数理解析研究所講究録
第1952巻 2015年 165-172

円 β アンサンブルのトレースの中心極限定理[1]

鹿児島大学大学院理工学研究科　松本 詔 (Sho MATSUMOTO) [2]
Graduate School of Science and Engineering, Kagoshima University

本稿は Tiefeng Jiang 氏 (University of Minnesota) との共同研究 [4] の内容を中心に記されている. Diaconis–Shahshahani [2] や Diaconis–Evans [1] により円ユニタリアンサンブルのトレースのモーメントが明示的に計算され, それを用いてトレースの中心極限定理が得られた. 我々の目標は, 彼らの結果を円直交アンサンブルや, より一般の円 β アンサンブルへと拡張することである.

1 円ユニタリアンサンブル

CUE. ユニタリ群 $\mathbf{U}(n)=\{g\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid gg^*=I_n\}$ を考える. ユニタリ群は行列の積に関して群をなす, 代表的なコンパクトリー群である. よく知られているようにコンパクトリー群には Haar 確率測度と呼ばれる確率測度 μ が一意的に存在する ([6, §3] 参照). すなわち, $\mathbf{U}(n)$ のボレル集合族で定義される μ は,

$$\int_{\mathbf{U}(n)} f(g_1gg_2)\mu(dg)=\int_{\mathbf{U}(n)} f(g)\mu(dg), \qquad \int_{\mathbf{U}(n)}\mu(dg)=1$$

を満たす. ここで g_1,g_2 は $\mathbf{U}(n)$ の固定された元で, f は $\mathbf{U}(n)$ 上の可積分関数である. このとき確率空間 $(\mathbf{U}(n),$ ボレル集合族$,\mu)$ を円ユニタリアンサンブル (circular unitary ensemble, CUE) と呼ぶ.

U_n をこの CUE から取り出されたランダム行列とする. 以下これを $n\times n$ CUE 行列と呼ぶ.

CUE の固有値密度. CUE 行列 U_n の固有値を $e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n}$ $(\theta_1,\dots,\theta_n\in[0,2\pi))$ としたとき, その密度関数は, Weyl の積分公式 ([6, §8.1]) により

$$f(\theta_1,\dots,\theta_n;2)=\frac{1}{(2\pi)^n n!}\prod_{1\le j<k\le n}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k}|^2$$

となることが知られている. 定数倍を除き, 固有値の差積の絶対値の2乗になっていることに注意しよう.

整数の分割. 我々はまず確率変数 $\mathrm{Tr}(U_n^j)$ $(j,n\in\mathbb{N})$ について考察する. そのために整数の分割の記号を用いるのが都合が良い. 記号は主に Macdonald の本 [7] にしたがうことにする.

$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_l)$ が分割であるとは, それが有限個の正の整数からなる非増加列であるときをいう. $|\lambda|:=\sum_{j=1}^l\lambda_j$ を λ のサイズといい, $|\lambda|=m$ のとき λ は m の分割であるという. l を $\ell(\lambda)$

[1]確率論シンポジウム, 京都大学数理解析研究所, 平成26年12月16日 ~ 19日
[2]shom@sci.kagoshima-u.ac.jp

で表し, λ の長さという. 正の整数 r に対し, $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ の中で r に等しいものの個数を $m_r(\lambda)$ とかく: $m_r(\lambda) = |\{j \mid 1 \leq j \leq \ell(\lambda),\ \lambda_j = r\}|$. また, 自然数 z_λ を

$$z_\lambda = \prod_{r \geq 1} r^{m_r(\lambda)!} m_r(\lambda)! \tag{1.1}$$

と定める. たとえば $\lambda = (5,2,2,2,1)$ ならば, $|\lambda| = 5+2+2+2+1 = 12$, $\ell(\lambda) = 5$, $z_\lambda = 1 \times 2^3 3! \times 5 = 240$ である.

