数理解析研究所講究録
第1951巻 2015年 85-90

数値積分を取り入れた統計教材の開発

弓削商船高専　野町　俊文 (Toshifumi Nomachi)
Yuge National College of Maritime Technology

1　はじめに

高等学校, 高専, あるいは大学など多くの学校で記述統計・推測統計の基礎的な内容を扱う科目が必修科目として置かれている. その教育教材として数式と同程度以上に図表が用いられている. 我々はRIMS研究集会において, 正規分布に従う確率変数の確率をTEXのマクロパッケージ (ketslide.sty, ketlayer.sty) を利用し, 正規分布表を用いたプレゼンテーションによりketslide等の有効性を示している [1]. 数式入力においてTEXは使用頻度が高く多くの国でも用いられており, 信頼性も高い. 統計教材 [2], [3] の図/表は, Scilab[4], またはR[5] 上のKETpic [6] により図/表を作成している. 我々は, これらの教材の執筆に携わっている. 本報告では, 3次元の教育教材の開発について考える. 多次元 (多変量) については, 場合の数も増えるため, 計算が複雑になり, 教材として余り扱っていないのが現状である. 授業等において, 板書では正確に表現することが困難な図・表をKETpicパッケージを用いれば, 正確にきれいな図を用いて表現することができる. 一度作成しておけば, さらに発展・応用させることができるので, 様々な問題の作成や解答指導において利用できる. CASとしてScilabを用い, KETpicパッケージを利用して比較的簡単に正規分布表を作成することができる. さらにKETpicパッケージは基礎的な教育教材のみばかりでなく, その他, 研究等への応用も期待され得るソフトウエアでもある. 作図としては3-D図形作成にも対応しているため, 本報告では統計教材として2次元正規分布への応用について考える. 確率分布も単に2変数関数の曲面グラフとしての3-D図形を作成する. さらに確率を2重積分の計算例と考えて数値表を作成し, ソフトウエアの教育教材として与える.

2　2次元正規分布

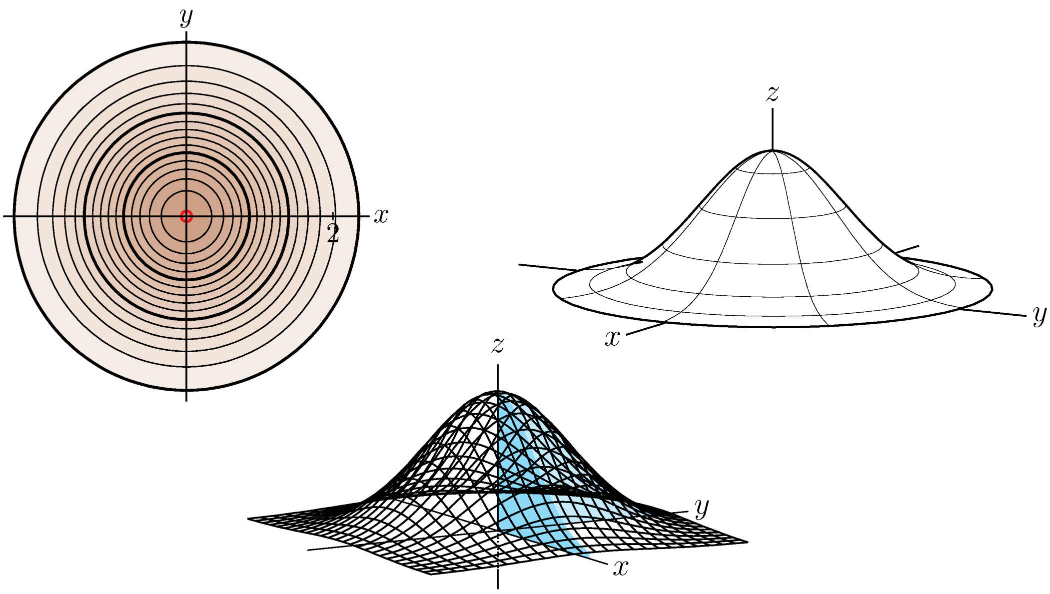
確率ベクトル(X,Y)は2次元正規分布にしたがう確率ベクトルとし, $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,{\sigma_1}^2,{\sigma_2}^2,\rho)$とする. $U=\dfrac{X-\mu_1}{{\sigma_1}^2}$, $V=\dfrac{Y-\mu_2}{{\sigma_2}^2}$とおき, 標準化すると, $(U,V)\sim N(0,0,1,1,\rho)$で表される2次元標準正規分布にしたがう. ρは相関係数と呼ばれるパラメータである.　$-1<\rho<1$にたいして, 密度関数は次式で与えられる.

$$f(u,v)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2-2uv\rho+v^2)\right\}$$

