数理解析研究所講究録
第 1951 巻 2015 年 122-135

GeoGebra における「軌跡の方程式を求める機能」の課題

龍谷大学・理工学部　大西　俊弘 (Toshihiro Onishi)
Faculty of Science and Technology,
Ryukoku University

1　はじめに

GeoGebra は，開発当初は動的幾何学ソフトウェアであったが，バージョンアップを重ねる毎に次々に新しい機能が追加されてゆき，現在では図形だけではなく関数や統計なども扱うことができる総合的な数学教育・数学学習用のソフトウェアに発展してきている．GeoGebra は非商用目的であれば誰でも無料で利用でき，多数の言語にも対応しており，PC の主要 OS 全て（Windows，MacOS X,Linux）に対応しタブレット端末 (iOS,Android) など多種多様なマシンで動作するので，世界中で急速に普及している．また，ネット上には多数の教材が公開されているので，このことも普及の後押しをしている．

GeoGebra では，Ver.4 からは数式処理（CAS）機能が追加され，高等学校や大学初年級で扱うような数式計算はすべて処理できるようになった．また，Ver.4.4 からは数式処理エンジンが Derive から Giac に変更され，より高速な計算ができるようになった．

他の動的幾何学ソフトと同様に，GeoGebra においても，以前から図形の軌跡を表示することはできたが，その軌跡の方程式を求めることはできなかった．しかし，Ver.4.2 以降は，軌跡の方程式を求める機能（`LocusEquation` コマンド）が実装された（GeoGebra 内部では，数式処理（CAS）エンジンでグレブナー基底を用いた計算を行い，軌跡の方程式を求めている）．

本稿では，高等学校の数学で取り扱う軌跡の問題を素材にして，GeoGebra でどの程度まで軌跡の方程式を求めることができるのか調べた結果を報告し，その課題を明らかにする．

2　GeoGebraにおける軌跡の取り扱い

GeoGebra においては，次の 3 通りの方法で軌跡の問題を扱うことができる．

（1）点の「残像」　（2）「軌跡」機能　（3）`LocusEquation` コマンド

例 1 に示すような三角形の重心の軌跡を求める問題を GeoGebra で作図すると図 1 のようになる．この問題を具体例として，3 つの方法について解説を行う．

[例 1]	定点 A $(-4,0)$，B $(4,0)$ と動点 P があり，△ABP の重心を G とする． 点 P が直線 $y=8$ 上を動くとき，点 G の軌跡を求めよ．

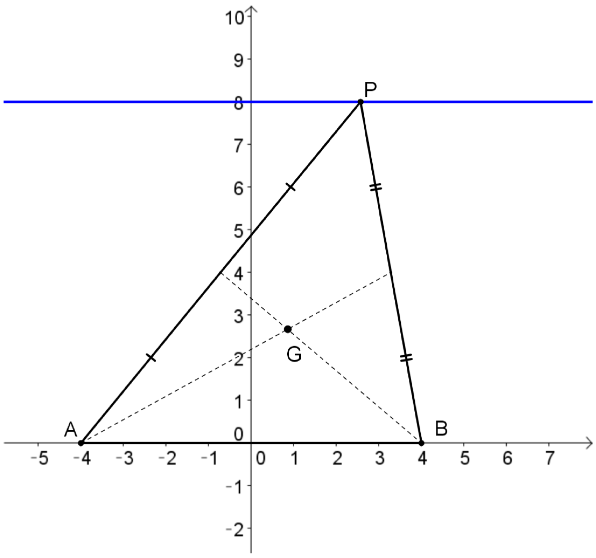

図 1 三角形の重心

2.1　点の「残像」

図 2 に示すような点 G の設定画面で「残像表示」にチェックを入れた後に，点 P をドラッグすると，図 3 に示したように点 G の残像が表示される．点 P を直線 上をくまなく動かすことによって点 G の軌跡を確認できる．点の「残像」は，自動車が砂を落としながら移動するときに地面にできた砂粒の列のようなものである．したがって，GeoGebra 内部では単独のオブジェクトとして認識されている訳ではない．そのため，残像を表示した後に，その色や線種を変更することはできない．

