

Title	遅い気体流に対する非圧縮性Navier-Stokes方程式系の適用性について (流体と気体の数学解析)
Author(s)	田口, 智清
Citation	数理解析研究所講究録 (2015), 1947: 105-114
Issue Date	2015-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/223893
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

遅い気体流に対する非圧縮性 Navier-Stokes 方程式系の適用性について

電気通信大学・情報理工学研究所 田口 智清

Satoshi Taguchi

Department of Mechanical Engineering and Intelligent Systems,
University of Electro-Communications

講演内容の詳細は [5] にゆずり、講演の最後に触れた遅い流れの流体力学的記述について考察を加える。

1 まえおき

遅い気体の流れを調べるとき、流体力学では非圧縮性ナビエ・ストークス (NS) 方程式と粘着 (すべりなし) の境界条件 (以下, NS 方程式系と呼ぶ) が用いられる。特にレイノルズ数が極めて小さい場合には, NS 方程式の移流項 (非線形項) を省略したストークス近似が有効であることは周知である¹。ストークス近似による解の精度に満足できない場合には NS 方程式を解くことになるが, この場合にも, ストークス近似による解を出発点に NS 方程式を逐次的に解くことで解の精度を向上させていく手法が使える。本稿では実際に達成しようとする解の精度とストークス近似で得られる解の精度とのズレを問題にする。従ってストークス近似による解に十分満足できる場合には以下の議論は不要である。以下では, このズレの要因を分子気体力学の立場から吟味することにより, ストークス解に対する補正が NS 方程式系では正しく求まらない場合があることを示す。

実際このような場合があることは, 以下に示す初等的な議論で容易にわかる。 ρ を気体の代表密度, U を代表速度, L を系の代表長, μ を粘性係数とすると, レイノルズ数 Re は $Re = \rho UL / \mu$ で定義される。ここで流速が十分小さく

$$\frac{\rho UL}{a_0} \sim \left(\frac{\mu}{a_0}\right)^2, \quad (1)$$

が成り立つとしよう。ただし a_0 は ρUL および μ と次元が同じで大きさが 1 の定数である²。このときレイノルズ数は $Re \sim \mu/a_0$ と見積もることができ, レイノルズ数と粘性係数は同程度の大きさとなる。すなわち, ストークス近似と (近似を用いない) NS 方程式の解の間にレイノルズ数程度のズレがあるならば, それは粘性係数と同程度の大きさということになる。一方, 古典的な気体分子運動論によれば, 粘性係数は気体分子の平均自由行程に比例することが知られている [8]。さらに, 大きさが平均自由行程程度の効果として, 境界での速度のすべりや温度の跳びが存在することが知られている [3, 4]。つまり, ストークス近似の解を第 0 近似として大きさがレイノルズ数程度のズレを議論する場合には, (通常の流体力学では考慮されない) 境界での速度のすべりや温度の跳びを考慮に入れなければならない可能性がある。本稿ではこのことをボルツマン方程式の漸近解析 [3, 4] を用いて実際に確かめる。

ボルツマン方程式に登場するパラメータとしては平均自由行程 ℓ と系の代表長との比であるクヌーセン数 $Kn = \ell/L$ がよく知られている。それに加え, もう一つ, マッハ数 $Ma = U/a_s$ がある。ここで $a_s = (\gamma RT)^{1/2}$ は音速である (γ は比熱比, R は単位質量あたりの気体定数³, T は気体の代表温度)。マッハ数は (表立つ

¹2 次元の無限領域の問題などストークス近似では解が求められない場合もある。

²MKS 単位系では $a_0 = 1 \cdot \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ 。

³ k_B をボルツマン定数, m を分子の質量とすると $R = k_B/m$ 。

てみえないが) 速度分布関数の基準静止平衡状態からのずれの大きさを特徴付ける重要なパラメータである。さて粘性率が $\mu \sim \rho a_s \ell$ とかけることに注意すると, (1) は

$$Ma \sim \frac{\rho a_s L}{a_0} Kn^2 \quad (2)$$

と書きなおすことができる。従って以下では $Ma = O(Kn^2)$ の場合に着目して $Kn \ll 1$ における気体の漸近的振る舞いを調べることにする。

2 問題

任意形状をもつ単純剛体壁からなる境界に接する単原子分子からなる希薄気体を考え, 気体の定常的な振る舞いを調べる。気体の基準密度を ρ_0 , 基準温度を T_0 , 系の代表長を L とし, 以下の仮定をおく。