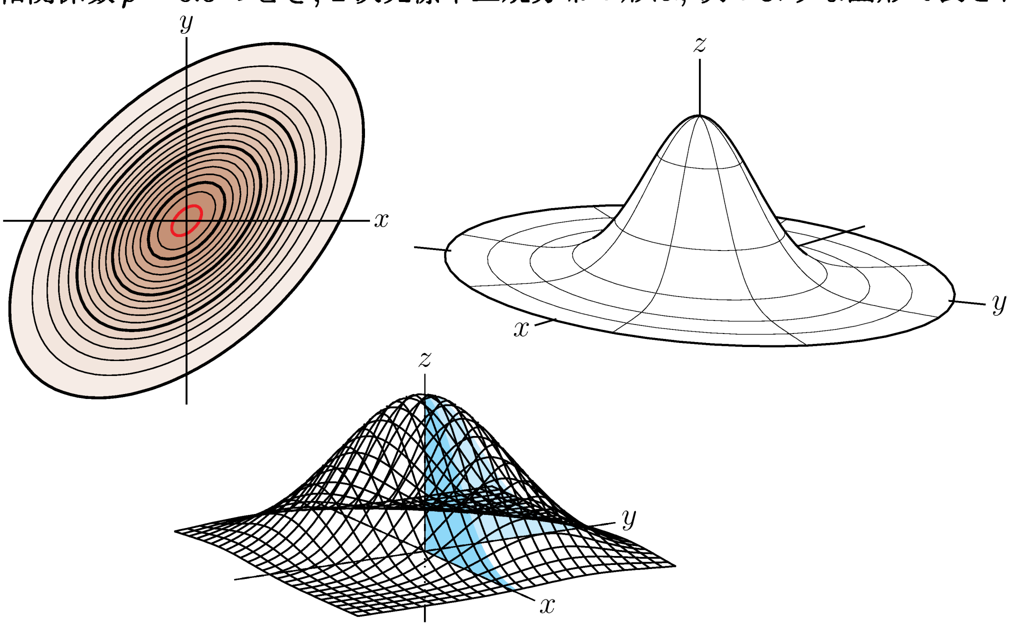
$|\rho|=1$のとき, 1次元の正規分布に退化する.

2.1　2次元正規分布の形

簡便のため, $|\rho| = 1$ を除いて考えることにする. すなわち, $-1 < \rho < 1$ とする. まず, 相関係数 $\rho = 0$ のとき2次元標準正規分布の形を次のような方法により3-D図形で表す. さらに確率密度を曲線で表し, 曲線の xy 平面上への射影は年輪のように表される.



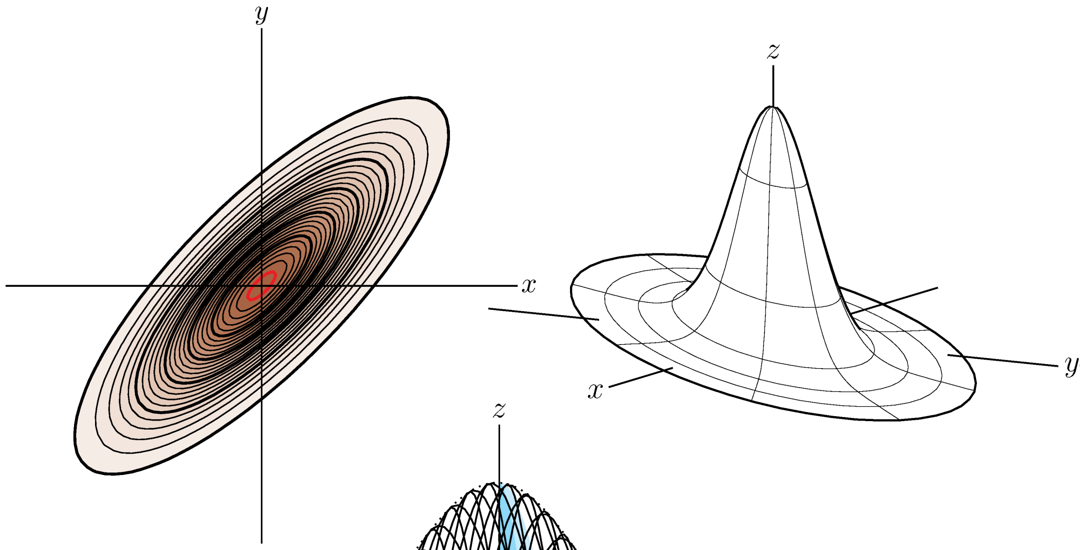
相関係数 $\rho = 0.5$ のとき, 2次元標準正規分布の形は, 次のような図形で表される.

