数理解析研究所講究録
第 1948 巻 2015 年 49-56

チーガー定数とpラプラシアンとグロモフ・ハウスドルフ収束

九州大学 数理学研究院　本多正平
Shouhei Honda
Faculty of Mathematics,
Kyushu University

1 イントロダクション

本稿は研究集会【可微分写像の特異点論とその応用】でお話させていただいた内容の紹介にいくつかの補足を付け足したものである．そこで紹介した主結果は次であった：

定理 1.1. *[10]* nを正の整数，Kを実数とし，Mをn次元コンパクトリーマン多様体で，

$$(\mathrm{diam}\, M)^2 \mathrm{Ric}_M \geq K(n-1) \tag{1}$$

を満たすものとする．このとき任意の$p \in (1, \infty)$に対して

$$C_1(n,K)h(M) \leq (\lambda_{1,p}(M))^{1/p} \leq C_2(n,K)h(M)$$

が成り立つ．ここで，$\mathrm{diam}\, M$はMの直径であり，Ric_MはMのリッチ曲率，$\lambda_{1,p}(M)$はMのpラプラシアンの正の第一固有値，$h(M)$はMのチーガー定数，$C_i(n,K)$はnとKにのみ依存するある正の定数である．

まだ未定義用語を解説していない状況ではあるが，この定理 1.1 の結論についてコメントを与える．pラプラシアンの第一固有値の評価には多くの研究がある（例えば [13, 14, 15, 17, 18]）が，それらの多くはpに依存する形で現れる．しかし，定理 1.1 はpによらないものとなっており，そのような初めての不等式となっている．また，定理 1.1 をチーガー定数の評価式とみれば，これは新しい等周不等式を与えている．

この定理の証明にはグロモフ・ハウスドルフ収束が，すなわちリーマン多様体の収束理論が用いられる．そこで，以下では未定義用語の解説と証明のアイデアについてまずは解説したい．

本研究は科学研究費若手研究 (B) 24740046 の助成を受けたものである．

2 チーガー定数

M を n 次元コンパクトリーマン多様体とする．M のチーガー定数 $h(M)$ とは次のようにして定義される：

$$h(M) := \inf_{\Omega} \frac{\mathrm{Area}\,\partial\Omega}{\mathrm{vol}\,\Omega}.$$

ここで下限は滑らかな境界を持つ M の開集合 Ω で $\mathrm{vol}\,\Omega \leq \mathrm{vol}\,M/2$ を満たすもの全体に渡ってとる．

このチーガー定数は M のラプラシアンの正の第一固有値 $\lambda_1(M)$ と関係がある．それを次に紹介しよう：

定理 2.1 (チーガー [2]). 次が成り立つ：

$$\frac{(h(M))^2}{4} \leq \lambda_1(M).$$

この不等式はチーガー定数を上から固有値で評価したものであり，ある意味で最良であることも知られている [4].

逆にチーガー定数を下から評価することもできる．それはリッチ曲率と関わりビューザーによる：

定理 2.2 (ビューザー [1]). *(1)* の仮定の下，次が成り立つ：

$$\lambda_1(M) \leq C_3(n, K)(h(M))^2.$$

以上の二つの定理をまとめると次のような不等式が得られたことになる：

$$\frac{h(M)}{2} \leq (\lambda_1(M))^{1/2} \leq C_4(n, K)h(M). \tag{2}$$

この不等式は定数倍を除いてチーガー定数とラプラシアンの正の第一固有値の平方根が本質的に同じであることを意味している（従って定理 1.1 は p ラプラシアンの正の第一固有値の $1/p$ 乗は p によらず全てチーガー定数と本質的に同じであることを主張している）．

最後に，チーガー定数は次のような関数的な表示を持つことが知られていることをコメントしてこの章を終える [16]：

$$h(M) = \inf_{f \in \mathrm{LIP}(M)} \frac{\|\nabla f\|_{L^1(M)}}{\inf_{c \in \mathbf{R}} \|f - c\|_{L^1(M)}}. \tag{3}$$

ここで，一般に距離空間 X に対して，その上のリプシッツ関数全体からなる線形空間を $LIP(X)$ と表す．

3 pラプラシアン

Mを先と同じとする．Mのpラプラシアン, $\Delta_{(p)}$，とは次の作用素のことであり，

$$\Delta_{(p)} f := -\mathrm{div}(|\nabla f|^{p-2} \nabla f)$$

pラプラシアンの固有値λとは，

$$\Delta_{(p)} f = \lambda |f|^{p-2} f$$

となる非自明なfが弱解の意味で存在するときを言う．

変分法を用いて，pラプラシアンの正の第一固有値$\lambda_{1,p}(M)$については次の表示が知られている：

$$\lambda_{1,p}(M) = \inf_{f \in \mathrm{LIP}(M)} \frac{||\nabla f||^p_{L^p(M)}}{\inf_{c \in \mathbf{R}} ||f - c||^p_{L^p(M)}}. \tag{4}$$