この方法は，操作が具体的で分かりやすいため，教育的には有用な方法である．

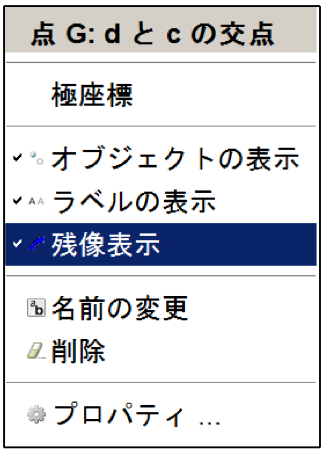

図 2 残像表示の設定

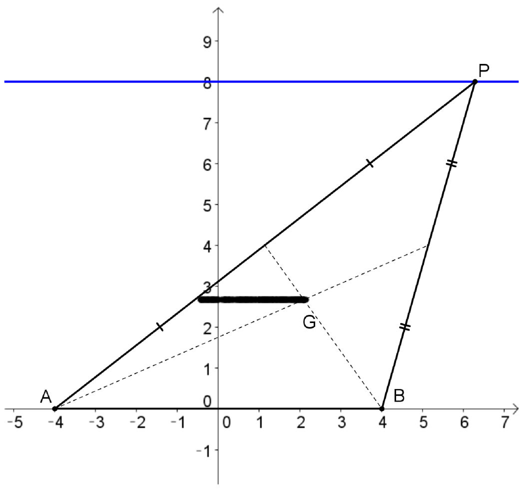

図 3 重心の残像

2.2 「軌跡」機能

図 4 に示すようにメニューから「軌跡」を選択し，軌跡を求める点Gをまず指定し，次に駆動点P（直線上を動く点）を指定すると，図 5 のように点Gの軌跡である直線が瞬時に表示される．このとき，点Pをドラッグする必要は一切なく，非常に簡単に軌跡を求めることができるが，途中経過が省略されているため，何が起こったか分からない者も出てきやすい．そのため，教育的には必ずしも有用な方法ではない．

なお，メニューから機能を選択するのではなく，入力バーに次のコマンドを入力しても同様の結果が得ることができる．

`Locus[G,P]`

求めた軌跡（例 1 の場合は直線）は，GeoGebra の内部では 1 つのオブジェクトとして認識されており，表示色や線種のなどの属性を通常の図形と同様に変更可能である．しかし，GeoGebra の内部で図形の方程式が認識されているわけではない．数式ビュー内には,「軌跡」として区分され，`loc1=Locus[G,P]` という形式で表示されるが，図形の方程式は一切表示されない．

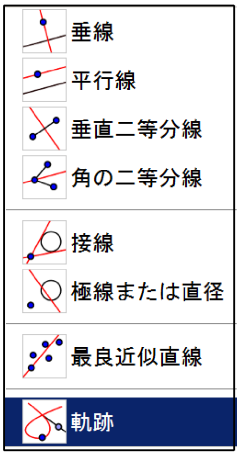

図 4 「軌跡」機能

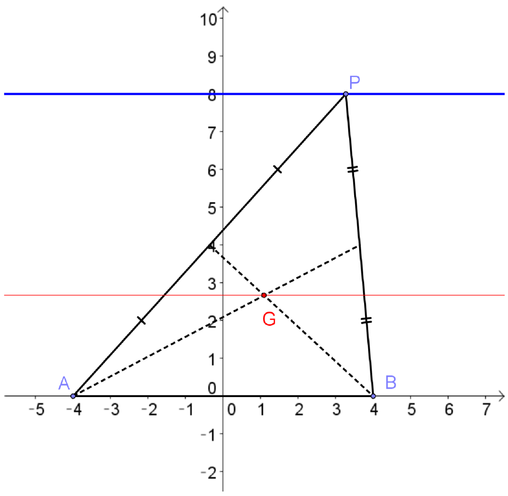

図 5 重心の軌跡の表示

2.3 「LocusEquation」コマンド

入力バーに，次のコマンドを入力すると，軌跡の方程式を求めることができる．ここで，Gは軌跡を求める点であり，Pは駆動点（直線上を動く点）である．

`LocusEquation [G,P]`

求めた軌跡の方程式は，数式ビュー内では「陰関数曲線」に区分され，$3y = 8$ という通常の数式で表示され，グラフィックスビュー内に軌跡が表示される．

先に **2.2** の方法で軌跡を表示させている場合には，その軌跡の名前（loc1 とする）を指定することで軌跡の方程式を求めることもできる．具体的には，入力バーに次のコマンドを入力する．

`LocusEquation [loc1]`

この場合も結果は同じであるが，図６に示すように，数式ビュー内では **2.2** の軌跡とは別に数式が表示される（なお，これらのコマンド入力方法は，CAS ビュー内でも使用可能である）．