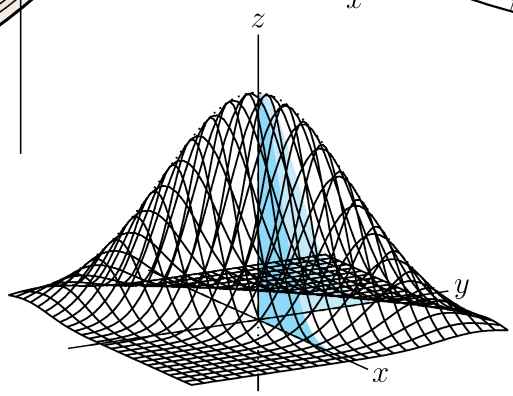


したがって, 相関係数 ρ が0から1に近づくとき, 2次元標準正規分布の形は次のよう

な形に変化して行く.

$\rho = 0.8$

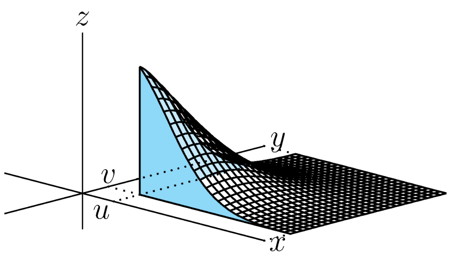


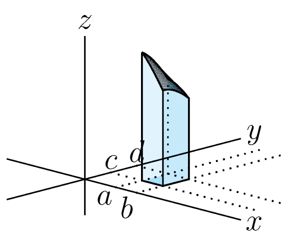


2.2 2次元正規分布の上側確率

1次元の正規分布表をScilabを用いてプログラミングするとき, 150行ぐらい必要である. 下記の図形に対応する2次元正規分布表をScilabを用いてプログラミングすると, 300行ぐらい必要であるが, [1]を利用することにより, 比較的容易にプログラミングすることが可能である.

$$p(u,v) = \int_u^\infty \int_v^\infty \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2 - 2uv\rho + v^2)\right\} dxdy$$



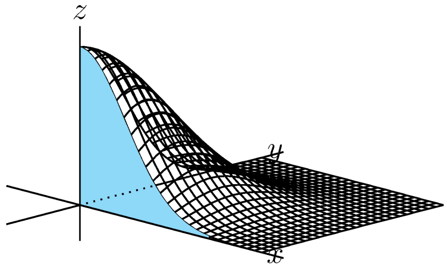


$\rho = 0.5$ のとき, 2 次元正規分布の上側確率 $P\{U \geq u, V \geq v\}$ の表

$u \backslash v$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	0.3333	0.2782	0.2197	0.1917	0.1723	0.1543	0.1371	0.1210	0.1059	0.0920
0.1	0.2782	0.2491	0.2033	0.1766	0.1586	0.1420	0.1262	0.1113	0.0975	0.0847
0.2	0.2197	0.2033	0.1806	0.1612	0.1450	0.1298	0.1154	0.1018	0.0891	0.0774
0.3	0.1917	0.1766	0.1612	0.1461	0.1317	0.1179	0.1048	0.0925	0.0809	0.0703
0.4	0.1723	0.1586	0.1450	0.1317	0.1187	0.1063	0.0945	0.0834	0.0730	0.0634
0.5	0.1543	0.1420	0.1298	0.1179	0.1063	0.0952	0.0846	0.0747	0.0654	0.0568
0.6	0.1371	0.1262	0.1154	0.1048	0.0945	0.0846	0.0752	0.0664	0.0581	0.0505
0.7	0.1210	0.1113	0.1018	0.0925	0.0834	0.0747	0.0664	0.0585	0.0513	0.0445
0.8	0.1059	0.0975	0.0891	0.0809	0.0730	0.0654	0.0581	0.0513	0.0449	0.0390
0.9	0.0920	0.0847	0.0774	0.0703	0.0634	0.0568	0.0505	0.0445	0.0390	0.0339
1.0	0.0793	0.0730	0.0668	0.0606	0.0547	0.0490	0.0435	0.0384	0.0336	0.0292
1.1	0.0678	0.0624	0.0571	0.0518	0.0467	0.0419	0.0372	0.0328	0.0287	0.0250
1.2	0.0575	0.0530	0.0484	0.0440	0.0397	0.0355	0.0316	0.0278	0.0244	0.0212
1.3	0.0484	0.0445	0.0407	0.0370	0.0334	0.0299	0.0265	0.0234	0.0205	0.0178
1.4	0.0404	0.0372	0.0340	0.0309	0.0278	0.0249	0.0221	0.0195	0.0171	0.0149
1.5	0.0334	0.0307	0.0281	0.0255	0.0230	0.0206	0.0183	0.0162	0.0142	0.0123
1.6	0.0274	0.0252	0.0231	0.0209	0.0189	0.0169	0.0150	0.0133	0.0116	0.0101
1.7	0.0223	0.0205	0.0188	0.0170	0.0154	0.0138	0.0122	0.0108	0.0094	0.0082
1.8	0.0180	0.0165	0.0151	0.0137	0.0124	0.0111	0.0099	0.0087	0.0076	0.0066
1.9	0.0144	0.0132	0.0121	0.0110	0.0099	0.0089	0.0079	0.0069	0.0061	0.0053

