数理解析研究所講究録
第1950巻 2015年 40-51

中間述語論理における Existence Propertyに関する注意*

静岡大学・理学部数学教室 鈴木信行
Nobu-Yuki Suzuki
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Shizuoka University

Abstract

An intermediate predicate logic $\mathbf{L}$ is said to have the *existence property* (EP) if for every $\exists x A(x)$, $\mathbf{L} \vdash \exists x A(x)$ implies that there is an individual variable v such that $\mathbf{L} \vdash A(v)$. We discuss relationships between EP and its two weak variants in intermediate predicate logics. One variant is the *weak existence property* (wEP): if $\mathbf{L} \vdash \exists x A(x)$, then for every non-empty finite set $\{v_1, \ldots, v_n\}$ of variables that contains all free variables of $\exists x A(x)$, it holds that $\mathbf{L} \vdash A(v_1) \vee \cdots \vee A(v_n)$. Another one is the *sentential existence property* (sEP): if $\mathbf{L} \vdash \exists x A(x)$ and $\exists x A(x)$ is a sentence, then there exists a *fresh* individual variable v such that $\mathbf{L} \vdash A(v)$. These weak variants arose from the consideration of relations between EP and the disjunction property in our previous work. It is easy to see that EP implies wEP, and wEP implies sEP. We show that the converses of these implications do not hold.

1 導入

中間述語論理とは、大雑把に言って、直観主義述語論理と古典述語論理の「中間」にある述語論理である。また、existence property (EP) は、disjunction property (DP) と並んで、直観主義論理が持つ興味深い特性である。これらの特性は直観主義論理の構成性 (constructivity) を示す顕著な特徴と考えられている。本稿ではEPを中間述語論理の枠組みで考察し、幾つかの結果を得たので、現時点での成果を報告する。

本節の残りでは、中間述語論理とEPの、ごく簡単な導入を行う。第2節では、S[18] で示したEPとDPの相互関係について紹介する。第3節では、EPの2つの弱い変種に関する進行中の研究の一部を紹介する。これらの弱い変種は、第2節で紹介した議論に由来する。第4節では、まとめと今後の研究に関わる幾つかの注意を述べる。

*本研究は、日本学術振興会 科学研究費補助金 基盤研究 (C) 課題番号 24540120 の助成を受けて行われたものです。(Supported in part by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 24540120, Japan Society for the Promotion of Science.) 本稿は、筆者の現在進行中の研究の要旨です。This is an extended abstract of the author's work in progress.

言語として pure first-order language $\mathscr{L}$ を用いる。この $\mathscr{L}$ は、論理結合子として $\vee$ (disjunction), $\wedge$ (conjunction), $\supset$ (implication), $\neg$ (negation), quantifiers として $\exists$ (existential quantifier) と $\forall$ (universal quantifier) を持つ。また、可算無限個の個体変数と、各 $m < \omega$ について m 変数 (m-ary) の述語変数 (predicate variable) を可算無限個持つ。0 変数述語変数は命題変数と同一視する。$\mathscr{L}$ には個体定数も関数記号も無く、等号 $(=)$ も無い事に注意せよ。

定義 1.1 $\mathscr{L}$ の論理式の集合 $\mathbf{L}$ は、以下の 3 条件を満たすとき、**中間述語論理** (intermediate predicate logic) であるという。

(Q1) $\mathbf{L}$ は、直観主義述語論理 $\mathbf{H}_*$ で証明可能な論理式をすべて含む。
(Q2) $\mathbf{L}$ に含まれる論理式は、すべて古典述語論理 $\mathbf{C}_*$ で証明可能である。
(Q3) $\mathbf{L}$ は、以下の 3 つの推論規則に関して閉じている:
modus ponens (from A and $A \supset B$, infer B), generalization (from A, infer $\forall x A$), uniform substitution[1] for predicate variable.

$\mathscr{L}$ の論理式の集合 $\mathbf{L}$ は、(Q1) と (Q3) を満たすとき、**超直観主義的述語論理** (super-intuitionistic predicate logic) と呼ばれる。より詳しくは、Ono[11, 12], S[18], Gabbay-Shehtman-Skvortsov [4] などを参照して欲しい。同様にして、中間命題論理、超直観主義的命題論理を定義することができる (例えば Chagrov-Zakharyaschev [1] を参照)。

この定義は、論理 $\mathbf{L}$ と、$\mathbf{L}$ で証明可能な論理式の全体: $\{A : \mathbf{L} \vdash A\}$ を同一視したものになっている。今後は「論理式 A は論理 $\mathbf{L}$ で証明可能」「$\mathbf{L} \vdash A$」「$A \in \mathbf{L}$」などの表現を特に断らずに自由に使う。また、述語論理 $\mathbf{L}$ と論理式 A (論理式の集合 S) に対して、$\mathbf{L} + A$ ($\mathbf{L} + S$, resp.) で、$\mathbf{L} \cup \{A\}$ ($\mathbf{L} \cup S$, resp.) を部分集合として含む最小の超直観主義的述語論理を表す。本稿では、A が $\exists x p(x) \supset \forall x p(x)$ の場合が重要である。この論理式を Z_1 と書く (Ono [11] を参照せよ)。命題論理 $\mathbf{J}$ に対して、$\mathbf{J}^* = \mathbf{H}_* + \mathbf{J} + Z_1$ は、(超直観主義的述語論理での) **最大述語拡大**と呼ばれ、その命題部分は $\mathbf{J}$ に一致する。