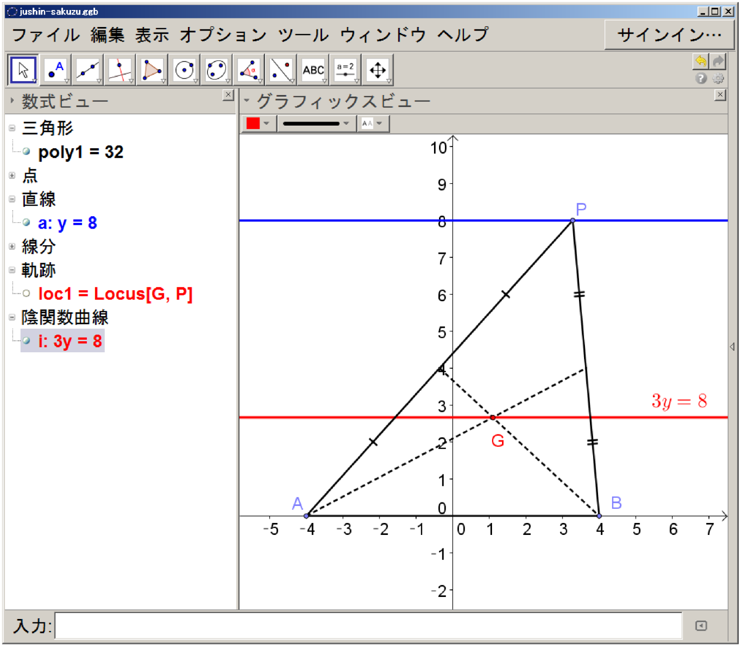

図６ 重心の軌跡の方程式の表示

2.4　重心の求め方による動作の違い

図１において重心を作図する際には，２つの中線をまず作図し，その交点を求めるという幾何学的な方法で行った．一方，GeoGebra では次の２つの方法でも重心の作図は可能である．

（ア）関数 `TriangleCenter` の利用

入力バーに次のコマンドを入力することで，重心を作図出来る（関数の最後の引数を変更することで，三角形の内心なども同様に作図できる）．

`TriangleCenter[A,B,P,2]`

（イ）重心の公式（座標）の利用

重心の公式 $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$ を利用して，x 座標と y 座標を求める．

（ア）や（イ）の方法で重心を求めた場合，**2.2** のやり方で軌跡を描くことはできるが，**2.3** の `LocusEquation` コマンドでは，軌跡の方程式を求めることはできなかった．

3　三角形の４心の軌跡

２つの定点Ａ，Ｂがあり，点Ｐがある図形（直線，円）上を動くとき，△ＡＢＰの４心（重心・垂心・外心・内心）の軌跡の方程式を求めてみた．

3.1　動点Ｐが直線上を動く場合

3.1.1　重心

LocusEquation コマンドを用いて軌跡の方程式 $3y = 8$ を求めることができた．

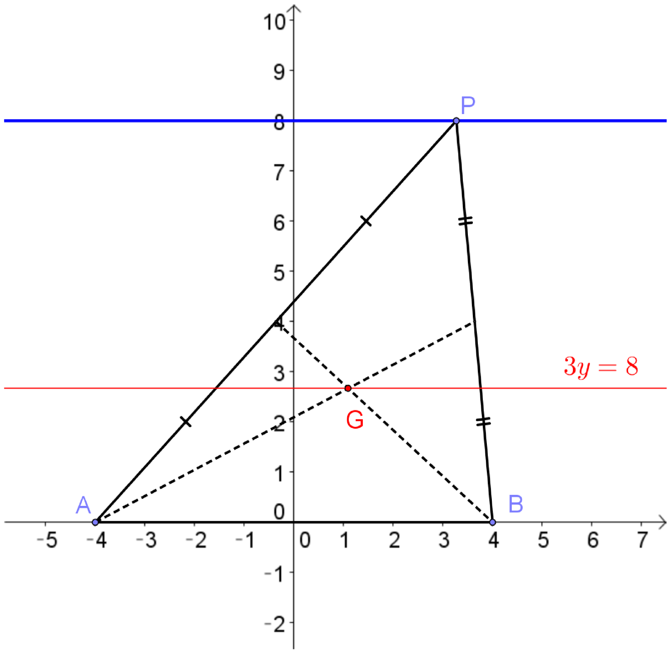

図 7 重心の軌跡

3.1.2　垂心

LocusEquation コマンドを用いて軌跡の方程式 $x^2 + 8y = 16$ を求めることができた．

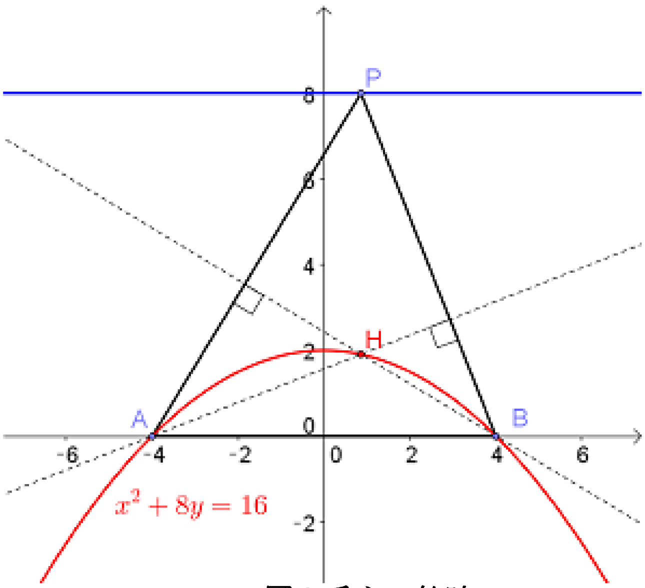

図 8 垂心の軌跡

3.1.3　外心

LocusEquation コマンドを用いて軌跡の方程式 $x = 0$ を求めることができた．しかし，実際の軌跡は半直線であり直線全体ではない．このことから，LocusEquation コマンドでは，軌跡の定義域・値域を求めることができないことが分かる．