Diaconis–Shahshahani の結果. ここで Diaconis–Shahshahani [2] の結果を紹介しよう. 行列 U と分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ に対し,

$$p_\lambda(U) = \prod_{j=1}^{l} p_{\lambda_j}(U), \qquad p_r(U) = \operatorname{Tr} U^r \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

と定める. たとえば $p_{(5,2,2,2,1)}(U) = (\operatorname{Tr} U^5)(\operatorname{Tr} U^2)^3(\operatorname{Tr} U)$ となる. Diaconis–Shahshahani [2] は次のように CUE 行列のトレースのモーメントに対する明示公式を得た.

定理 1,1 (Diaconis–Shahshahani [2]). *U_n を $n \times n$ CUE 行列とする. μ, ν を整数の分割とする. $n \geq |\mu| \vee |\nu|$ ならば*

$$\mathbb{E}[p_\mu(U_n)\overline{p_\nu(U_n)}] = \delta_{\mu\nu} z_\mu. \tag{1.2}$$

ここで $\delta_{\mu\nu}$ はクロネッカーのデルタであり, z_μ は (1.1) で定まる.

この公式において, 以下の点に注意してほしい.

- すべてのモーメントではなく $n \geq |\mu| \vee |\nu|$ という仮定がある. $n < |\mu|$ または $n < |\nu|$ のときはこの主張は成立しない. たとえば自明な例ではあるが, $n = 1$ のときはどのような μ と ν に対しても $\mathbb{E}[p_\mu(U_1)\overline{p_\nu(U_1)}] = \int_0^{2\pi} e^{i|\mu|\theta}\overline{e^{i|\nu|\theta}} \frac{d\theta}{2\pi} = \delta_{|\mu|,|\nu|}$ となり, z_μ は現れない.
- (1.2) の右辺は n に依らない形である. よって n が十分に大きければ $\mathbb{E}[p_\mu(U_n)\overline{p_\nu(U_n)}]$ は n に依存しない.
- (1.2) の右辺は μ と ν が等しいときのみ消えない. よって n が十分に大きければ $p_\mu(U_n)$ たちは「直交」する.
- (1.2) の右辺は z_μ というとても簡単な形で与えられている.

中心極限定理. 定理 1.1 を用いて, 確率変数 $\{\operatorname{Tr}(U_n^k)\}_{n,k=1,2,\ldots}$ の $n \to \infty$ における中心極限定理を得ることができる. 複素標準正規分布を思い出そう. ξ, η を独立で, ともに実標準正規分布にしたがう確率変数とする. このとき複素数値確率変数 $\xi^{\mathbb{C}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + i\eta)$ は複素標準正規分布にしたがうという. $\mathbb{E}[\xi^{\mathbb{C}}] = 0$, $\mathbb{E}[|\xi^{\mathbb{C}}|^2] = 1$ が成り立つ.

k を（固定された）正の整数, $\xi_1^{\mathbb{C}}, \ldots, \xi_k^{\mathbb{C}}$ を i.i.d. で複素標準正規分布をもつとする．このとき，分割 $\mu = (1^{a_1}, 2^{a_2}, \ldots, k^{a_k})$, $\nu = (1^{b_1}, 2^{b_2}, \ldots, k^{b_k})$ に対し

$$\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{k}(\sqrt{j}\xi_j^{\mathbb{C}})^{a_j}\overline{(\sqrt{j}\xi_j^{\mathbb{C}})^{b_j}}\right] = \delta_{\mu\nu} z_\mu$$

が成り立つことが容易に分かる．(1.2) と比較すると，n を固定したとき，$(\mathrm{Tr}(U_n^1), \mathrm{Tr}(U_n^2), \ldots, \mathrm{Tr}(U_n^k))$ と $(\sqrt{1}\xi_1^{\mathbb{C}}, \sqrt{2}\xi_2^{\mathbb{C}}, \ldots, \sqrt{k}\xi_k)$ の混合モーメントが，高次を除いて一致することが見てとれる．標準的な moment method を適用することで次の中心極限定理が得られる．