本稿の主題を導く existence property の概念を導入しよう。

定義 1.2 論理式 A が論理式 B と**合同** (congruent) であるとは、(1) A が B から束縛変数の alphabetic change によって得られ、(2) その alphabetic change によって個体変数の自由な出現箇所 (free occurrences) は、どれも新しく束縛されない、こととする (Kleene [6, p.153] を参照)。述語論理 $\mathbf{L}$ が *existence property* (EP) を持つとは、$\mathbf{L}$ で証明可能な任意の $\exists x A(x)$ に対して、$A(x)$ と合同な $\widetilde{A}(x)$ と、$\widetilde{A}(x)$ の x に代入可能な個体変数 v とが存在して、$\widetilde{A}(v)$ が $\mathbf{L}$ で証明可能であることとする。

今後混同の恐れが無い限り、合同な論理式を特に区別せずに書く。また、個体変数の代入可能性が随時成立する様に、論理式を合同なものに暗黙の裡に変形してあると仮定することにしよう[2]。すると、$\mathbf{L}$ が EP を持つとは、任意の $\exists x A(x)$ に対して次が成立することである、と書ける;

$\mathbf{L} \vdash \exists x A(x) \Rightarrow$ ある個体変数 v が存在して $\mathbf{L} \vdash A(v)$.

[1]Church [2, pp.192–193] の Š を参照せよ。

[2]自由変数と束縛変数を言語の設計段階から区別する体系 (e.g., Gentzen [5], Prawitz [13]) であれば、この辺りはあまり気にしないでよい。以下はその様な言語で書かれていると思って読む方が解りやすい。本稿では、中間述語論理の諸文献の常道に従って pure language を用いる。それに伴って記述の正確を期せば、煩瑣になってしまうので、このようにさせていただく。

2 Existence property と disjunction property

EP と類似の性質に次の disjunction property (DP) がある。

定義 2.1 論理 $\mathbf{L}$ が *disjunction property* (DP) を持つとは、$\mathbf{L}$ で証明可能な任意の $A \vee B$ に対して、$\mathbf{L} \vdash A$ または $\mathbf{L} \vdash B$ が成り立つこととする。

直観主義述語論理は EP と DP を共に持つ。EP と DP は直観主義論理の構成性を示す顕著な特徴と考えられている。しかし、EP と DP は「直観主義論理の構成性」を示す特徴であって、中間論理において直観主義論理を特徴付けるものではない。

命題 2.2 (1) $\mathbf{LD} = \mathbf{H}_* + \forall x(p(x) \vee q) \supset (\forall x p(x) \vee q)$ は *EP* と *DP* を持つ。ここで、p は *1* 変数述語変数、q は命題変数である。(Komori[7], Nakamura[10], 梅沢 [21])

(2) *EP* と *DP* を持つ中間述語論理は非可算無限個存在する (Ferrari-Miglioli[3], S[15])

では、EP と DP の相互関係はどうか？EP と DP はいつも同時に現れるのかと言えば、そうとは限らない。次の中村の 1983 年の結果が知られている。

命題 2.3 (Nakamura[10]) $\mathbf{H}_* + \exists x(p(x) \supset \forall y p(y))$ 及び $\mathbf{H}_* + \exists x(\exists y p(y) \supset p(x))$ は *DP* を持つが *EP* を持たない。即ち、*DP* を持つが *EP* を持たない中間述語論理が存在する。

つまり、中間述語論理において、DP は EP を導かない。では、逆はどうか？先ほど DP は「EP と類似」と表現したが、それは「∃ は無限個の ∨」というよくある感覚:

$$\exists x A(x) = \bigvee_{x \in D} A(x)$$

による。すると、「EP は強力な DP」という見方も説得力がある。実際、具体的な例で EP を持つことを示すと同じアイデアで DP が導かれることが、多く経験されてきている。これが一般的に成立するか？を問うのが、1987 年に発表された**小野の問題 P52** である[3]。

問題 2.4 (Ono's problem P52 [12]) 中間述語論理において、*EP* は *DP* を導くか？ (*cf.* Minari[8], 梅沢 [21])

S[18] に於いて、これに否定的解決を与えた。即ち、EP を持ち DP を持たない中間述語論理が存在する。以下にその結果と関連して得られた知見を述べる。

2.1 EP と DP は独立である: 小野の問題 P52 の否定的解決

議論を容易にするために、超直観主義的述語論理の範囲で議論する。以下では、特に断らない限り、超直観主義的述語論理を単に論理と言う。

小野の問題 P52(問題 2.4) を否定的に解決するために、EP を持ち DP を持たない中間述語論理を作りたい。そこで、比較不能な 2 つの論理 $\mathbf{L}$ と $\mathbf{K}$ (即ち $\mathbf{L} \not\subseteq \mathbf{K}$ かつ $\mathbf{K} \not\subseteq \mathbf{L}$) を用意し、共通部分の論理 $\mathbf{L} \cap \mathbf{K}$ を作る。すると、$\mathbf{L} \cap \mathbf{K}$ は DP を持たない (*cf.* S[16])。よって、適切な 2 つの比較不能な論理を用意して、それらの共通部分が EP を持つようにできればよい。さらに一方が中間述語論理であれば、共通部分も中間述語論理になる。その為の工夫として、次の定義を導入する。この概念は超直観主義的述語論理でこそ意味を持つ。