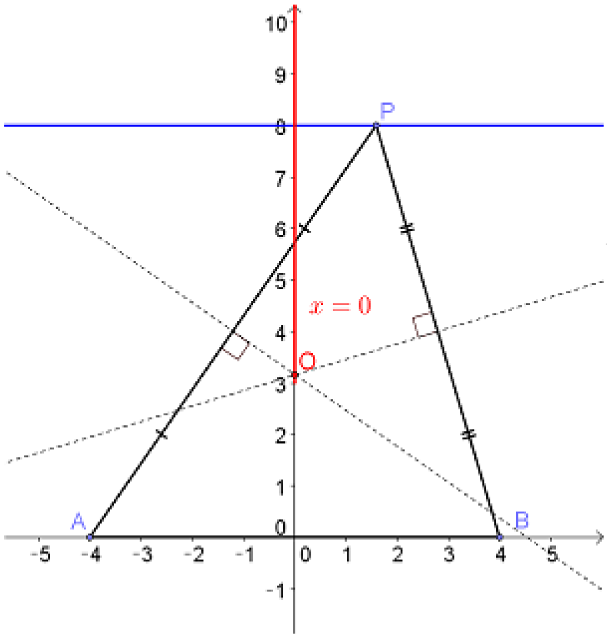

図 9 外心の軌跡

3.1.4　内心

LocusEquation コマンドを用いて，**軌跡の方程式を求めることはできなかった**．

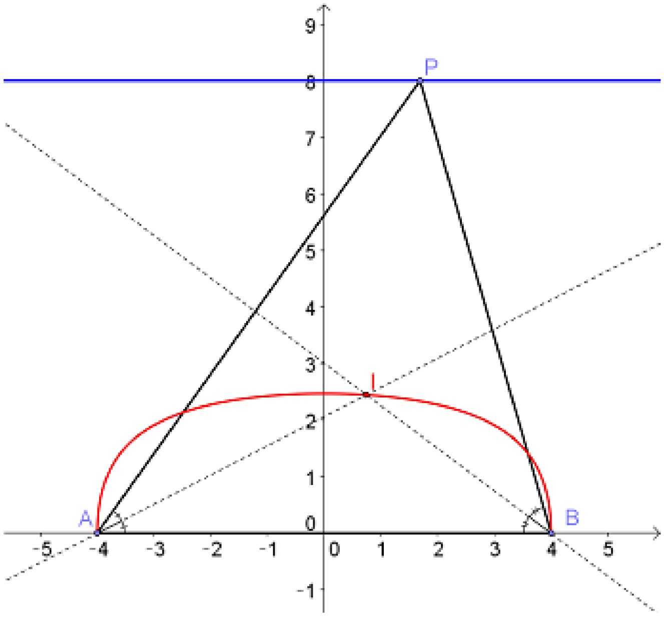

図 10 内心の軌跡

3.2 動点Pが円周上を動く場合

3.2.1 重心

軌跡の方程式 $3x^2y-2xy+3y^3-12y^2+11y=0$ を求めることができた．この方程式は，$y(3x^2-2x+3y^2-12y+11)=0$ と因数分解できるので，軌跡は直線と円となるが，実際の軌跡は円のみであり，余分な直線 が表示されてしまう．