2ラプラシアンは通常のラプラシアンである．すなわち$\lambda_{1,2}(M) = \lambda_2(M)$であることに注意してほしい．

$p \neq 2$のときはpラプラシアンは非線形であり，その解析はとても難しい．例えばその難しさを表す典型的な性質として，$\lambda_{1,p}(M)$の固有関数は必ずC^2ではない．

最後に$\mathrm{Ric} \geq 0$の場合の，pラプラシアンの正の固有値の下からの最良評価を紹介しよう：

定理 3.1 (ヴァルトルタ [18]). もしMが非負のリッチ曲率を持てば，次が成り立つ．

$$\lambda_{1,p}(M) \geq \frac{(2\pi)^p (p-1)}{p^p \sin^p(\pi/p) (\mathrm{diam}\, M)^p}.$$

以上で主定理の主張における用語の解説は終わった．次にその証明に必要となるグロモフ・ハウスドルフ収束について解説する．

4 グロモフ・ハウスドルフ収束

いきなりではあるが定義を与えよう：

定義 4.1 (グロモフ, 深谷 [7, 5]). X_iをコンパクト距離空間の列で，υ_iをX_i上のボレル確率測度とする ($i \leq \infty$)．このとき，組(X_i, υ_i)が$(X_\infty, \upsilon_\infty)$にグロモフ・ハウスドルフ収束する，とはボレル可測な写像の列$\phi_i : X_i \to X_\infty$と，0に収束する正の実数列$\epsilon_i$が存在して以下の3条件が成り立つことを言う：

1. (ϕ_iはおおむね距離を保つ) 任意のiと任意の$x_i, y_i \in X_i$に対して$|d_{X_i}(x_i, y_i) - d_{X_\infty}(\phi_i(x_i), \phi_i(y_i))| < \epsilon_i$が成り立つ．

2. (ϕ_i はおおむね全射である)$X_\infty = B_{\epsilon_i}(\phi_i(X_i))$ が任意の i で成り立つ．ここで $B_r(A)$ で A の r 近傍を表す．

3. (v_i は v_∞ に弱収束する)v_i の ϕ_i による押しだし測度，$(\phi_i)_* v_i$，が X_∞ 上で v_∞ に弱収束する．

これによってコンパクト距離空間とその上のボレル確率測度の組 (X, v) の同型類からなる集合，$\mathcal{M}$，に位相を入れることができる．より正確には $\mathcal{M}$ には自然な，測度付きグロモフ・ハウスドルフ距離，とでもいうべき距離があって，その距離構造から定まる位相と上の定義が両立するというのが正確な主張であるが，その詳細は省略する．

次のようなコンパクト性定理が知られており，リーマン多様体の収束理論の原点といえる：

定理 4.2 (Gromov，深谷 [7, 5])．自然数 n，実数 K，正の実数 d に対して，リッチ曲率が $K(n-1)$ 以上，直径が d 以下の n 次元コンパクトリーマン多様体 M と，その上の自然なリーマン確率測度の組 $(M, \mathrm{vol}/\mathrm{vol}\, M)$ の同型類からなる集合を $\mathcal{M}(n, K, d)$ で表す．このとき，$\mathcal{M}(n, K, d)$ の $\mathcal{M}$ における閉包 $\overline{\mathcal{M}(n, K, d)}$ はコンパクトである．

定理 1.1 の証明にはグロモフ・ハウスドルフ収束を用いると述べた．それに関して鍵となる事実は二つあり，一つがこのコンパクト性定理である．もう一つは深谷によるある予想（現在はすでに解かれている）と関わる．そこでに次にその予想について紹介しよう．

5 深谷の予想（チーガー・コールディングの定理）

深谷は [5] で次を予想した：

予想 5.1 (深谷 [5])．各 $k \geq 1$ に対して，$\lambda_k : \overline{M(n, K, d)} \to (0, \infty]$ は連続である．ここで，λ_k はラプラシアンの正の第 k 固有値を表し，それが無限大の値を取る時は一点とその上のディラック測度の組のときに限る．