[3] Ono's problems として知られる一群の問題の 1 つである。(Ono [12])

定義 2.5 論理 $\mathbf{L}$ が *extreme existence property* (eEP) を持つとは、$\mathbf{L}$ で証明可能な任意の $\exists x A(x)$ に対して、$\underline{\exists x A(x) \text{ に出現しない}}$ 個体変数 v が存在して、$A(v)$ が $\mathbf{L}$ で証明可能であることとする。

補題 2.6 $\mathbf{L}$ が *EP* を持ち、$\mathbf{K}$ が *eEP* を持てば、$\mathbf{L} \cap \mathbf{K}$ は *EP* を持つ。

補題 2.6 における $\mathbf{K}$ として一番簡単な $\mathbf{H}^* = \mathbf{H}_* + Z_1 = \mathbf{H}_* + \exists x p(x) \supset \forall x p(x)$ を取ることにする。$\mathbf{H}^*$ は明らかに eEP を持つ。次に、$\mathbf{L}$ として命題部分が $\mathbf{H}_*$ と異なり、EP を持つ論理が得られればよい。ここで次の定義を導入する。

定義 2.7 論理 $\mathbf{L}$ が *weak existence property* (wEP) を持つとは、$\mathbf{L}$ で証明可能な任意の $\exists x A(x)$ と個体変数の任意の空でない有限集合 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ で $\exists x A(x)$ の自由変数をすべて含むものに対して、$A(v_1) \vee \cdots \vee A(v_n)$ が $\mathbf{L}$ で証明可能であることとする。

論理が wEP と共に DP を持てば、その論理は EP(と同時に DP) を持つ。この手順を使って、Prawitz [13] と Komori [7] は $\mathbf{H}_*$ と $\mathbf{LD}$ の EP をそれぞれ示している。

補題 2.8 *Kripke base (即ち underlying partially ordered set) が finite binary tree である Kripke frames の全体で特徴付けされる論理を* $\mathbf{L}_0$ *とする*[4]。$\mathbf{L}_0$ *は、wEP を持ち、かつ、DP を持つ。よって EP も持つ。*

補題 2.9 補題 *2.8* の $\mathbf{L}_0$ において、Z_1 は証明不可能であり、次の GJ は証明可能である。

$$GJ \ : \ \bigwedge_{i=0}^{2} ((p_i \supset \bigvee_{j \neq i} p_j) \supset \bigvee_{j \neq i} p_j) \supset \bigvee_{i=0}^{2} p_i$$

そして、GJ は $\mathbf{H}^*$ では証明不可能である。よって、$\mathbf{L}_0$ と $\mathbf{H}^*$ は比較不能である。

$\mathbf{L}_0$ は中間述語論理であるから、$\mathbf{L}_0 \cap \mathbf{H}^*$ は、EP を持ち DP を持たない中間述語論理である。かくして、小野の問題 P52 の否定的解決が得られた。まとめると:

定理 2.10 中間述語論理において、*EP* と *DP* は独立である。

注意 2.11 (1) ほぼ同様に、$\mathbf{LD} + GJ \vee Z_1$ が EP を持ち DP を持たないことが示せる。これは有限公理化可能な論理による反例となっている。

(2) この形 $(\mathbf{L} \cap \mathbf{J}^*)$ の反例は、実は非可算無限個作ることができる。(*cf.* 系 2.16)

2.2 Z-正規性

前小節で作った反例 $\mathbf{L}_0 \cap \mathbf{H}^*$ では、eEP という extreme な性質を利用していた。実は、この eEP の働きをうまく「抑制」すれば、肯定的な結果が得られる。まず、eEP の特徴付けとなる次の補題を見る。

補題 2.12 任意の論理 $\mathbf{L}$ に対して、次が成り立つ。

$$\mathbf{L} \text{ は } eEP \text{ を持つ} \Leftrightarrow \mathbf{L} \vdash \exists x p(x) \supset \forall x p(x) \Leftrightarrow \mathbf{L} \vdash p(x) \supset p(y)$$

ここで、p は 1 変数述語変数で x と y は相異なる個体変数である。

この $p(x) \supset p(y)$ を Z と表す。eEP の働きを抑制するために、次の定義を導入する。

[4] Kripke frame 意味論 (Kripke frame semantics) については、Ono [11], S[18], Gabbay-Shehtman-Skvortsov [4] などを参照せよ。

定義 2.13 (S[18]) 次の推論規則を $(Z\mathrm{R})$ と呼ぶ:

$$\frac{A \vee (p(x) \supset p(y))}{A}(Z\mathrm{R})$$

ここで、p は 1 変数述語変数、x と y は相異なる個体変数で、A に出現しないものとする。論理 $\mathbf{L}$ は、$(Z\mathrm{R})$ について閉じているとき、**Z-正規 (Z-normal)** であるという。

$(Z\mathrm{R})$ は直観主義論理でも古典論理でも妥当な推論規則であり、述語論理の自然な規則であると言えよう。Z-正規な論理では、Z を $\vee$ との関連上で矛盾と同等に扱っており、補題 2.12 から eEP の働きを抑制していると考えることができる。もし、論理が Z-正規ならば eEP を持たない。(しかし、Z-正規でない論理で Z が証明可能でない論理も存在する。*cf.* 注意 3.13)。また、Z-正規性は意味論的にも自然である:

命題 2.14 *Kripke bases (*即ち *partially ordered sets)* のあるクラスによって特徴付けされる論理は、Z-正規である。また、完備 *Heyting* 代数のあるクラスによって特徴付けされる論理は、Z-正規である。

そして、Z-正規性を利用して、次が示される。

定理 2.15 (S[18]) 論理 $\mathbf{L}$ は Z-正規であるとする。$\mathbf{L}$ が *EP* を持てば *DP* を持つ。

命題 2.14 より、意味論的議論では多くの場合、自然に定理 2.15 の仮定が満たされ、「具体例で EP を持つことを示すと同じアイデアで DP が導かれる」という経験が理解できる。これが小野の問題 P52 が意外に長く open だった理由の一端かもしれない。

また、定理 2.15 を利用して次が示されるので、反例の多くが $\mathbf{L} \cap \mathbf{J}^*$ の形を持つことが解る。前小節で構成した反例がその形になるのも納得できそうである。

系 2.16 論理 $\mathbf{L}$ は $\mathbf{LD}$ を含むとする $(\mathbf{LD} \subseteq \mathbf{L})$。もし、$\mathbf{L}$ が *EP* を持ち *DP* を持たないならば、*EP* と *DP* を持つ論理 $\mathbf{K}$ と命題論理 $\mathbf{J}$ が存在して、$\mathbf{L} = \mathbf{K} \cap \mathbf{J}^*$ となる。論理 $\mathbf{L}$ が中間述語論理ならば、$\mathbf{K}$ として中間述語論理を取ることができる。

3 EPの弱い変種2つ

前節では、EP の 2 つの変種として、eEP と wEP を利用して議論を行った。このうち、eEP は、中間述語論理の性質としては、extreme なものであった。実際、補題 2.12 を見れば、中間述語論理においてはまったく無意味と言ってよい性質である。しかし、$\exists x A(x)$ を sentence (閉論理式) に制限すると、中間述語論理の性質として意味のあるものとなる。そこで、次の定義を導入しよう。

定義 3.1 論理 $\mathbf{L}$ が *sentential existence property* (sEP) を持つとは、$\mathbf{L}$ で証明可能な任意の <u>sentence</u> $\exists x A(x)$ に対して、<u>$\exists x A(x)$ に出現しない</u>個体変数 v が存在して、$A(v)$ が $\mathbf{L}$ で証明可能であることとする。

この sEP が EP の特別な場合になっていることは明らかである。こうして、我々は EP の弱い変種として wEP と sEP を得た。では、中間述語論理において、EP, wEP, sEP の間の相互関係はどうなるのであろうか？次がすぐわかる。

命題 3.2 (1) 論理 $\mathbf{L}$ が *EP* を持てば、*wEP* を持つ。
(2) 論理 $\mathbf{L}$ が *wEP* を持てば、*sEP* を持つ。

証明 (1): 論理 $\mathbf{L}$ が EP を持つとせよ。さらに、$\exists x A(x)$ が $\mathbf{L}$ で証明可能であるとし、個体変数の空でない有限集合 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ で $\exists x A(x)$ の自由変数をすべて含むものを任意に固定する。論理 $\mathbf{L}$ が EP を持つので、個体変数 w が存在して、$A(w)$ が $\mathbf{L}$ で証明可能である。もし、w が $\{v_1, \ldots, v_n\}$ に含まれれば、$A(v_1) \vee \cdots \vee A(v_n)$ が $\mathbf{L}$ で証明可能である。そうでなければ、w は fresh な個体変数である。論理 $\mathbf{L}$ は genaralization について閉じているので、$\forall w A(w)$ が $\mathbf{L}$ で証明可能である。よって、各 $A(v_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ は $\mathbf{L}$ で証明可能である。従って、$A(v_1) \vee \cdots \vee A(v_n)$ が $\mathbf{L}$ で証明可能である。

(2): 論理 $\mathbf{L}$ が wEP を持つとせよ。さらに、sentence $\exists x A(x)$ が $\mathbf{L}$ で証明可能であるとせよ。この $\exists x A(x)$ に出現しない新しい個体変数 v を用意する。この v ひとつからなる集合 $\{v\}$ は、$\exists x A(x)$ の自由変数すべてを含む有限集合である。論理 $\mathbf{L}$ が wEP を持つので、$A(v)$ が $\mathbf{L}$ で証明可能である。 □

中間述語論理において、この命題 3.2(1), (2) の逆は成立しない。これが本稿で報告する主結果である。これを示すためには、wEP を持ち EP を持たない中間述語論理と、sEP を持ち wEP を持たない中間述語論理を作って見せる必要がある。そのために、論理が wEP および sEP を持つための十分条件を、それぞれ与える必要がある。そこで、次の準備をする。

定義 3.3 $\mathfrak{M} = (M, D)$ を、$M = (M, \leq_M)$ を Kripke base (underlying partially ordered set) として持つ Kripke frame とする。M の元 $m \in M$ をひとつ取り、M において "m 以上" の元の集合を M^m とする:

$$M^m := \{n \in M \,;\, m \leq_M n\} \ .$$

この M^m に D を制限して得られる個体領域 D^m と M^m とを組み合わせて得られる Kripke frame $\mathfrak{M}^m = (M^m, D^m)$ を、(m によって生成される) $\mathfrak{M}$ の generated subframe と言い、m をその生成元という。Generated subframe は、常にその生成元を最小元とする Kripke frame となる。