系 1.2. *U_n を $n \times n$ CUE 行列とする．各 $k \geq 1$ に対し，次の分布収束が成立する．*

$$(\mathrm{Tr}(U_n^1), \mathrm{Tr}(U_n^2), \ldots, \mathrm{Tr}(U_n^k)) \quad \xrightarrow{\text{distribution}} \quad (\sqrt{1}\xi_1^{\mathbb{C}}, \sqrt{2}\xi_2^{\mathbb{C}}, \ldots, \sqrt{k}\xi_k^{\mathbb{C}}) \qquad (n \to \infty)$$

定理 1.1 の証明. [2] における証明を簡単に紹介しよう．証明は全く確率論的ではない．表現論，特に対称群とユニタリ群の指標の理論を用いる．n 変数 $x_1, \ldots, x_n$ に関する Schur 多項式とは，長さ $\ell(\lambda)$ が n 以下の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ （ただし $\lambda_{\ell(\lambda)+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ とおく）に対し

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\det(x_j^{\lambda_i+n-i})_{1\leq i,j\leq n}}{\det(x_j^{n-i})_{1\leq i,j\leq n}}$$

で定義される（[7, Ch. 1]）．有理式に見えるが，分子は交代式で分母は Vandermonde の行列式であるため，割り切れて対称多項式を定める．より一般に $n \times n$ 行列 A に対して，$s_\lambda(A) = s_\lambda(a_1, \ldots, a_n)$ と定める．ただし $a_1, \ldots, a_n$ は A の固有値．また $\ell(\lambda) > n$ のときは $s_\lambda(A) = 0$ と定める．

Schur 多項式はユニタリ群の既約表現の指標なので，Haar 測度に関する積分において正規直交系をなす．すなわち次の式が成り立つ．

$$\mathbb{E}[s_\lambda(U_n)\overline{s_\rho(U_n)}] = \delta_{\lambda\rho}\,\delta(\ell(\lambda) \leq n). \tag{1.3}$$

ここで $\delta(\ell(\lambda) \leq n)$ は，$\ell(\lambda) \leq n$ のとき 1 でそれ以外では 0 を表す．

では，定理 1.1 の証明に戻ろう．まず関数 p_μ を s_λ たちで展開する．

$$p_\mu = \sum_\lambda \chi_\mu^\lambda s_\lambda.$$

和は $|\lambda| = |\mu|$ なる分割 λ 全体を走る．ここで χ_μ^λ は対称群の指標値を表していて，$\mathbb{Z}$ に値をとる．この等式は Frobenius の指標公式と呼ばれるよく知られた古典的なものである．これによりまず

$$\mathbb{E}[p_\mu(U_n)\overline{p_\nu(U_n)}] = \sum_\lambda \sum_\rho \chi_\mu^\lambda \chi_\nu^\rho \mathbb{E}[s_\lambda(U_n)\overline{s_\rho(U_n)}]$$

と展開される．次に Schur 多項式の直交性 (1.3) から

$$\mathbb{E}[p_\mu(U_n)\overline{p_\nu(U_n)}] = \sum_\lambda \chi_\mu^\lambda \chi_\nu^\lambda$$

となる．ここで和は $|\lambda| = |\mu| = |\nu|$ かつ $\ell(\lambda) \le n$ なる λ 全体を走り，特に $|\mu| \ne |\nu|$ のときは $\mathbb{E}[p_\mu(U_n)\overline{p_\nu(U_n)}] = 0$ となる．ところが定理の仮定 $n \ge |\mu| \vee |\nu|$ から，条件 $\ell(\lambda) \le n$ は自動的にしたがう．よって λ は $|\lambda| = |\mu|(= |\nu|)$ となる分割全体を走る．最後に対称群の指標の直交性から，直前の式は $\delta_{\mu\nu} z_\mu$ に等しいことが直ちにしたがう．以上により定理 1.1 の証明が完了した．