- (i) 気体の振る舞いはボルツマン方程式に従う。
- (ii) 気体分子は境界上で拡散反射する。
- (iii) 密度 ρ_0 , 温度 T_0 の基準静止平衡状態における気体分子の平均自由行程 ℓ_0 が系の代表長 L に比べて小さい, すなわちクヌーセン数 $Kn = \ell_0/L$ が小さい。
- (iv) 流れのマッハ数はクヌーセン数より小さく Kn の 2 乗の程度である。
- (v) 壁面の速度および温度変化が小さく Kn の 2 乗の程度である。

Lx_i を空間直交座標とし, $(2RT_0)^{1/2}\zeta_i$ を分子速度, $\rho_0(2RT_0)^{-3/2}[1 + \bar{\phi}(x_i, \zeta_i)]E$ を気体分子の速度分布関数とする。ここで $E = \pi^{-3/2} \exp(-\zeta_j^2)$ 。速度分布関数の摂動部分 $\bar{\phi}$ に対するボルツマン方程式は次のように書くことができる。

$$\zeta_i \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i} = \frac{1}{\varepsilon} [\mathcal{L}(\bar{\phi}) + \mathcal{J}(\bar{\phi}, \bar{\phi})], \quad (3)$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{2} Kn. \quad (4)$$

ここで右辺の $\mathcal{L}(f)$ および $\mathcal{J}(f, g)$ は衝突積分の線形部分および非線形部分でありその具体形は省略する [4]。境界壁面の速度を $(2RT_0)^{1/2}\bar{u}_{iw}$, 壁面の温度分布を $T_0(1 + \bar{\tau}_w)$ と表すと, 壁面上における境界条件は次のように書くことができる。

$$\bar{\phi} = \phi_e(\zeta_i; \bar{\sigma}_w, \bar{u}_{iw}, \bar{\tau}_w), \quad \zeta_i n_i > 0, \quad (5)$$

$$\bar{\sigma}_w = -2 \left(\frac{\pi}{1 + \bar{\tau}_w} \right)^{1/2} \int_{\zeta_i n_i < 0} \zeta_j n_j \bar{\phi} E d\zeta + \left(\frac{1}{1 + \bar{\tau}_w} \right)^{1/2} - 1. \quad (6)$$

ここで

$$[1 + \phi_e(\zeta_i; a^\rho, a_i^u, a^\tau)]E = \frac{1 + a^\rho}{\pi^{3/2}(1 + a^\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\zeta_i - a_i^u)^2}{1 + a^\tau}\right), \quad (7)$$

はパラメータ (a^ρ, a_i^u, a^τ) によって特徴付けられる Maxwell 分布, n_i は境界に立てた気体側をむく単位法線ベクトルで, $\bar{u}_{iw} n_i = 0$ を仮定している。

最後に気体の密度を $\rho_0(1 + \bar{\omega})$, 流速を $(2RT_0)^{1/2}\bar{u}_i$, 温度を $T_0(1 + \bar{\tau})$, 圧力を $p_0(1 + \bar{P})$, 応力テンソルを $p_0(\delta_{ij} + \bar{P}_{ij})$, 熱流ベクトルを $p_0(2RT_0)^{1/2}\bar{Q}_i$ と表すと (ただし $p_0 = R\rho_0 T_0$), $(\bar{\omega}, \bar{u}_i, \bar{\tau}, \bar{P}, \bar{P}_{ij}, \bar{Q}_i)$

は $\bar{\phi}$ のモーメントとして次のように定義される.

$$\bar{\omega} = \langle \bar{\phi} \rangle, \quad (8a)$$

$$(1 + \bar{\omega})\bar{u}_i = \langle \zeta_i \bar{\phi} \rangle, \quad (8b)$$

$$\frac{3}{2}(1 + \bar{\omega})\bar{\tau} = \langle (\zeta_j^2 - \frac{3}{2})\bar{\phi} \rangle - (1 + \bar{\omega})\bar{u}_j^2, \quad (8c)$$

$$\bar{P} = \bar{\omega} + \bar{\tau} + \bar{\omega}\bar{\tau}, \quad (8d)$$

$$\bar{P}_{ij} = 2\langle \zeta_i \zeta_j \bar{\phi} \rangle - 2(1 + \bar{\omega})\bar{u}_i \bar{u}_j, \quad (8e)$$

$$\bar{Q}_i = \langle \zeta_i \zeta_j^2 \bar{\phi} \rangle - \frac{5}{2}\bar{u}_i - \bar{u}_j \bar{P}_{ij} - \frac{3}{2}\bar{P}\bar{u}_i - (1 + \bar{\omega})\bar{u}_i \bar{u}_j^2. \quad (8f)$$

ここで

$$\langle f \rangle = \int f(\zeta_i) E d\zeta. \quad (9)$$

ただし ζ に関する積分の範囲は全空間である.