$\mathfrak{M} = (M, D)$ を最小限 0_M を持つ Kripke frame とし、V を $D(0_M)$ の空でない部分集合とする。(式で書けば: $\varnothing \neq V \subseteq D(0_M)$) 新しい元 0 を用意し、これを M の最小元の下に新しい最小元として付加してえられる partially ordered set を $0 \uparrow M$ と書く。この 0 における個体領域を V と定めれば、自然に $0 \uparrow M$ 上に個体領域が定義でき、これによって $0 \uparrow M$ を Kripke base とする Kripke frame が定義できる。この Kripke frame を $V \uparrow \mathfrak{M}$ と書く。V が有限集合のとき、$V \uparrow \mathfrak{M}$ は、$\mathfrak{M}$ から有限的↑で得られると言う。また、V が単元集合 (singleton) のとき、$V \uparrow \mathfrak{M}$ は、$\mathfrak{M}$ から単元的↑で得られると言う。

補題 3.4 論理 $\mathbf{L}$ が *Kripke frames* のあるクラス $\mathscr{C}$ で特徴付けられているとする。もし、$\mathscr{C}$ が *generated subframe* を作る操作と有限的↑を作る操作について閉じているなら、論理 $\mathbf{L}$ は *wEP* を持つ。

証明 論理式$\exists x A(x, v_1, \ldots, v_n)$が、$v_1, \ldots, v_n$以外に自由変数を持たないとする$(n > 0)$。必要なら$\exists x A(x, v_1, \ldots, v_n)$を合同な論理式に変形することにすれば、変数$x, v_1, \ldots, v_n$は互いに異なり、各$v_i$ $(i = 1, \ldots, n)$は$\exists x A(x, v_1, \ldots, v_n)$の$x$に代入可能であると仮定して一般性を失わない。対偶を示すために、$A(v_1, v_1, \ldots, v_n) \vee \cdots \vee A(v_n, v_1, \ldots, v_n)$が$\mathbf{L}$で証明不可能であると仮定する。論理$\mathbf{L}$はクラス$\mathscr{C}$で特徴付けられているから、$\mathscr{C}$に属するKripke frame $\mathfrak{M} = (M, D)$、$m \in M$、$\mathfrak{M}$上のvaluation $\models$、及び元$d_1, \ldots, d_n \in D(m)$が存在して、$m \not\models A(d_1, d_1, \ldots, d_n) \vee \cdots \vee A(d_n, d_1, \ldots, d_n)$となる。クラス$\mathscr{C}$はgenerated subframeを作る操作について閉じているので、このmで生成される$\mathfrak{M}$のgenerated subframe $\mathfrak{M}^m$は、$\mathscr{C}$に属している。これを$\mathfrak{M}$の替わりに考えることにすれば、mがMの最小元であるとしてよい。$V = \{d_1, \ldots, d_n\}$とおくと、Vは$D(m)$の空でない有限部分集合である。よって、$V \uparrow \mathfrak{M}$は有限的$\uparrow$によって得られるので、仮定より$\mathscr{C}$に属する。$\mathfrak{M}$のvaluation $\models$を自然に拡張して、$V \uparrow \mathfrak{M}$のvaluationを作り、同じ$\models$で書くことにする。(元の$\models$と矛盾しなければ、どんなものでもよい。)すると、$V \uparrow \mathfrak{M}$において$0 \not\models A(d_1, d_1, \ldots, d_n) \vee \cdots \vee A(d_n, d_1, \ldots, d_n)$である。即ち、任意の$e \in V$に対して、$0 \not\models A(e, d_1, \ldots, d_n)$である。よって、$0 \not\models \exists x A(x, d_1, \ldots, d_n)$である。先ほど断ったように、$V \uparrow \mathfrak{M}$は$\mathscr{C}$に属するので、$\exists x A(x, v_1, \ldots, v_n)$は$\mathbf{L}$で証明不可能ある。 □

論理がwEPを持つための十分条件は、ここでの有限$\uparrow$を利用する方法の他に、S[17]で与えてある超花束(ultrabouquet)の構成を利用する方法もあるが、本質的には同じことをやっていることに注意しておく。違いは言語がpureか否かである。言語を個体定数記号・関数記号・等号を持つものに拡張する場合については、第4節のremark 3を参照せよ。

補題3.4を用いて、wEPを持つがEPを持たない中間述語論理を与える。

定義 3.5 Kripke frameが**線形**(linear)であるとは、Kripke baseであるunderlying partially ordered setが線形であることとする。

線形Kripke frameの全体の成すクラスは、明らかにgenerated subframeを作る操作と有限的$\uparrow$を作る操作について閉じている。そのことを利用して次が示せる。

補題 3.6 線形*Kripke frames*全体のなすクラスで特徴付けられる論理を**Lin**とする。論理**Lin**は中間述語論理であり、*wEP*を持つが*EP*を持たない。

証明 論理**Lin**が中間述語論理であることは、古典論理のモデルが線形Kripke frameの特別なものとみなせることから直ちに導かれる。**Lin**がwEPを持つことは、補題3.4から直ちに得られる。**Lin**は明らかにZ-正規であるから、定理2.15によって、もしEPをもてばDPを持つはずである。線形性の公理として知られる$(A \supset B) \vee (B \supset A)$は、すべての線形Kripke framesでvalidであるから、$\mathbf{Lin} \vdash (p \supset q) \vee (q \supset p)$である。ここで、$p, q$は相異なる命題変数である。一方、$p \supset q$は線形Kripke frameでvalidでないので、$\mathbf{Lin} \nvdash p \supset q$かつ$\mathbf{Lin} \nvdash q \supset p$である。即ち、**Lin**はDPを持たない。よって、EPも持たない。 □