2 円 β アンサンブル

前章で Diaconis–Shahshahani による CUE の結果を得た．これを円 β アンサンブルまで拡張することが我々の目標である．

COE, CSE. U_n を $n \times n$ CUE 行列という．ランダム行列 $V_n^{(1)} := U_n U_n^{\mathrm{T}}$ （$\cdot^{\mathrm{T}}$ は転置行列を表す）を COE 行列という．また $V_n^{(4)} := U_{2n} U_{2n}^{\mathrm{D}}$ を CSE 行列という．ただし $U_{2n}^{\mathrm{D}} = J_n U_{2n}^{\mathrm{T}} J_n^{\mathrm{T}}$, $J_n = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix}$ である．$V_n^{(4)}$ は $2n$ 次の複素行列であるが，n 次の四元数行列と自然に同一視することもできる．なお，COE, CSE は それぞれ circular orthogonal/symplectic ensemble の略である．また $V_n^{(2)} := U_n$ とおく．これら 3 種類のランダムユニタリ行列 $V_n^{(\beta)}$ $(\beta = 1, 2, 4)$ の集団を，まとめて Dyson の円アンサンブル [3] という．

$V_n^{(\beta)}$ $(\beta = 1, 2, 4)$ の固有値密度関数は

$$f(\theta_1, \dots, \theta_n; \beta) = \frac{\Gamma(1+\beta/2)^n}{(2\pi)^n \Gamma(1+\beta n/2)} \prod_{1 \le j < k \le n} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^\beta \qquad (\theta_1, \dots, \theta_n \in [0, 2\pi))$$

で与えられることが知られている．$\beta = 2$, すなわち CUE のときは既に前章で述べた．

CβE. β を正の実数，n を正の整数とする．$(\theta_1, \dots, \theta_n)$ が確率分布 $f(\theta_1, \dots, \theta_n; \beta) d\theta_1 \cdots d\theta_n$ に従う確率変数であるとき，ランダム列 $Z_n^{(\beta)} = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ の集団を円 β アンサンブル (circular β-ensemble, CβE) という．$\beta = 1, 2, 4$ のときはそれぞれ COE, CUE, CSE の固有値分布に他ならない．一般の $\beta > 0$ に対しても，これを固有値分布にもつようなランダム行列 $V_n^{(\beta)}$ の構成法が知られている（[5]）．

トレースの計算例. 我々の最初の目的は，CUE $(\beta = 2)$ の場合である定理 1.1 を一般の β へ拡張することである．分割 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ に対し

$$p_\mu(Z_n^{(\beta)}) = \prod_{j=1}^{l} p_{\mu_j}(Z_n^{(\beta)}), \qquad p_r(Z_n^{(\beta)}) = p_r(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) = \sum_{k=1}^{n} e^{ir\theta_k} \quad (r = 1, 2, \dots)$$

とおく．

例を見よう．**以下 $\alpha = 2/\beta$ とする.** $\beta = 1, 2, 4$ はそれぞれ $\alpha = 2, 1, 1/2$ に対応する．後述する Jack 多項式の理論を用いて，次の例が代数的に計算できる: $n \ge 2$ のとき

$$\mathbb{E}\left[|p_2(Z_n^{(\beta)})|^2\right] = \frac{2\alpha n(n^2 + 2(\alpha-1)n + \alpha^2 - 3\alpha + 1)}{(n+\alpha-1)(n+2\alpha-1)(n+\alpha-2)}. \tag{2.1}$$

$\beta=2$ のときは単にこれは $\mathbb{E}\left[|p_2(U_n)|^2\right]=2$ となる. 他の例をみよう. $n\geq 2$ のとき

$$\mathbb{E}\left[p_2(Z_n^{(\beta)})\overline{p_{(1,1)}(Z_n^{(\beta)})}\right]=\frac{2\alpha^2(\alpha-1)n}{(n+\alpha-1)(n+2\alpha-1)(n+\alpha-2)}. \tag{2.2}$$

$\beta=2$ のときこの式は0となる.