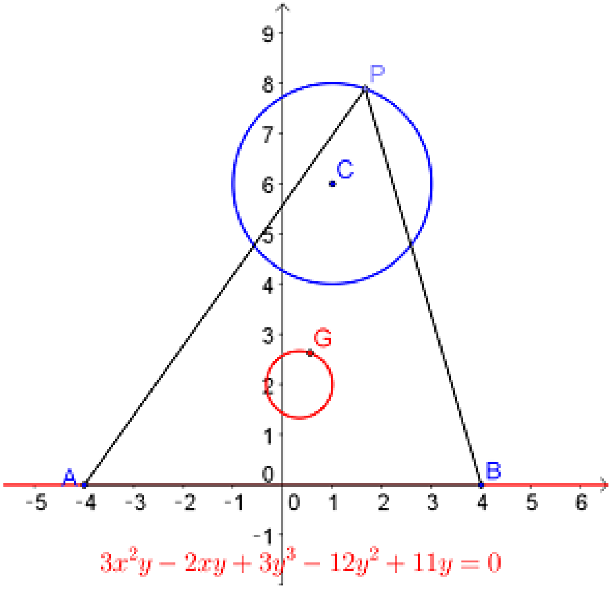

図 11 重心の軌跡

3.2.2 垂心

軌跡の方程式 $x^4+x^2y^2+12x^2y-32x^2-2xy^2+33y^2-192y=-256$ を求めることができた．

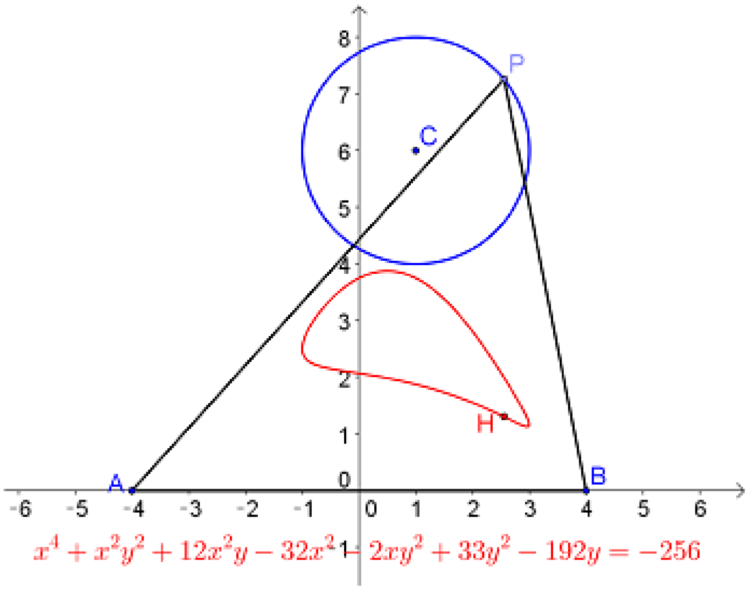

図 12 垂心の軌跡

3.2.3　外心

LocusEquation コマンドを用いて軌跡の方程式 $x = 0$ を求めることができた．しかし，実際の軌跡は半直線であり直線全体ではない．

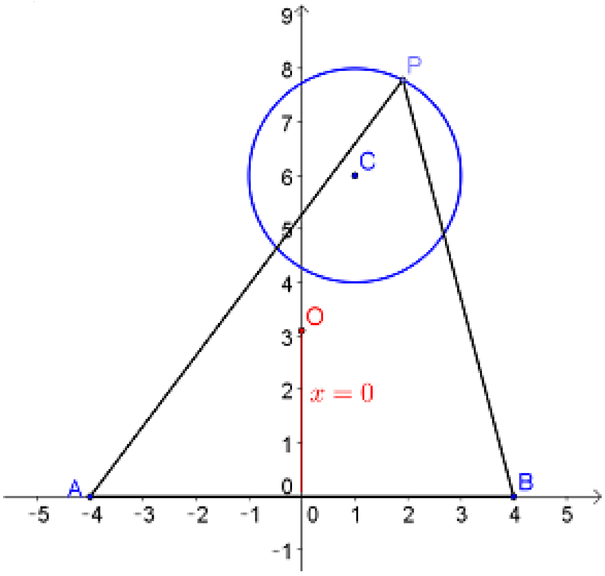

図 13 外心の軌跡

3.2.4　内心

LocusEquation コマンドを用いて，**軌跡の方程式を求めることはできなかった．**

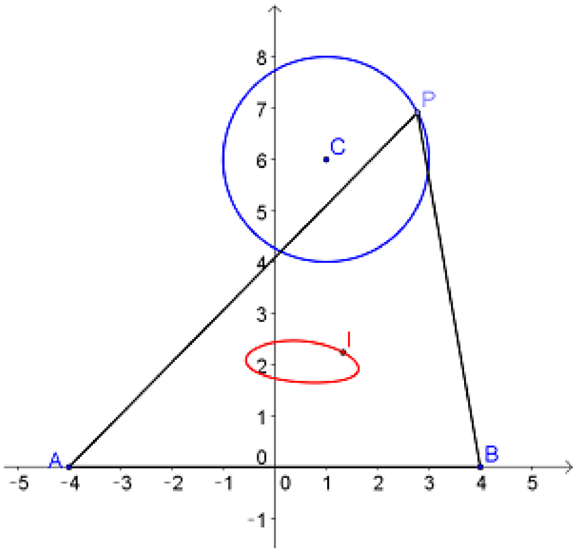

図 14 内心の軌跡

以上，**3.1〜3.2** の結果を表にまとめると次のようになる．

点 P の動き	重心	垂心	外心	内心
直線上	○	○	△ (範囲×)	×
円周上	△ (不要な式あり)	○	△ (範囲×)	×

4　定点と動点の中点の軌跡

定点Aがあり，点Pがある図形（直線，円）上を動くとき，線分APの中点の軌跡の方程式を求めてみた．

4.1　定点と直線上を動く点の中点の軌跡

[例 2]　定点A $(0, 1)$ と動点Pがあり，線分APの中点をQとする．
点Pが直線 $x + y = 4$ 上を動くとき，点Qの軌跡を求めよ．

図 15 に示すように，LocusEquation コマンドを用いて軌跡の方程式 $2x + 2y = 5$ を求めることができた．

4.2　定点と円周上を動く点の中点の軌跡

[例 3]　定点A $(0, 1)$ と動点Pがあり，線分APの中点をQとする．
点Pが円 $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 4$ 上を動くとき，点Qの軌跡を求めよ．