以上により、次の定理を得る。

定理 3.7 中間述語論理において、*wEP*は*EP*を導かない。

次の補題は、補題 3.4 と同様に示せる。

補題 3.8 論理 $\mathbf{L}$ が *Kripke frames* のあるクラス $\mathscr{C}$ で特徴付けられているとする。もし、$\mathscr{C}$ が *generated subframe* を作る操作と単元的↑を作る操作について閉じているなら、論理 $\mathbf{L}$ は *sEP* を持つ。

これを用いて、sEP を持つが wEP を持たない中間述語論理を与える。

定義 3.9 Kripke base がただ1点からなり、$\omega = \{0, 1, \ldots\}$ をその個体領域とする Kripke frame を考えると、これは古典述語論理を特徴付ける Kripke frame となる。これをここでは Ω と書く。Ω を含み、単元的↑を作る操作について閉じている最小のクラスを $\mathscr{O}$ と書く。$\mathscr{O}$ は、Ω から単元的↑を有限回 (0 回を含む) 繰り返して得られる Kripke frames の全体である。

作り方から明らかだが、$\mathscr{O}$ は generated subframe を作る操作と単元的↑を作る操作について閉じている。よって次を得る。

補題 3.10 $\mathscr{O}$ によって特徴付けされる論理を $\mathbf{L}(\mathscr{O})$ とする。$\mathbf{L}(\mathscr{O})$ は中間述語論理であり、*sEP* を持つが *wEP* を持たない。

証明 論理 $\mathbf{L}(\mathscr{O})$ が中間述語論理であることは、Ω が $\mathscr{O}$ に属することから明らかである。論理 $\mathbf{L}(\mathscr{O})$ が sEP を持つことは、補題 3.8 から直ちに得られる。論理 $\mathbf{L}(\mathscr{O})$ が wEP を持たないことを示すために、具体的に反例となる論理式を構成しよう。2 変数述語変数 r と、互いに相異なる個体変数 a, b, x, y, z, w を用意し、以下のように A_1 と $A(a, b, w)$ を定める。

$$
\begin{aligned}
A_1 \quad &: \forall x \neg r(x, x) \wedge \forall x \forall y \exists z (r(x, y) \supset r(x, z) \wedge r(y, z)), \\
A(a, b, w) \quad &: A_1 \wedge r(a, b) \supset r(a, w) \wedge r(b, w) \ .
\end{aligned}
$$

$\exists w A(a, b, w)$ が $\mathbf{L}(\mathscr{O})$ で証明可能なことと、$A(a, b, a) \vee A(a, b, b)$ が $\mathbf{L}(\mathscr{O})$ で証明不可能なことを示せばよい。古典述語論理で $A(a, b, a) \vee A(a, b, b)$ が証明不可能であることは明らかゆえ (例えば、r を ω 上の大小関係 $<$ と解釈せよ)、後半は自明である。ここで、$\exists w A(a, b, w)$ が $\mathscr{O}$ に属する任意の Kripke frame で valid になることの概略を示す。

$\mathscr{O}$ に属する任意の Kripke frame は、適切な $n < \omega$ によって次の様に書ける。

- Kripke base: $M = \{0, 1, \ldots, n\}$ に自然な順序を考えたもの。
- 個体領域: $D : M \to 2^{\omega}$ は、

$$
D(0) = D(1) = \cdots = D(n-1) = \{0\}, \quad D(n) = \omega = \{0, 1, 2, \ldots\}.
$$

$\exists w A(a, b, w)$ がこの Kripke frame で valid でないとして、不合理を導く。Valid でないと仮定すると、適切な valuation $\models$、$m \in M$、そして $d, e \in D(m)$ が存在して、

$$
m \not\models \exists w A(d, e, w)
$$

である。もし、$m \neq n$であれば、$e = d$であるから、$\exists w A(d, e, w)$は$\exists w A(d, d, w)$となる。$\exists w A(d, d, w)$を書き下すと$\exists w(A_1 \wedge r(d, d) \supset r(d, w) \wedge r(d, w))$である。$A_1$の連言の始めに$\forall x \neg r(x, x)$があるので、$A_1 \wedge r(d, d)$の部分が、直観主義述語論理において矛盾$\perp$と同値である($\mathbf{H}_* \vdash A_1 \wedge r(d, d) \equiv \perp$)。よって、$\exists w A(d, d, w)$は$\exists w(\perp \supset r(d, w) \wedge r(d, w))$と同値であるから、$m$でtrueになる。よって、$m = n$であるから、$\Omega$上で考えているとみなしてよい。古典述語論理では、$\exists w A(a, b, w)$が証明可能であるから、$\Omega$でのいかなる解釈でもtrueとなるはずである。よって、不合理が導かれた。以上より、$\exists w A(a, b, w)$は、このKripke frameでvalidである。 □