3 スケーリング

仮定 (iv) および (v) を考慮し, 新たな変数 $(\phi, \omega, u_i, \tau, P, P_{ij}, Q_i, u_{iw}, \tau_w)$ を次の関係により導入する.

$$(\bar{\phi}, \bar{\omega}, \bar{u}_i, \bar{\tau}, \bar{P}, \bar{P}_{ij}, \bar{Q}_i, \bar{u}_{iw}, \bar{\tau}_w) = \varepsilon^2 (\phi, \omega, u_i, \tau, P, P_{ij}, Q_i, u_{iw}, \tau_w). \quad (10)$$

このとき ϕ は次の方程式および境界条件を満たす.

方程式

$$\zeta_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}(\phi) + \varepsilon \mathcal{J}(\phi, \phi). \quad (11)$$

境界条件

$$\phi = \phi_w := \varepsilon^{-2} \phi_e(\zeta_i; \varepsilon^2 \sigma_w, \varepsilon^2 u_{iw}, \varepsilon^2 \tau_w), \quad \zeta_i n_i > 0, \quad (12)$$

$$\sigma_w = -2 \left(\frac{\pi}{1 + \varepsilon^2 \tau_w} \right)^{1/2} \int_{\zeta_i n_i < 0} \zeta_j n_j \phi E d\zeta + \varepsilon^{-2} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon^2 \tau_w} \right)^{1/2} - \varepsilon^{-2}. \quad (13)$$

また, 巨視量 $(\omega, u_i, \tau, P, P_{ij}, Q_i)$ と ϕ の関係は次のようになる.

$$\omega = \langle \phi \rangle, \quad (14a)$$

$$u_i = \langle \zeta_i \phi \rangle - \varepsilon^2 \omega u_i, \quad (14b)$$

$$\frac{3}{2}\tau = \langle (\zeta_j^2 - \frac{3}{2})\phi \rangle - \varepsilon^2 \left(\frac{3}{2}\omega\tau + u_j^2 \right) - \varepsilon^4 \omega u_j^2, \quad (14c)$$

$$P = \omega + \tau + \varepsilon^2 \omega\tau, \quad (14d)$$

$$P_{ij} = 2\langle \zeta_i \zeta_j \phi \rangle - 2\varepsilon^2 u_i u_j - 2\varepsilon^4 \omega u_i u_j, \quad (14e)$$

$$Q_i = \langle \zeta_i \zeta_j^2 \phi \rangle - \frac{5}{2}u_i - \varepsilon^2 (u_j P_{ij} + \frac{3}{2}P u_i) - \varepsilon^4 u_i u_j^2 - \varepsilon^6 \omega u_i u_j^2. \quad (14f)$$

なお, マッハ数 Ma , クヌーセン数 Kn , レイノルズ数 Re の間には

$$Re \sim \frac{Ma}{Kn}$$

の関係がある (カルマンの関係). 従って今考えている状況は $Re \sim Kn$ の場合に対応する.

4 漸近解析

境界値問題 (11)–(13) の解の $\varepsilon \ll 1$ における振る舞いを文献 [3] の方法に従って調べる。

4.1 Hilbert 解および流体力学的方程式

境界条件をさておき、方程式 (11) の解で空間変化の尺度のおだやかなもの ($\partial\phi_H/\partial x_i = O(\phi_H)$) を ε のべき級数展開の形でもとめる。

$$\phi_H = \phi_{H0} + \phi_{H1}\varepsilon + \phi_{H2}\varepsilon^2 + \dots \quad (15)$$

解 ϕ_H はヒルベルト解と呼ばれ、対応する解を添え字 H をつけて表す。速度分布関数の展開に対応して巨視量 h_H ($h = \omega, u_i, \tau, \dots$) も ε で展開される。

$$h_H = h_{H0} + h_{H1}\varepsilon + h_{H2}\varepsilon^2 + \dots \quad (16)$$

ϕ_{Hm} と h_{Hm} の関係は巨視量の定義式 (14) (ただし $\phi = \phi_H$, $h = h_H$) に各展開形を代入し ε のべきで整理することにより得られる (具体形は省略)。

ϕ_H の展開を方程式 (11) (ただし $\phi = \phi_H$) に代入し ε のべきで整理することにより展開係数 ϕ_{Hm} に対する線形積分方程式の列が得られる。

$$\mathcal{L}(\phi_{H0}) = 0, \quad (17)$$

$$\mathcal{L}(\phi_{H1}) = \zeta_i \frac{\partial \phi_{H0}}{\partial x_i}, \quad (18)$$

$$\mathcal{L}(\phi_{Hm}) = \zeta_i \frac{\partial \phi_{Hm-1}}{\partial x_i} - \sum_{n=0}^{m-2} \mathcal{J}(\phi_{Hn}, \phi_{Hm-n-2}), \quad (m = 2, 3, \dots). \quad (19)$$