図 16 に示すように，LocusEquation コマンドを用いて，**軌跡の方程式を求めることはできなかった．**

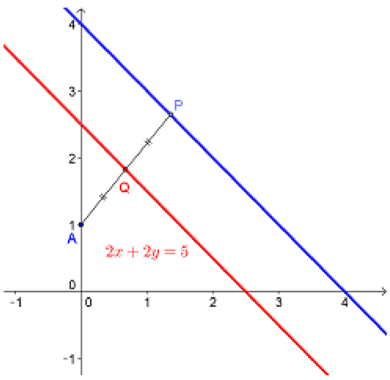

図 15 中点の軌跡（1）

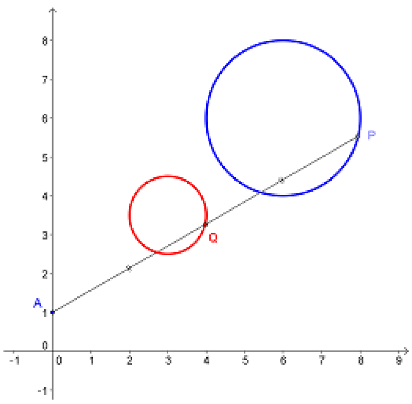

図 16 中点の軌跡（2）

5　2次曲線

定点（焦点）までの距離，定直線（準線）までの距離を用いて，2次曲線（放物線，楕円，双曲線）の定義通りに点Pを作図し，軌跡の方程式を求めてみた．

5.1　定点からの距離と定直線までの距離が等しい点の軌跡（放物線）

[例 4]　定点A $(4, 0)$ と定直線 $x = -4$ があり，点Aまでの距離と定直線までの距離が等しくなるように点Pが動くとき，点Pの軌跡を求めよ．

図 17 に示すように，`LocusEquation` コマンドを用いて軌跡の方程式 $-16x + y^2 = 0$ を求めることができた．

5.2　2 つの定点からの距離の和が一定である点の軌跡（楕円）

> [例 5]　2 つの定点 A $(-4, 0)$ と B $(4, 0)$ があり，点 A までの距離と点 B までの距離の和が常に 10 となるように点 P が動くとき，点 P の軌跡を求めよ．

図 18 に示すように，`LocusEquation` コマンドを用いて軌跡の方程式 $9x^2 + 25y^2 = 225$ を求めることができた．

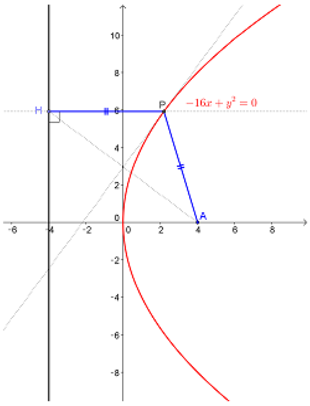

図 17 放物線

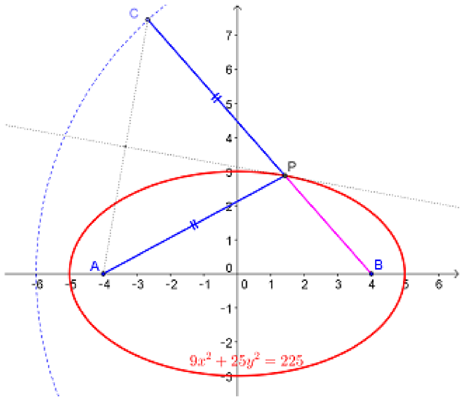

図 18 楕円

5.3　2 つの定点からの距離の差の絶対値が一定である点の軌跡（双曲線）

> [例 6]　2 つの定点 A $(-4, 0)$ と B $(4, 0)$ があり，点 A までの距離と点 B までの距離の差の絶対値が常に 6 となるように点 P が動くとき，点 P の軌跡を求めよ．

図 19 に示すように，`LocusEquation` コマンドを用いて軌跡の方程式 $-7x^2 + 9y^2 = -63$ を求めることができた．

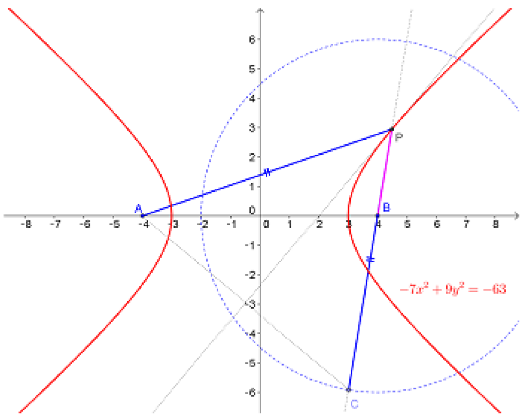

図 19 双曲線

5.4 定点までの距離と定直線までの距離の比が一定である点の軌跡

> [例 7]　定点Ｆ $(4, 0)$ と定直線 $x = -4$ があり，点Ｆまでの距離と定直線までの距離の比が一定となるように点Ｐが動くとき，点Ｐの軌跡を求めよ．