定理1.1の直後に注意したことを思い出そう. そこで述べられたCUEのときの良い性質は最早 $\beta\neq 2$ では破綻している. すなわち, n がいくら大きな数でも $\mathbb{E}\left[p_\mu(Z_n^{(\beta)})\overline{p_\nu(Z_n^{(\beta)})}\right]$ は n に依存し, たとえ $\mu\neq\nu$ でも消えずに簡単な値にならない. より一般の μ,ν ではますます複雑になり, 単純な閉じた形で表示することは不可能に思える. そこで我々はモーメントの具体的な等式表示は諦めて, 不等式により評価する. 次のような結果を得た.

モーメントに関する主定理.

定理 2.1 (Jiang–M. [4]). 定数 A,B を

$$\begin{aligned}A=&A(n,m,\alpha)=\left(1-\frac{|\alpha-1|}{n-m+\alpha}\delta(\alpha\geq 1)\right)^m,\\ B=&B(n,m,\alpha)=\left(1+\frac{|\alpha-1|}{n-m+\alpha}\delta(\alpha<1)\right)^m\end{aligned}$$

により定義する. ここで $\delta(\cdots)$ は, いつものように $(\cdots)$ の中身が正しいときに1, そうでなければ0を与えるものとする.

(i) μ が m の分割で, $n\geq m$ ならば,

$$A\leq\frac{\mathbb{E}\left[|p_\mu(Z_n^{(\beta)})|^2\right]}{\alpha^{\ell(\mu)}z_\mu}\leq B.$$

(ii) μ,ν が m の異なる分割で, $n\geq m$ ならば,

$$\left|\mathbb{E}\left[p_\mu(Z_n^{(\beta)})\overline{p_\nu(Z_n^{(\beta)})}\right]\right|\leq\max\{|A-1|,|B-1|\}\sqrt{\alpha^{\ell(\mu)+\ell(\nu)}z_\mu z_\nu}.$$

(iii) $|\mu|\neq|\nu|$ のときは $\mathbb{E}\left[p_\mu(Z_n^{(\beta)})\overline{p_\nu(Z_n^{(\beta)})}\right]=0.$

$\beta=2$ のときは定理1.1の「等式」を復元することに注意せよ.

CUEのときと同様に moment method により次の中心極限定理がいえる.

系 2.2. 各 $k\geq 1$ に対し, 次の分布収束が成立する.

$$(p_1(Z_n^{(\beta)}),p_2(Z_n^{(\beta)}),\ldots,p_k(Z_n^{(\beta)}))\xrightarrow{\text{distribution}}(\sqrt{\frac{2\cdot 1}{\beta}}\xi_1^{\mathbb{C}},\sqrt{\frac{2\cdot 2}{\beta}}\xi_2^{\mathbb{C}},\ldots,\sqrt{\frac{2\cdot k}{\beta}}\xi_k^{\mathbb{C}})\qquad(n\to\infty)$$

定理 2.1 の証明と Jack 多項式. 定理 1.1 の証明では, 表現論, 特に指標の理論を用いた. CβE においても基本的なアイディアは同じである. しかし Schur 多項式の代わりに Jack 多項式 ([7, §VI.10]) を用いる.

Jack 多項式 $J_\lambda^{(\alpha)}(x_1,\dots,x_n)$ (λ は長さが n 以下の分割) は n 変数対称多項式であり, $\alpha=1$ のとき Schur 多項式に定数倍を無視すれば一致する. より正確に述べるために, 分割に関する用語を追加しよう. 分割 λ に対し, 対応する Young 図形 $Y(\lambda)$ を考える. たとえば $\lambda=(5,2,2,2,1)$ のときは

$$Y(\lambda)=\ydiagram{5,2,2,2,1}$$

である. $Y(\lambda)$ の転置 (対角における鏡映) を与える分割を $\lambda'=(\lambda'_1,\lambda'_2,\dots)$ と書き, λ の共役な分割という. $\lambda=(5,2,2,2,1)$ に対し,

$$\lambda'=(5,4,1,1,1),\qquad Y(\lambda')=\ydiagram{5,4,1,1,1}$$

である. 分割 λ に対し,

$$h(\lambda)=\prod_{(i,j)\in Y(\lambda)}(\lambda_i-j+\lambda'_j-i+1)$$

を λ のフック積という. ここで積 $\prod_{(i,j)\in Y(\lambda)}$ は Young 図形の箱全体を走り, $\prod_{(i,j)\in Y(\lambda)}=\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)}\prod_{j=1}^{\lambda_i}$ の意味である. 次の式のように各箱に $\lambda_i-j+\lambda'_j-i+1$ の値を書きこんで, それらをすべて掛けると計算できる.

