$$

(32) を用いれば, 以下のように, 誘導場  $h_X^1, h_Y^1, b_Z^1$  が Ampère の法則・Gauss の法則を満たしていることを確認できる.

$$\begin{cases} \frac{\partial h_Y^1}{\partial X} - \frac{\partial h_X^1}{\partial Y} = 0, & \frac{\partial (P b_Z^1)}{\partial Y} - \frac{\partial h_Y^1}{\partial Z} = 0, & \frac{\partial h_X^1}{\partial Z} - \frac{\partial (P b_Z^1)}{\partial X} = 0, \\ \frac{\partial h_X^1}{\partial X} + \frac{\partial h_Y^1}{\partial Y} + \frac{\partial (P b_Z^1)}{\partial Z} = 0. \end{cases} \quad (33)$$

したがって, 基本場  $h_X^0, h_Y^0, b_Z^0$  が Ampère の法則・Gauss の法則を満たしてい

ることを前提にすれば、基本場と誘導場を合わせた  $h_x, h_y, b_z$  に対しても、

$$\begin{cases} \frac{\partial h_y}{\partial X} - \frac{\partial h_x}{\partial Y} = 0, & \frac{\partial(Pb_z)}{\partial Y} - \frac{\partial h_y}{\partial Z} = 0, & \frac{\partial h_x}{\partial Z} - \frac{\partial(Pb_z)}{\partial X} = 0, \\ \frac{\partial h_x}{\partial X} + \frac{\partial h_y}{\partial Y} + \frac{\partial(Pb_z)}{\partial Z} = 0 \end{cases} \quad (34)$$

のように、これらの法則が成り立つ。

## 6 まとめと今後の課題

磁性流体界面現象のように磁場と流体が結合した系の数値解析を行う場合、物理法則を十分に満たすことの確認方法として、エネルギー保存則を取り上げた。エネルギー保存則は、運動エネルギーと界面応力による仕事のつりあいと、界面応力とエネルギー密度の関係の両方について確認することになる。界面磁気力 (Maxwell 応力) と磁気エネルギーの関係はよく知られているが、この関係により、磁場解析の正しさも確かめられることになる。

今後、界面形状の遷移のような変化の激しい現象の解析に、数値解析にふさわしい形で導出した本論文のエネルギー保存則を役立てて行く。

## 参考文献

- [1] 水田 洋: 水深が有限な磁性流体界面の波動と安定性; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動研究の数理, モデリングおよび応用」, **1847**, p.96 (2013).
- [2] 水田 洋: 不安定化する磁性流体界面波動のスペクトル特性変化; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理と応用」, **1890**, p.113 (2014).
- [3] L.D.Landau and E.M.Lifshitz: *Fluid mechanics* (Pergamon, Oxford), Chap.7 (1959).
- [4] 小林昭七: 曲線と曲面の微分幾何 (裳華房, 東京), 第2章 (1995).
- [5] L.D.Landau and E.M.Lifshitz: *Electrodynamics of continuous media* (Pergamon, London) (1960).
- [6] J.D.Jackson: *Classical electrodynamics* (Wiley, New York) (1975).
- [7] W.K.Panofsky and M.Phillips: *Classical electricity and magnetism* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts) (1962).
- [8] M.D.Cowley and R.E.Rosensweig: The interfacial stability of a ferromagnetic fluid; *J. Fluid. Mech.*, **30** (4), p.671 (1967).