(17) は ϕ_{H0} に対する同次の線形積分方程式であり、その解は衝突和不変量 $(1, \zeta_i, \zeta_j^2)$ の線形結合で与えられる。巨視量 $(\omega_{H0}, u_{iH0}, \tau_{H0})$ と ϕ_{H0} との関係を考慮すると、 ϕ_{H0} は次式で与えられることがわかる。

$$\phi_{H0} = \omega_{H0} + 2\zeta_i u_{iH0} + \left(\zeta_j^2 - \frac{3}{2} \right) \tau_{H0}. \quad (20)$$

一方 (18) および (19) は非同次の線形積分方程式であり、対応する同次方程式は自明でない解 $(1, \zeta_i, \zeta_j^2)$ を持つ。従って方程式が解を持つためには、非同次項は次の可解条件を満たす必要がある [3, 4]。

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \langle \zeta_j \psi_i \phi_{Hm-1} \rangle = 0, \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (21)$$

ここで $(\psi_0, \psi_i, \psi_4) = (1, \zeta_i, \zeta_j^2)$ は衝突和不変量である。可解条件に ϕ_{Hm} を逐次代入することにより、巨視量の展開係数 h_{Hn} に対する偏微分方程式系 (流体力学的方程式系) が得られる。

4.1.1 流体力学的方程式系

ここではヒルベルト解の解析によって得られる流体力学的方程式系を導出の詳細を省きまとめる。

Order ε^0

$$\frac{\partial P_{H0}}{\partial x_i} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial u_{iH0}}{\partial x_i} = 0, \quad (23a)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial P_{H1}}{\partial x_i} - \frac{\gamma_1}{2} \frac{\partial^2 u_{iH0}}{\partial x_j^2} = 0, \quad (23b)$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{H0}}{\partial x_j^2} = 0, \quad (23c)$$

$$P_{H0} = \omega_{H0} + \tau_{H0}. \quad (23d)$$

Order ε^1

$$\frac{\partial u_{iH1}}{\partial x_i} = 0, \quad (24a)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial P_{H2}}{\partial x_i} - \frac{\gamma_1}{2} \frac{\partial^2 u_{iH1}}{\partial x_j^2} = -u_{jH0} \frac{\partial u_{iH0}}{\partial x_j}, \quad (24b)$$

$$\frac{\gamma_2}{2} \frac{\partial^2 \tau_{H1}}{\partial x_j^2} = u_{jH0} \frac{\partial \tau_{H0}}{\partial x_j}, \quad (24c)$$

$$P_{H1} = \omega_{H1} + \tau_{H1}. \quad (24d)$$

Order ε^2

$$\frac{\partial u_{iH2}}{\partial x_i} = -u_{iH0} \frac{\partial \omega_{H0}}{\partial x_i}, \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial P_{H3}^*}{\partial x_i} - \frac{\gamma_1}{2} \frac{\partial^2 u_{iH2}}{\partial x_j^2} &= -u_{jH0} \frac{\partial u_{iH1}}{\partial x_j} - u_{jH1} \frac{\partial u_{iH0}}{\partial x_j} \\ &+ \frac{\gamma_4}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\tau_{H0} \left(\frac{\partial u_{iH0}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jH0}}{\partial x_i} \right) \right], \end{aligned} \quad (25b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_2}{2} \frac{\partial^2 \tau_{H2}}{\partial x_j^2} &= u_{jH0} \frac{\partial \tau_{H1}}{\partial x_j} + u_{jH1} \frac{\partial \tau_{H0}}{\partial x_j} - \frac{2}{5} u_{jH0} \frac{\partial P_{H1}}{\partial x_j} \\ &- \frac{\gamma_1}{5} \left(\frac{\partial u_{iH0}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jH0}}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{\gamma_5}{4} \frac{\partial^2 \tau_{H0}^2}{\partial x_j^2}, \end{aligned} \quad (25c)$$

$$P_{H2} = \omega_{H2} + \tau_{H2} + \omega_{H0} \tau_{H0}. \quad (25d)$$

ここで

$$P_{H3}^* = P_{H3} - \frac{1}{6} (\gamma_1 \gamma_2 - 4\gamma_3) \frac{\partial^2 \tau_{H1}}{\partial x_j^2}. \quad (26)$$