$$\lambda=(4,2,2),\qquad \young(6521,32,21),\qquad h(\lambda)=6\cdot5\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot2\cdot1=720.$$

話を Jack 多項式に戻そう. Jack 多項式 $J_\lambda^{(\alpha)}$ は $\alpha=1$ のとき, Schur 多項式 s_λ の $h(\lambda)$ 倍になる: $J_\lambda^{(1)}=h(\lambda)s_\lambda$. Jack 多項式は次の直交性を満たす: $\alpha=2/\beta$ に注意して

$$\mathbb{E}\left[J_\lambda^{(\alpha)}(Z_n^{(\beta)})\overline{J_\mu^{(\alpha)}(Z_n^{(\beta)})}\right]=\delta_{\lambda\mu}\cdot\delta(\ell(\lambda)\le n)\cdot C_\lambda(\alpha)\mathcal{N}_\lambda^\alpha(n),$$

ただし,

$$C_\lambda(\alpha) = \prod_{(i,j)\in\lambda} (\alpha(\lambda_i - j) + \lambda'_j - i + 1)(\alpha(\lambda_i - j) + \lambda'_j - i + \alpha),$$

$$\mathcal{N}^\alpha_\lambda(n) = \prod_{(i,j)\in Y(\lambda)} \frac{n + (j-1)\alpha - (i-1)}{n + j\alpha - i}.$$

さらに, 関数 p_μ を Jack 多項式で展開すると,

$$p_\mu = \alpha z_\mu \sum_\lambda \frac{\theta^\lambda_\mu(\alpha)}{C_\lambda(\alpha)} J^{(\alpha)}_\lambda$$

となる. ここで, $\theta^\lambda_\mu(\alpha)$ は α について有理数係数の多項式で, Jack 指標と呼ばれている. $\alpha = 1$ では $\theta^\lambda_\mu(1) = z_\mu^{-1} h(\lambda)\chi^\lambda_\mu$ となり, 本質的には対称群の既約指標値 χ^λ_μ になる.

以上の性質を用いると, 定理 1.1 と同様の証明で次を得る.

命題 2.3. μ と ν が m の分割ならば, 次が成り立つ.

$$\mathbb{E}\left[p_\mu(Z^{(\beta)}_n)\overline{p_\nu(Z^{(\beta)}_n)}\right] = \alpha^{\ell(\mu)+\ell(\nu)} z_\mu z_\nu \sum_{\substack{\lambda:|\lambda|=m,\\ \ell(\lambda)\le n}} \frac{\theta^\lambda_\mu(\alpha)\theta^\lambda_\nu(\alpha)}{C_\lambda(\alpha)} \mathcal{N}^\alpha_\lambda(n). \tag{2.3}$$

m が小さいときは, この公式からモーメントの明示的な値を計算することが可能である. 実際 (2.1), (2.2) はこれを用いて求めた.

さて, $\beta = 2$ のときと最も大きな違いは, 項 $\mathcal{N}^\alpha_\lambda(n)$ がある点である. 実際, この項がなければ Jack 指標の直交性

$$\sum_\lambda \frac{\theta^\lambda_\mu(\alpha)\theta^\lambda_\nu(\alpha)}{C_\lambda(\alpha)} = \delta_{\mu\nu}(\alpha^{\ell(\mu)} z_\mu)^{-1},$$

から (2.3) はもっと簡単に記述できる. $\mathcal{N}^{(\alpha=1)}_\lambda(n) = 1$ だが, $\alpha \neq 1$ では $\mathcal{N}^{(\alpha)}_\lambda(n)$ が邪魔をして Jack 指標の直交性がそのまま適用できず, (2.1), (2.2) で見たように n の入った複雑な式になる.