この予想はいくつかの主張を含んでいる．列挙すると：

1. 各 $(X, v) \in \overline{M(n, K, d)}$ に対してその上の自然なラプラシアンを定義せよ．

2. そのスペクトルが離散的であることを示せ．

3. λ_k の連続性を示せ．

ここまでが予想である．

ちなみに深谷はこの予想を断面曲率の絶対値を抑えるというより強い状況で，部分的に解いて見せた．

この予想は提出されてからおおよそ十年後，チーガー・コールディングによって解かれた．すなわち：

定理 5.2 (チーガー・コールディング [3]). *予想 5.1 は正しい.*

この証明についてはここでは立ち入らない．ただ，各 $(X, v) \in \overline{M(n, K, d)}$ に対して，リーマン多様体のときと同様，最小・最大原理が成り立つことに注意しておく．特に正の第一固有値 $\lambda_1(X)$ については次のような表示を持つ：

$$\lambda_1(X) = \inf_{f \in \mathrm{LIP}(X)} \frac{\|\nabla f\|^2_{L^2(X)}}{\inf_{c \in \mathbf{R}} \|f - c\|^2_{L^2(X)}}.$$

そこで，(X, v) のチーガー定数，p ラプラシアンの正の第一固有値も (3)，(4) の右辺を逆手にとって定義してしまうことにする．

以上で主結果の証明のアイデアを述べる準備が整った．そこで次にそれを紹介しよう．

6 証明

定理 1.1 の証明に必要なもう一つの鍵となる定理を紹介しよう．それは粗く言って第一固有値に関する定理 5.2 の非線形への一般化である．

$\overline{M(n, K, d)} \times [1, \infty]$ から $(0, \infty]$ への写像 F を次で定める：

$$F((X, v), p) := \begin{cases} 2(\operatorname{diam} X)^{-1} & (p = \infty), \\ (\lambda_{1,p}(X))^{1/p} & (1 < p < \infty), \\ h(X) & (p = 1). \end{cases}$$

次の予想を述べる：

予想 6.1 (本多). F は連続である.

この予想の部分的な解決を与えるのが次であり，それが残りの鍵となる：

定理 6.2. *[10]*

1. *F は上半連続である.*

2. *F は $\overline{M(n, K, d)} \times (1, \infty]$ 上では連続である.*

3. *任意の $(X, v) \in \overline{M(n, K, d)}$ に対して，F は $\{(X, v)\} \times [1, \infty]$ 上で連続である.*

証明は次のようにする．まずグロモフ・ハウスドルフ収束の枠組みで L^p 収束の概念を確立する．そして古典的に知られているレーリッヒ型のコンパクト性定理をその枠組みで証明する．それを用いると有限の p について上の主張が示せる．それにグロスジーンによる結果 [8] の証明を組み合わせると p が無限大のときに関する主張が得られ，定理 6.2 の証明が完成する．

この定理に「コンパクトな空間上定義された連続関数は最大値，最小値を持つ」という位相空間論でよく知られた事実を組み合わせれば定理 1.1 が得られる．すなわち，定理 6.2 の系として定理 1.1 を示す，これが証明のあらすじである．

では次に定理 6.2 を用いて得られる別の応用について紹介して本稿を終えよう．

7 応用

まずは定理 1.1 の直接の系として得られる次を注意したい．

系 7.1. *[10] 定理 1.1 と同じ設定の下，*

$$C_5(n,K) \le \frac{(\lambda_{1,p}(M))^{1/p}}{(\lambda_{1,q}(M))^{1/q}} \le C_6(n,K)$$

が任意の $p,q \in (1,\infty)$ に対して成り立つ．

この系は $(\lambda_{1,p}(M))^{1/p}$ が本質的には p にはよらず，全て同じような値を与えることを意味している．実際この系から，ある p で $(\lambda_{1,p}(M))^{1/p}$ が大きい（or 小さい）とすると，全ての q で $(\lambda_{1,q}(M))^{1/q}$ も大きい（or 小さい）ことがわかる．

次も紹介しよう：

定理 7.2. *[10] 任意の (X,v) に対して，$[1,\infty)$ 上の関数*

$$p(\lambda_{1,p}(X))^{1/p}$$

は単調増大である．

これはコンパクトリーマン多様体で，かつ $(1,\infty)$ 上で考えたときがマテイ [15] によるもので，定理 6.2 と組み合わせるとこの定理が得られる．

これを使うと，1 と $p \in (1,\infty)$ のときの値を比べることで，

$$h(X) \le p(\lambda_{1,p}(X))^{1/p}$$

という不等式を得ることができる．これは $p=2$ のときが定理 2.1 の極限空間版に対応し，さらに X がリーマン多様体のときであってもこの論法は定理 2.1 の別証明を与える．

また，ボンネ・マイヤースの定理，リヒネロヴィッツ・小畠の定理，レヴィ・グロモフの定理を '連続的につないだ' かつ '極限空間へ一般化した' 次を紹介しよう：

定理 7.3. *[10] 任意の $(X,x,v) \in \overline{M(n,1,\pi)}$ と任意の $p \in [1,\infty]$ に対して*

$$(\lambda_{1,p}(X))^{1/p} \ge (\lambda_{1,p}(\mathbf{S}^n))^{1/p}$$

が成り立つ．さらにある $p \in (1,\infty]$ で等号が成り立つための必要十分条件は，全ての $p \in (1,\infty]$ で等号が成り立つことと同じで，特に $\mathrm{diam}\, X = \mathrm{diam}\, \mathbf{S}^n (=\pi)$ が成り立つこととと同値であり，X があるコンパクト距離空間の球面懸垂となることとも同値である．