2.3 象限確率

象限確率とは, すべての確率変数が正または 0 である確率であり, 2 次元標準正規分布の場合, 次の図形の体積で表される.



2 次元標準正規分布の場合：

$$P\{U \geq 0, V \geq 0\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \sin^{-1} \rho$$

$\rho = 0$ のとき, $P\{U \geq 0, V \geq 0\} = P\{U \geq 0\} \cdot P\{V \geq 0\} = \dfrac{1}{4}$

$\rho = 1$ のとき, $P\{U \geq 0, V \geq 0\} = P\{U \geq 0\} = \dfrac{1}{2}$

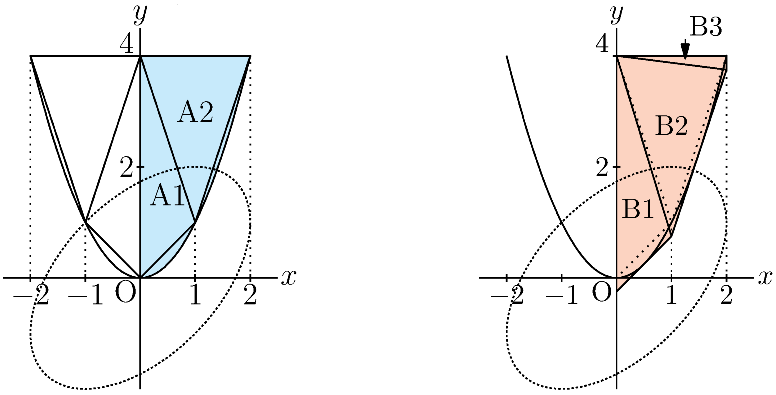
また $\rho = \dfrac{1}{2}$ のとき,

$$P\{U \geq 0, V \geq 0\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \fallingdotseq 0.3333$$

となり, 前ページの確率分布表 ($\rho = 0.5$) の値 0.3333 と一致していることがわかる.

2.4 曲線の領域に対する確率

2 次不等式で表された領域 $\{V > U^2 \mid U \geq 0\}$ の確率について, Scilab 関数 $2int(\cdot)$ を用いて, 数値積分で求める.



左図の三角形 A_1, A_2 に対する数値積分は 0.1475 であり, 右図の三角形 B_1, B_2, B_3 に対する数値積分は 0.1922 と比べると, 若干数値が異なる.

3 まとめと今後の課題

1 次元の正規分布を拡張して 2 次元の正規分布の図・表を KETpic パッケージを用いて表現することができる. しかしながら, 3-D の図形の表現方法, あるいは, パラメータを変化させるときの関数の極限の図形などは, 動的な幾何ソフトが適当なようである. 数値計算は直線的な領域に対しては 4 次のオーダーで正確に計算することができたが, 一般の領域に対しては 2 次のオーダーまで求めたが, 誤差がかなりあり改善を要する. 基礎的なレベルでの理解不足の学生を含むクラスなど, 多様な学生に対しては, 作図することにより理解度が深まると考えられる. それぞれの理解度に応じて作図させることが可能であり, 教育効果が期待できる.

4 謝辞

本研究を進めるに当たり, KETpic 開発メンバーの皆様には講習会などにおいて, ご指導をいただきました. また, 福岡大学濱田龍義先生, 東海大学前田陽一先生から助言を頂戴しました. 大変ありがとうございました. また, 本 RIMS 研究集会代表者東京理科大学清水克彦先生, ならびに名古屋大学中村泰之先生には報告できるようお取りはからいただき, 感謝いたします. 最後になりましたが, 東邦大学教授高遠節夫先生には終始ご指導を承り, 篤く御礼申し上げます.

参考文献

[1] 高遠節夫, 小柴俊彦, 野町俊文, 「統計教材の要素と作成ツールの評価」, RIMS 講究録 (2014)

[2] 高遠節夫他, 「新確率統計」, 大日本図書 (2013)

[3] 高遠節夫他, 「新確率統計 問題集」, 大日本図書 (2014)

[4] http://www.scilab.org

[5] http://www.r-project.org

[6] http://www.ketpic.com