$\gamma_1, \dots, \gamma_5$ は分子モデルに依存する定数（無次元化した輸送係数⁴）で剛体球分子に対しては、

$$\gamma_1 = 1.270042427, \quad \gamma_2 = 1.922284066, \quad \gamma_3 = 1.947906335,$$

$$\gamma_4 = \gamma_1/2 = 0.635021, \quad \gamma_5 = \gamma_2/2 = 0.961142,$$

BGK モデル [4] に対しては $\gamma_i = 1$ である。

⁴たとえば気体の粘性係数は $\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \gamma_1 \frac{p_0}{(2RT_0)^{1/2}} \ell_0$, 熱伝導係数は $\lambda = \frac{5}{4} \sqrt{\pi} \gamma_2 \frac{p_0}{(2RT_0)^{1/2}} R \ell_0$ で与えられる。

4.2 Knudsen 層解析と流体力学的方程式の境界条件

これまで境界条件を考慮にいれず解析を進めてきた。 ϕ は境界上で境界条件 (12):

$$\phi = \phi_w, \quad \zeta_j n_j > 0, \quad (27)$$

を満足する必要がある。まず境界の速度 u_{iw} および温度 τ_w が ε に依存するとみなし、これらを ε で展開する。

$$u_{iw} = u_{iw0} + u_{iw1}\varepsilon + u_{iw2}\varepsilon^2 + \dots, \quad (28)$$

$$\tau_w = \tau_{w0} + \tau_{w1}\varepsilon + \tau_{w2}\varepsilon^2 + \dots. \quad (29)$$

これら展開と ϕ に対する展開 $\phi = \phi_{(0)} + \phi_{(1)}\varepsilon + \dots$ を境界条件に代入すれば、境界条件の展開形

$$\phi_{(m)} = \phi_{wm}, \quad \zeta_i n_i > 0, \quad (m = 0, 1, \dots), \quad (30)$$

が得られる。ここで

$$\phi_w = \phi_{w0} + \phi_{w1}\varepsilon + \dots, \quad (31)$$

$$\phi_{w0} = \sigma_{w0} + 2\zeta_j u_{jw0} + \left(\zeta_j^2 - \frac{3}{2}\right) \tau_{w0}, \quad (32a)$$

$$\phi_{w1} = \sigma_{w1} + 2\zeta_j u_{jw1} + \left(\zeta_j^2 - \frac{3}{2}\right) \tau_{w1}, \quad (32b)$$

$$\begin{aligned} \phi_{w2} = & \sigma_{w2} + 2\zeta_j u_{jw2} + \left(\zeta_j^2 - \frac{3}{2}\right) \tau_{w2} + 2\zeta_j \sigma_{w0} u_{jw0} + \left(\zeta_j^2 - \frac{3}{2}\right) \sigma_{w0} \tau_{w0} \\ & + 2 \left(\zeta_i \zeta_j - \frac{\delta_{ij}}{2} \right) u_{iw0} u_{jw0} + 2\zeta_i \left(\zeta_j^2 - \frac{5}{2} \right) u_{iw0} \tau_{w0} + \frac{1}{2} \left((\zeta_j^2)^2 - 5\zeta_j^2 + \frac{15}{4} \right) \tau_{w0}^2, \end{aligned} \quad (32c)$$

$$\sigma_{w0} = -2\sqrt{\pi} \int_{\zeta_i n_i < 0} \zeta_j n_j \phi_{(0)} E d\zeta - \frac{\tau_{w0}}{2}, \quad (33a)$$

$$\sigma_{w1} = -2\sqrt{\pi} \int_{\zeta_i n_i < 0} \zeta_j n_j \phi_{(1)} E d\zeta - \frac{\tau_{w1}}{2}, \quad (33b)$$

$$\sigma_{w2} = -2\sqrt{\pi} \int_{\zeta_i n_i < 0} \zeta_j n_j \phi_{(2)} E d\zeta - \frac{\tau_{w2}}{2} + \dots, \quad (33c)$$

などである。

さて、 ϕ_{H0} に対応する流速 (u_{iH0}) および温度 (τ_{H0}) が境界上で次の値をとるとしよう。

$$(u_{iH0})_0 = u_{iw0}, \quad (\tau_{H0})_0 = \tau_{w0}. \quad (34)$$

ここで $(\cdot)_0$ は境界上での値を表す。このとき $\phi_{(0)} = \phi_{H0}$ が境界条件 (30) (ただし $m = 0$) を満たすことは容易に確かめられる。従って (34) は ε^0 次の流体力学的方程式系に対する適切な境界条件を与える。一方 ε^m 次 ($m \geq 1$) では、ヒルベルト解 ϕ_{Hm} は境界条件を満足することができない。そこで境界近傍で境界に垂直な方向に $1/\varepsilon$ の空間尺度で変化する補正 (クヌーセン層補正) を導入することで境界条件を満足する解を構成する。すなわち

$$\phi = \phi_H + \phi_K. \quad (35)$$

ただし $n_i \partial \phi_K / \partial x_i = O(\phi_K / \varepsilon)$.