この定理で $p=\infty$ のときがボンネ・マイヤースの定理に，$p=2$ のときがリヒネロヴィッツ・小畠の定理，そして $p=1$ のときがレヴィ・グロモフの定理に対応する．また，上の定理の最後の剛性に関する主張で $p=1$ に関する主張が外されているが，たぶん $p=1$ まで入れても正しい．実際もし予想 6.1 が正しければそれは従う．

系 7.4. *[10]* 任意の $\epsilon>0$，任意の $1<p_1<\infty$ と任意の $n\in\mathbf{N}$ に対して，ϵ と p_1 と n にのみ依存する正の定数 $\delta:=\delta(\epsilon,p_1,n)>0$ が存在して，以下をみたす：M を n 次元コンパクトリーマン多様体で，$\mathrm{Ric}_M\geq n-1$ かつ，ある $p_1\leq p\leq\infty$ で

$$\left|(\lambda_{1,p}(M))^{1/p}-(\lambda_{1,p}(\mathbf{S}^n))^{1/p}\right|<\delta$$

を満たせば，

$$\left|(\lambda_{1,\hat{p}}(M))^{1/\hat{p}}-(\lambda_{1,\hat{p}}(\mathbf{S}^n))^{1/\hat{p}}\right|<\epsilon$$

が任意の $p_1\leq\hat{p}\leq\infty$ で成り立つ．

証明は定理 7.3 を用いた背理法で簡単に示せる．

最後に次の注意を与えて本稿を終えよう．定理 3.1 で $p\to 1$ とすると，定理 6.2 より

$$h(M)\geq\frac{2}{\operatorname{diam}M}$$

という不等式が得られるが，これはギャロによりすでに知られており，その別証明を与える [6]．また，リッチ曲率が非負な極限空間でもこの不等式は正しい．

References

[1] P. Buser, A note on the isoperimetric constant, Ann. Sci. École Norm. Sup. 15 (1982), 213-230.

[2] J. Cheeger, A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian, In Problems in analysis (Papers dedicated to Salomon Bochner, 1969), pages 195-199. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.

[3] J. Cheeger and T. H. Colding, On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, III, J. Differential Geom. 54 (2000), 37-74.

[4] B. Colbois and A. -T. Matei, On the optimality of J. Cheeger and P. Buser inequalities, Differential Geom. Appl. 19 (2003), 281-293.

[5] K. Fukaya, Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of the laplace operator, Invent. Math. 87 (1987), 517-547.

[6] S. GALLOT, A Sobolev inequality and some geometric application, in Spectra of Riemannian manifolds, Kaigai, Tokyo, (1983), 45-55.

[7] M. GROMOV, Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces, Birkhauser Boston Inc, Boston, MA, 1999, Based on the 1981 French original [MR 85e:53051], With appendices by M. Katz, P. Pansu, and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.

[8] J.-F. GROSJEAN, p-Laplace operator and diameter of manifolds, Ann. Global Anal. Geom. 28 (2005), 257-270.

[9] S. HONDA, Ricci curvature and L^p-convergence, arXiv:1212.2052, Crelle, to appear.

[10] S. HONDA, Cheeger constant, p-Laplacian, and Gromov-Hausdorff convergence, arXiv:1310.0304.

[11] 本多正平 Ricci 曲率が有界な空間の構造，数学，to appear.

[12] S. HONDA L^p-spectral gap and Gromov-Hausdorff convergence, Real and Complex Submanifolds Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 106, (2014), 371-378.

[13] S. KAWAI AND N. NAKAUCHI, The first eigenvalue of the p-Laplacian on a compact Riemannian manifold, Nonlinear Anal. 55 (2003), 33-46.

[14] A.-M. MATEI, First eigenvalue for the p-Laplace operator, Nonlinear Anal. 39 (2000), 1051-1068.

[15] A.-M. MATEI, Boundedness of the first eigenvalue of the p-Laplacian, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), 2183-2192.

[16] E. MILMAN, On the role of convexity in isoperimetry, spectral gap and concentration, Invent. Math. 177 (2009), 1-43.

[17] A. NABER AND D. VALTORTA, Sharp estimates on the first eigenvalue of the p-Laplacian with negative Ricci lower bound, Math. Z. 277 (2014), 867-891.

[18] D.VALTORTA, Sharp estimate on the first eigenvalue of the p-Laplacianwith nonnegative Ricci curvature, Nonlinear Anal. 75 (2012), 4974-4994.