離心率 e をスライダーで定義して $\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}} = e$ となるように，図 20 のような作図を行った．LocusEquation コマンドを用いると，**方程式 $25x^2 - 200x + 25y^2 = 1212$ を求めることはできたが,「軌跡」機能を用いて描かれた曲線とは一致しないので軌跡の方程式ではない.（方程式 $25x^2 - 200x + 25y^2 = 1212$ は，図 20 の作図において補助的に用いた円である．）**

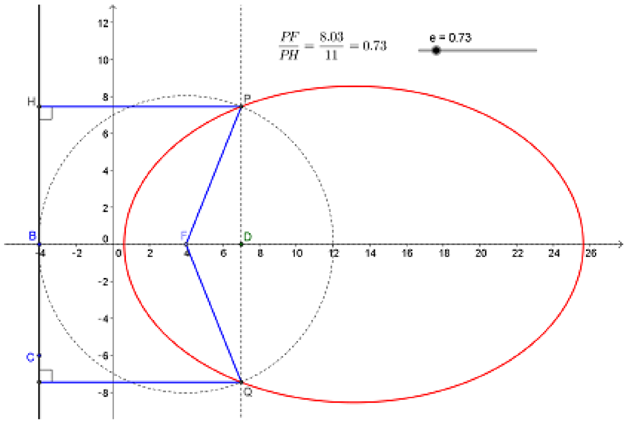

図 20 一般の 2 次曲線（離心率による定義）

6 その他（軌跡の方程式が正しく求められない例）

図形的な考察を行うと軌跡が簡単に求められるにもかかわらず，LocusEquation コマンドを用いると，誤った方程式が得られたり，方程式が全く求められない例を以下に示す.

6.1 誤った方程式が得られる場合

> [例 8]　２つの定点Ａ $(-4, 2)$ とＢ $(4, 2)$ があり，点Ｃは直線ＡＢ上を動く．
> 正三角形ＡＣＤと正三角形ＣＢＥを直線ＡＢに関して同じ側に作る．
> 直線ＡＥと直線ＢＤの交点をＦとするとき，点Ｆの軌跡を求めよ．

図 21 において図形的な考察を行うと，常に $\angle \mathrm{AFB} = 120°$ となるので，円周角の定理の逆より，軌跡は円となることが分かる．しかし，LocusEquation コマンドを用いると，**方程式 $35993x = 63108$ を求めることはできたが,「軌跡」機能を用いて描かれた曲線（円）とは一致しないので軌跡の方程式ではない.**

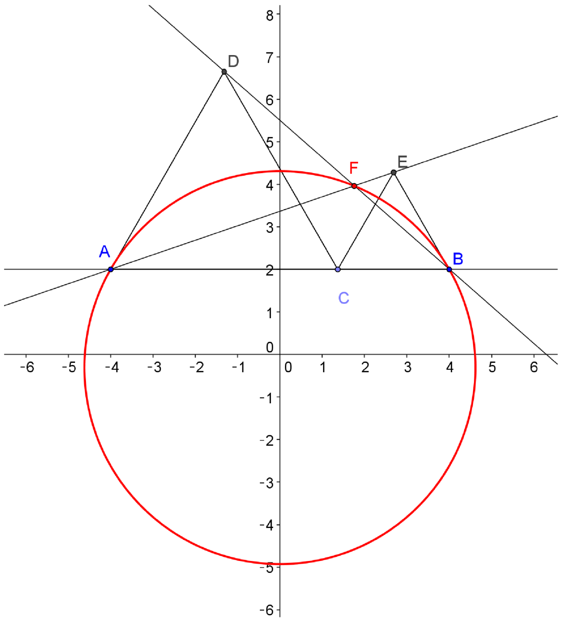

図 21 2 つの正三角形の頂点を結ぶ直線の交点の軌跡

6.2 方程式が全く求められない場合

> [例 9]　2 つの定点A $(-3,0)$ とB $(3,0)$ があり，点Cは線分ABを直径とする円周上を動く．このとき，△ABCの内心Iと重心Gの軌跡を求めよ．

図 22 において図形的な考察を行うと，∠ACB $= 90°$ より，∠CAB＋∠CBA $= 90°$．よって，∠IAB＋∠IBA $= 45°$ より，∠AIB $= 135°$．円周角の定理の逆より，軌跡は円周の一部（円弧）となる．しかし，LocusEquation コマンドを用いて，**軌跡の方程式を求めることはできなかった．**