境界 x_{iw} の近傍で境界層座標

$$x_i = \varepsilon \eta n_i (\chi_1, \chi_2) + x_{iw} (\chi_1, \chi_2) \quad (36)$$

を導入し, $\phi_K = \phi_K(\eta, \chi_1, \chi_2, \zeta_i)$ と仮定すると, ϕ_K は次の境界層方程式 (クヌーセン層方程式) を満足する.

$$\zeta_i n_i \frac{\partial \phi_K}{\partial \eta} = \mathcal{L}(\phi_K) - \varepsilon \zeta_i \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_K}{\partial \chi_\alpha} + \varepsilon^2 [2\mathcal{J}(\phi_H, \phi_K) + \mathcal{J}(\phi_K, \phi_K)]. \quad (37)$$

ここで $\alpha = 1, 2$. 上式に ϕ_K の展開

$$\phi_K = \phi_{K1} \varepsilon + \phi_{K2} \varepsilon^2 + \dots, \quad (38)$$

および境界近傍における次の展開

$$\frac{\partial \chi_\alpha}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \chi_\alpha}{\partial x_i} \right)_0 + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \chi_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 n_j \eta + \dots, \quad (\alpha = 1, 2), \quad (39)$$

$$\phi_H = (\phi_{H0})_0 + \varepsilon \left[(\phi_{H1})_0 + \left(\frac{\partial \phi_{H0}}{\partial x_i} \right)_0 n_i \eta \right] + \dots, \quad (40)$$

を代入し ε のべきで整理すると, ϕ_{Km} に対する方程式が得られる. 一方, ϕ_{Km} に対する境界条件は, $\phi_H + \phi_K$ が $\eta = 0$ において気体論的境界条件 (拡散反射条件) を満足することから

$$\phi_{Km} = \phi_{wm} - (\phi_{Hm})_0, \quad \zeta_i n_i > 0, \quad (\eta = 0), \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (41)$$

となる. 特に ϕ_{K1} に対する方程式と境界条件 ($\eta = 0$) は

$$\zeta_i n_i \frac{\partial \phi_{K1}}{\partial \eta} = \mathcal{L}(\phi_{K1}), \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \phi_{K1} = & (\sigma_{w1} - (\omega_{H1})_0) + 2\zeta_j (u_{jw1} - (u_{jH1})_0) + \left(\zeta_j^2 - \frac{3}{2} \right) (\tau_{w1} - (\tau_{H1})_0), \\ & + \zeta_i \zeta_j B(\zeta) \left(\frac{\partial u_{iH0}}{\partial x_j} \right)_0 + \zeta_i A(\zeta) \left(\frac{\partial \tau_{H0}}{\partial x_i} \right)_0, \quad \zeta_i n_i > 0, \quad (\eta = 0), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\sigma_{w1} = -2\sqrt{\pi} \int_{\zeta_j n_j < 0} \zeta_j n_j [\phi_{K1} + (\phi_{H1})_0] E d\zeta - \frac{\tau_{w1}}{2}. \quad (44)$$

ここで $\zeta = (\zeta_j^2)^{1/2}$, $A(\zeta)$ および $B(\zeta)$ は \mathcal{L} に関連する所定の線形積分方程式の解である⁵. 最後に ϕ_K が補正であることから

$$\phi_{Km} \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (45)$$

ϕ_{Km} に対する問題は線形化ボルツマン方程式の空間 1 次元半空間境界値問題であり, これに関連して次の Bardos の定理 [3, 1, 2] が知られている. 次の非同次線形化ボルツマン方程式の半空間境界値問題を考える.

$$\zeta_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \mathcal{L}(\phi) + I(x_1, \zeta_i), \quad x_1 > 0, \quad (46)$$

$$\phi = c_0 + c_2 \zeta_2 + c_3 \zeta_3 + c_4 \zeta_j^2 + g(\zeta_i), \quad x_1 = 0, \quad (47)$$

$$\phi \rightarrow 0, \quad x_1 \rightarrow \infty. \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\zeta_i A(\zeta)) &= -\zeta_i \left(\zeta^2 - \frac{5}{2} \right), \quad \text{subsidiary condition: } \int_0^\infty \zeta^4 A(\zeta) E d\zeta = 0, \\ \mathcal{L} \left(\left(\zeta_i \zeta_j - \frac{\zeta^2}{3} \delta_{ij} \right) B(\zeta) \right) &= -2 \left(\zeta_i \zeta_j - \frac{\zeta^2}{3} \delta_{ij} \right). \end{aligned}$$