よって、次の定理を得る。

定理 3.11 中間述語論理において、*sEP*は*wEP*を導かない。

注意 3.12 ここでは$\mathscr{O}$で特徴付けられる中間述語論理$\mathbf{L}(\mathscr{O})$を用いたが、少々手間が増えるが、ほぼ同じアイデアで、ただ1つのKripke frameによって特徴付けされる中間述語論理で同様のことができる。そのKripke frameは、先ほどので$n = 1$の場合のもの: $M = \{0, 1\}$, $D(0) = \{0\}$, $D(1) = \omega$である。

注意 3.13 論理$\mathbf{L}(\mathscr{O})$および上記の注意3.12で述べた論理は、中間述語論理であるから、Zが証明可能でない。さらに、これらはZ-正規でない。(排中律$q \vee \neg q$とZの選言: $(q \vee \neg q) \vee Z$は、これらのKripke framesでvalidになるが、排中律はvalidでない。)そのような、Z-正規でなくZが証明可能でない中間述語論理は、非可算無限個存在する。

注意 3.14 上記の注意3.12で述べたKripke frameで特徴付けられる中間述語論理は、当然EPを持たない。Kripke baseの最小元における個体領域が単元集合であっても、EPが導かれない。このことは、Kripke frame意味論を用いてEPを考察する場合に注意を要する点である。

4 おわりに

本稿では、中間述語論理におけるexistence propertyに関する幾つかの結果を述べた。第2節では、existence propertyとdisjunction propertyの関係に関する既存の結果を簡潔に報告した。S[18]で示された「小野の問題P52の否定的解決」の概要を含んでいる。第3節は、筆者による現在進行中の研究の中間報告である。Existence propertyの弱い変種2つ(weak existence propertyおよびsentential existence property)を考察し、それらとexistence propertyがすべて異なる性質であることを示した。

以下、本稿の話題に関連した4つのremarksを述べておく。

1. 本稿では、existence propertyに類似したdisjunction propertyと、existence propertyより弱い2つの性質: weak existence propertyおよびsentential existence propertyについて考察した。第2節でも述べたようにdisjunction propertyは、existence propertyより見かけ上、弱い性質とも言えるので(実際は独立であったが)、本稿の話題は、existence propertyよりも(少なくとも見かけ上)"弱い"性質の議論であった。中間述語論理において、existence propertyより(少なくとも見かけ上)強い性質として、Harrop-existence propertyがある。

定義 4.1 (Nakamura [10]) 論理式 A が **Harrop-論理式** (Harrop-formula) であるとは、どんな strictly positive な部分論理式も $\exists xY(x)$ の形も $Y \vee Z$ の形もしていないこととする。論理 $\mathbf{L}$ が **Harrop-existence property** を持つとは、任意の Harrop-論理式 H と任意の $\exists xA(x)$ に対して次が成立することとする:

もし $\mathbf{L} \vdash H \supset \exists xA(x)$ であれば、ある v が存在して $\mathbf{L} \vdash H \supset A(v)$ となる。

Harrop-existence property が existence property を導くことは自明であるが、その逆の「existence property が Harrop-existence property を導くかどうか?」はまだ解っていない。また、disjunction property と対応する Harrop-disjunction property もあり、これらの関係も解っていない。これらは、小野の問題 **P54** として知られており (Ono [12])、今のところ未解決である。中間**命題**論理では、disjunction property と Harrop-disjunction property は同値であることが知られている (Minari-Wroński [9]) ので、これらがそれぞれ同値である可能性もある。非常に気になるところである。

2. 本稿で行った意味論的操作は、**Kripke sheaf 意味論**[5] において、より容易かつより自由に展開できることに注意しておく。例えば、第 3 節で反例として構成した論理 $\mathbf{L}(\mathscr{O})$ は Z-正規ではないが、Kripke sheaf 意味論を用いれば、ほぼ同様のアイデアで Z-正規な中間述語論理による反例が構成できる。Kripke sheaf 意味論を意味論的道具として用いることは、ある程度期待のできる研究手法であると思われる。Kripke sheaf 意味論の利点として、Kripke frame 意味論より強力で自由度があり、しかも Kripke frame 意味論でうまくいった議論をそのまま使うことが期待できるという点がある。しかし、Kripke sheaf 意味論も、すべての述語論理を取り扱うには不完全であることが解っている。より強力かつ使い易い意味論を新しく開発する研究や、そのような意味論を利用した研究は、現在あまり発展していない。今後の研究課題である。

3. 本稿では、中間述語論理の伝統に従って pure first-order language で考察した。個体定数記号・関数記号・等号のある言語で existence property を考察することにすれば、対応する性質は、term existence property (TEP) と呼ばれる: 「もし $\mathbf{L} \vdash \exists xA(x)$ であれば、$\exists xA(x)$ の語彙から作られる項 (term) t が存在して $\mathbf{L} \vdash A(t)$」。ここで、$\exists xA(x)$ の語彙から作られる項 の部分をあらためて定義しておくと:

定義 4.2 $\mathcal{T}(\exists xA(x))$ によって、$\exists xA(x)$ の語彙で書かれた項 (term) の集合を表す。即ち、$t \in \mathcal{T}(\exists xA(x))$ である必要十分条件は、t に出現する関数記号と個体定数記号はすべて $\exists xA(x)$ に出現し、t に出現する個体変数はすべて $\exists xA(x)$ に自由変数として出現することである。もし、$\exists xA(x)$ が個体定数記号も自由変数も含まない場合は、$\mathcal{T}(\exists xA(x))$ は空集合になってしまうので、この場合は、fresh な自由変数 v をとって $\mathcal{T}(A(v))$ のことを $\mathcal{T}(\exists xA(x))$ とする。