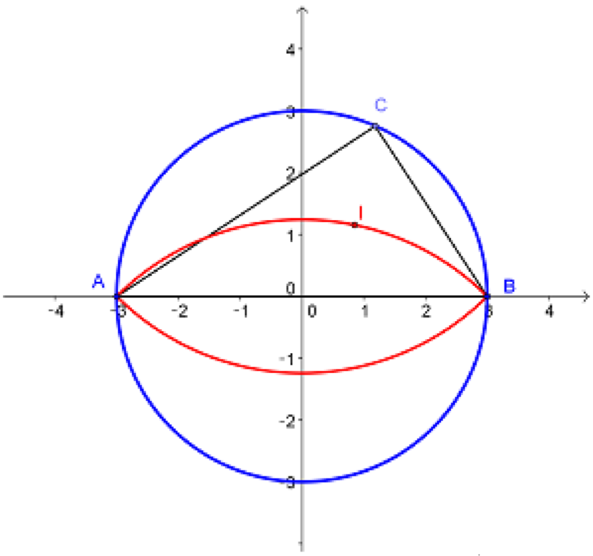

図 22 2 頂点を直径とする円周上を他の頂点が動く三角形の内心の軌跡

また，図23において図形的な考察を行うと，OC : OG = 3 : 1より，常にOG = 1. よって，軌跡は原点を中心とする半径1の円となるが，LocusEquationコマンドで，**軌跡の方程式を求めることはできなかった.**

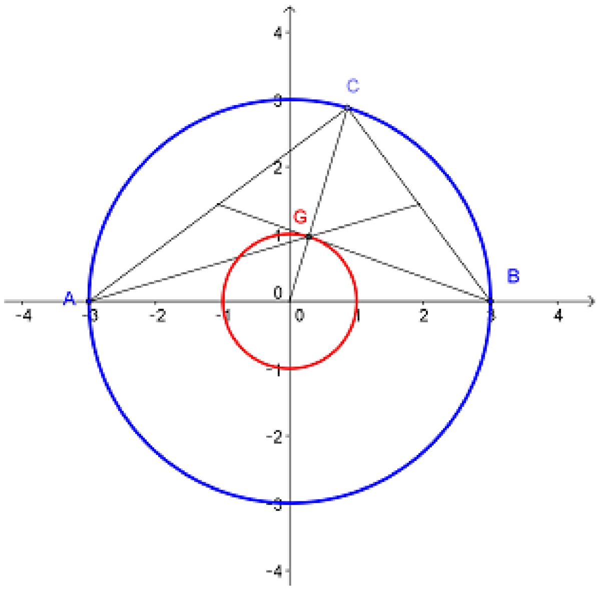

図23 2頂点を直径とする円周上を他の頂点が動く三角形の重心の軌跡

7 考察とまとめ

三角形の重心などの軌跡の方程式をGeoGebraで調べるきっかけとなったのは，愛知教育大学の飯島康之先生(1)の示唆によるものである．実際に調べてみると驚きが多く，典型的な軌跡の問題について調べてみることになった．その結果，軌跡の方程式が求められる問題と求められない問題が存在することが分かった．特に，教科書の例題レベルの，例3のような簡単な問題について軌跡の方程式を求められないのは意外であった．

例3が出来ないようでは，授業で用いるには支障がある．そこで，どのようなタイプの問題であれば問題なく扱うことが出来るのか，結果から分析を試みたが，まだ結論を得られていない．

次に，LocusEquationコマンドを使った教材は，GeoGebra Tube等に少量ながら公開されているので，それらの事例についても調べてみた．しかし，公開されているのはどれも上手く軌跡の方程式が求められる事例であり，軌跡の方程式が求められない事例を見つけることは出来なかった．GeoGebraのUser Forumでも話題として取り上げれれていない．そもそも,「軌跡の方程式を求められない」には，次の2つの場合がありうる：

1. 原理的（数学的）に不可能
2. 原理的には可能であるが，計算量が多く実際的な時間内に求められない

GeoGebra開発チームによるLocusEquationコマンドの解説(2)には，次のように記されている． "If the locus is too complicated then it will return 'undefined'."

すなわち，軌跡の方程式を求める際の計算が複雑すぎて時間がかかる場合には，途中でCAS計算を打ち切り,「未定義」を返すようにプログラミングされている．GeoGebra

では，CASの計算時間の上限はデフォルトでは5秒に設定されているが，60秒まで延長することができる．そこで，60秒に延長して軌跡の方程式を求めてみたが，結果は同じであった．今回，軌跡の方程式を求めることが出来なかった問題が，上記2つのどちらに属するのか考察してみたが，これについても明確な結論は得られていない．

GeoGebraのLocusEquationコマンドは，内部的には「グレブナー基底」を用いて計算を行っている．今後は,「グレブナー基底」についての知識を深め，GeoGebraのソースコード等も見て，どこに問題があるのか明らかにしていきたい．

参考文献

(1) 飯島康之,「作図ツールを用いた五心の逆の作図問題に関する数学的探究について」, 日本科学教育学会研究会研究報告 Vol.28 No.8　ISSN　1882-4684　pp.57-62

(2) GeoGebra開発チーム，LocusEquationコマンドの解説 http://wiki.geogebra.org/en/LocusEquation_Command