ただし非同次項 I は $x_1 \rightarrow \infty$ のとき指数的に 0 に近づくものとする。このとき境界値問題の一意な解が存在して定数 c_0, c_2, c_3, c_4 は解とともに決まる。定理を今の問題に適用すると流体力学的方程式系に対する境界条件が得られる。

4.3 流体力学的方程式系に対する境界条件

ここではクヌーセン層の解析から求められる流体力学的方程式系に対する境界条件をまとめる。以下の公式では巨視量はすべて境界での値をとる。

Order ε^0

$$u_{iH0}n_i = 0, \quad u_{iH0}t_i = u_{iw0}t_i, \quad \tau_{H0} = \tau_{w0}. \quad (49)$$

Order ε^1

$$u_{iH1}n_i = 0, \quad (50a)$$

$$u_{iH1}t_i = u_{iw1}t_i - k_0 \left(\frac{\partial u_{iH0}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jH0}}{\partial x_i} \right) n_i t_j - K_1 \frac{\partial \tau_{H0}}{\partial x_i} t_i, \quad (50b)$$

$$\tau_{H1} = \tau_{w1} + d_1 \frac{\partial \tau_{H0}}{\partial x_i} n_i. \quad (50c)$$

Order ε^2

$$u_{iH2}n_i = -2b_1 \frac{\partial^2 u_{iH0}}{\partial x_j \partial x_k} n_i n_j n_k - b_2 \left(\frac{\partial^2 \tau_{H0}}{\partial x_i \partial x_j} n_i n_j + 2\bar{\kappa} \frac{\partial \tau_{H0}}{\partial x_i} n_i \right), \quad (51a)$$

$$\begin{aligned} u_{iH2}t_i &= u_{iw2}t_i - k_0 \left(\frac{\partial u_{iH1}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jH1}}{\partial x_i} \right) n_i t_j - K_1 \frac{\partial \tau_{H1}}{\partial x_i} t_i - a_1 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_{iH0}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jH0}}{\partial x_i} \right) n_j n_k t_i \\ &\quad - a_2 \bar{\kappa} \left(\frac{\partial u_{iH0}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jH0}}{\partial x_i} \right) n_i t_j - a_3 \kappa_{ij} \left(\frac{\partial u_{jH0}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{kH0}}{\partial x_j} \right) n_k t_i \\ &\quad - (a_4 - d_1 K_1) \frac{\partial^2 \tau_{H0}}{\partial x_i \partial x_j} n_i t_j - a_5 \bar{\kappa} \frac{\partial \tau_{H0}}{\partial x_i} t_i - (a_6 - d_1 K_1) \kappa_{ij} \frac{\partial \tau_{H0}}{\partial x_i} t_j, \end{aligned} \quad (51b)$$

$$\tau_{H2} = \tau_{w2} + d_1 \frac{\partial \tau_{H1}}{\partial x_i} n_i + 2d_4 \frac{\partial^2 u_{iH0}}{\partial x_j \partial x_k} n_i n_j n_k + d_3 \frac{\partial^2 \tau_{H0}}{\partial x_i \partial x_j} n_i n_j + d_5 \bar{\kappa} \frac{\partial \tau_{H0}}{\partial x_i} n_i, \quad (51c)$$

$$\bar{\kappa} = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2), \quad \kappa_{ij} = \kappa_1 \ell_i \ell_j + \kappa_2 m_i m_j. \quad (52)$$

ここで t_i は n_i に直交する単位ベクトル ($n_i t_i = 0$), κ_1/L および κ_2/L は境界の 2 つの主曲率, ℓ_i, m_i は $\kappa_1/L, \kappa_2/L$ に対応する主方向の方向余弦で, κ_1, κ_2 は対応する曲率の中心が気体側にあるとき負の値をとる。 $k_0, K_1, a_1, \dots, a_6, b_1, b_2, d_1, d_3, \dots, d_5$ はすべりおよび跳びの係数とよばれ [3, 4], 分子モデルに依存する定数である⁶。これらの値に対しては従来より知られていた BGK 方程式に対するものに加え, 最近剛体球分子に対する値がすべて求められた [6, 7]。表 1 に値を示す。なお, 得られた境界条件は線形化ボルツマン方程式に基づいた結果 [3, 4] と同型であり, 境界条件に非線形性の影響は ε の 2 次までは現れない。