この設定での TEP 関連の議論は S[17] で紹介した。第 3 節で言及した超花束は、S[17] で導入されており、Harrop-existence property に類似した性質に関連する議論がされている。S[17] では、記述の簡単のためもあって、Kripke sheaf 意味論でアイデアを示しているが、個体定数記号・関数記号・等号を持つ言語を取り扱う上で、上述の Kripke sheaf 意味論がより有効になる。また、S[20] では、wEP と sEP に対応する wTEP、sTEP に

[5] 例えば S[16] を参照せよ。

ついて議論した。例えば、wTEPは次のような性質になる: 「もし$\mathbf{L} \vdash \exists x A(x)$ であれば、有限個の項$t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\exists x A(x))$ が存在して$\mathbf{L} \vdash A(t_1) \vee \cdots \vee A(t_n)$」 このとき、本稿と同様に、TEPはwTEPを導き、wTEPはsTEPを導く。さらに、逆はいずれも成り立たないことを報告した。

4. Z-正規でなくZが証明可能でない論理は、かなり不思議な論理たちである。そして、その"生態"についてはまったく解っていない。注意 3.13でも述べたが、Z-正規でなくZが証明可能でない論理は、非可算無限個存在する。これらの論理たちにどんなことが起こっているのか興味がある。

References

[1] Chagrov, A. and Zakharyaschev, M., **Modal logic**. Oxford Logic Guides, 35. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, (1997).

[2] Church, A., **Introduction to Mathematical Logic I**, Princeton University Press, Princeton (1956).

[3] Ferrari, M. and Miglioli, P., (1993) *Counting the maximal intermediate constructive logics*, **Journal of Symbolic Logic**, Vol.58(1993), 1365–1401.

[4] Gabbay, D. M., Shehtman, V. B. and Skvortsov, D. P., **Quantification in non-classical logic. Vol. 1**, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 153. Elsevier, Amsterdam (2009).

[5] Gentzen, G., *Untersuchungen über das logische Schließen*, **Mathematische Zeitschrift** 39(1934-35), 176–210, 405–431.

[6] Kleene, S. C., *Disjunction and existence under implication in elementary intuitionistic formalisms*, **Journal of Symbolic Logic** 27(1962), 11–18. (*An addendum*, the same journal 28(1963), 154–156.)

[7] Komori, Y., *Some results on the super-intuitionistic predicate logics*, **Reports on Mathematical Logic** 15 (1983), 13–31.

[8] Minari, P., *Disjunction and existence properties in intermediate predicate logics*, **Atti del Congresso Logica e Filosofia della Scienza, oggi. San Gimignano, dicembre 1983. Vol.1 – Logica.** (1986), 7–11. CLUEB, Bologna (Italy).

[9] Minari, P. and Wroński, A., *The Property (HD) in Intermediate Logics. A Partial Solution of a Problem of H. Ono*, **Reports on Mathematical Logic** 22(1988), 21-25

[10] Nakamura, T., *Disjunction property for some intermediate predicate logics*, **Reports on Mathematical Logic** 15(1983), 33–39.

[11] Ono, H., *A study of intermediate predicate logics*, **Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences** 8(1972/73), 61–649,

[12] Ono, H., *Some problems in intermediate predicate logics*, **Reports on Mathematical Logic** 21 (1987), 55–67. (*Supplement* 22(1988), 117–118.)

[13] Prawitz, D., **Natural deduction. A proof-theoretical study**, Acta Universitatis Stockholmiensis. Stockholm Studies in Philosophy, No. 3 Almqvist & Wiksell, Stockholm 1965. (Reprint: Dover Publications, 2006)

[14] Suzuki, N.-Y., *A remark on the delta operation and the Kripke sheaf semantics in super-intuitionistic predicate logics*, **Bulletin of Section of Logic, University of Łódź**, 25(1996), 21–28.

[15] Suzuki, N.-Y., *Algebraic Kripke sheaf semantics for non-classical predicate logics* **Studia Logica** 63(1999), 387–416.

[16] Suzuki, N.-Y., *Halldén-completeness in super-intuitionistic predicate logics*, **Studia Logica** 73(2003), 113–130

[17] Suzuki, N.-Y., *Prawitz-Doorman Term Existence Property* を超直観主義述語論理で考える, **京都大学数理解析研究所講究録** No.1832 (2013), 88–96.

[18] Suzuki, N.-Y., *A negative solution to Ono's problem P52: Existence and disjunction properties in intermediate predicate Logics*, submitted.

[19] Suzuki, N.-Y., *Some properties related to the existence property in intermediate predicate logics*, Logic Colloquium 2014.

[20] Suzuki, N.-Y., *The existence property and related properties in intermediate predicate logics*, JAIST Logic Workshop Series 2015, Constructivism and Computability.

[21] 梅沢敏郎, 「中間述語論理」, **月刊マセマティクス**, 海洋出版 Vol. 1, No. 2 (1980), 162–168.

〒 422–8529
静岡市駿河区大谷 836
静岡大学理学部数学教室
suzuki.nobuyuki@shizuoka.ac.jp

Department of Mathematics
Faculty of Science
Shizuoka University
Ohya 836, Suruga-Ku
Shizuoka, 422–8529
JAPAN
suzuki.nobuyuki@shizuoka.ac.jp