5 非圧縮性ナビエ・ストークス方程式系の適用性

前節ではボルツマン方程式の漸近解析により気体の定常的振る舞いを記述する流体力学的方程式系およびその境界条件を Kn の 2 次まで導出した。3 節の最後に述べたようにレイノルズ数は $Re \sim Kn$ であり,

⁶本稿では拡散反射を仮定しているが一般に気体論的境界条件にも依存する。

表 1: Slip and jump coefficients for a hard-sphere gas molecules (HS) and for the BGK model in the case of the diffuse reflection condition. The data are taken from [3, 4, 7].

first-order slip & jump						
	k_0	K_1	d_1			
HS	-1.2540	-0.6465	2.4001			
BGK	-1.01619	-0.38316	1.30272			
second-order slip						
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
HS	0.9039	0.6601	-0.2438	0.0330	0.2336	-1.9987
BGK	0.76632	0.50000	-0.26632	0.27922	0.26693	-0.76644
second-order jump						
	d_3	d_4	d_5	b_1	b_2	
HS	0.4992	0.0087	4.6181	0.1068	0.4782	
BGK	0	0.11169	1.82181	0.11684	0.26693	

解をクヌーセン数の展開形で求めたことは、流れの諸量をレイノルズ数で展開したことに相当する。それを反映して流体力学的方程式 (22)–(24) は NS 方程式をレイノルズ数で展開して得られる方程式系に類似している。たとえば (23a)–(23c) は非圧縮性流体に対するストークス方程式と温度に対するラプラス方程式であり、(24a) および (24b) は NS 方程式をレイノルズ数展開した際の Re^1 オーダーの式にあたる。しかし ε (Re) の 2 次に対する式 (25a)–(25c) は非圧縮性 NS 方程式には含まれない項 (圧縮性の効果と希薄化の効果⁷⁾ が含まれている。また (25b) の γ_4 に比例する項は粘性係数が温度によって変化することによる寄与を表しており、2 次の流速 (u_{iH_2}) を正しく求めるためには (非圧縮性流体に対して通常取り扱われない) 温度情報を適切に取り入れる必要があることを示唆している。次に境界条件に着目すると、 ε^0 次に対する境界条件 (49) はすべりなしおよび跳びなし (粘着) の条件である。しかしそれより高次では境界条件はすべりおよび跳びの条件となり、 ε^2 では境界の曲率の影響が現れる [(50) および (51) を参照]。

以上をまとめると、レイノルズ数が微小である流れにおいてストークス近似で得られる以上の精度を要求する場合は注意が必要である。非圧縮性 NS 方程式とすべりなしの境界条件では正しい流れ場が得られない。レイノルズ数の 1 次で境界における速度のすべりと温度の跳びを考慮しなければならず、レイノルズ数の 2 次では圧縮性や輸送係数の温度依存性を考慮しなければならない。このことは流体力学であまり認識されていないように感じる。

6 謝辞

曾根良夫京都大学名誉教授には有意義な示唆を頂いた。ここに謝意を表す。本研究は一部 JSPS 科研費 25820041 の助成を受けた。

⁷⁾ γ_3 を含む項で熱応力の寄与。

参考文献

- [1] C. Bardos, R. E. Caflisch, and B. Nicolaenko. The Milne and Kramers problems for the Boltzmann equation of a hard sphere gas. *Commun. Pure Appl. Math.*, 39(3):323–352, 1986.
- [2] F. Coron, F. Golse, and C. Sulem. A classification of well-posed kinetic layer problems. *Commun. Pure Appl. Math.*, 41(4):409–435, 1988.
- [3] Y. Sone. *Kinetic Theory and Fluid Dynamics*. Birkhäuser, Boston, 2002.
- [4] Y. Sone. *Molecular Gas Dynamics: Theory, Techniques, and Applications*. Birkhäuser, Boston, 2007.
- [5] S. Taguchi. Asymptotic theory of a uniform flow of a rarefied gas past a sphere at low Mach numbers. (in preparation).
- [6] S. Takata and M. Hattori. Asymptotic theory for the time-dependent behavior of a slightly rarefied gas over a smooth solid boundary. *J. Stat. Phys.*, 147(6):1182–1215, 2012.
- [7] S. Takata and M. Hattori. On the second-order slip and jump coefficients for the general theory of slip flow. *AIP Conf. Proc.*, 1501(1):59–66, 2012.
- [8] W. G. Vincenti and C. H. Kruger. *Introduction to Physical Gas Dynamics*. Krieger, Florida, 1967.