我々の定理 2.1 の証明の最終段階は, $\mathcal{N}^\alpha_\lambda(n)$ を λ に依らないように定数 A, B で評価したあと, Jack 指標の直交性を用いることである. 詳しい証明は論文 [4] に譲ろう.

より強い中心極限定理. $\beta = 1$ と 4 (COE と CSE) の場合に限るが, より強い形の中心極限定理を得た. COE の場合のみ記そう.

定理 2.4 (Jiang–M. [4]). $V^{(1)}_n$ を *COE* 行列とする. 複素数列 $\{a_j\}_{j=1}^\infty$, $\{b_j\}_{j=1}^\infty$ は $\sum_{j=1}^\infty j(|a_j|^2 + |b_j|^2) \in (0,\infty)$ を満たすとする. このとき, 確率変数

$$X_n := \sum_{j=1}^\infty \left(a_j \operatorname{Tr}[(V^{(1)}_n)^j] + b_j \operatorname{Tr}[(V^{(1)}_n)^{-j}]\right)$$

は, $n\to\infty$ で $U+iV$ に弱収束する. ここで, ランダムベクトル (U,V) は次の共分散をもつ平均 0 の 2 次元実正規分布に従う.

$$\mathbb{E}[U^2]=\sum_{j=1}^{\infty}j|a_j+\overline{b_j}|^2,\quad \mathbb{E}[V^2]=\sum_{j=1}^{\infty}j|a_j-\overline{b_j}|^2,\quad \mathbb{E}[UV]=2\Im\Big(\sum_{j=1}^{\infty}ja_jb_j\Big).$$

この定理の CUE 版 (のより強い主張) は, Diaconis–Evans [1] により得られている. CUE では定理 1.1 のようにモーメントが簡単に記述できるので, 楽に証明できる. 定理 2.4 の我々の証明も標準的な moment method を用いるが, CUE のときと異なりモーメントの評価が困難になる. 定理 2.1 で得た不等式に加え, 次の命題が必要になる.

命題 2.5 ([4]). ある定数 $K>0$ が存在して, 任意の $n,m\in\mathbb{N}$ に対して $\mathbb{E}[|p_m(Z_n^{(\beta)})|^2]\le Km$.

定理 2.4 の同様の結果は CSE に対しても成立する. CUE の場合は上で述べたように [1] で得られている. より一般の $\beta>0$ に対して, 次が予想される.

予想 2.1. $\beta>0$ とし, CβE $Z_n^{(\beta)}$ を考える. 複素数列 $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ は $\sum_{j=1}^{\infty}j(|a_j|^2+|b_j|^2)\in(0,\infty)$ を満たすとする. このとき, 確率変数

$$X_n:=\sum_{j=1}^{\infty}(a_jp_j(Z_n^{(\beta)})+b_j\overline{p_j(Z_n^{(\beta)})})$$

は, $n\to\infty$ で $U+iV$ に弱収束する. ここで, ランダムベクトル (U,V) は次の共分散をもつ平均 0 の 2 次元実正規分布に従う.

$$\mathbb{E}[U^2]=\frac{1}{\beta}\sum_{j=1}^{\infty}j|a_j+\overline{b_j}|^2,\quad \mathbb{E}[V^2]=\frac{1}{\beta}\sum_{j=1}^{\infty}j|a_j-\overline{b_j}|^2,\quad \mathbb{E}[UV]=\frac{2}{\beta}\Im\Big(\sum_{j=1}^{\infty}ja_jb_j\Big).$$

参考文献

[1] P. Diaconis and S. N. Evans, *Linear functionals of eigenvalues of random matrices*, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), no. 7, 2615–2633.

[2] P. Diaconis and M. Shahshahani, *On the eigenvalues of random matrices*, J. Appl. Probab. 31A (1994), 49–62.

[3] F. J. Dyson, *Statistical theory of energy levels of complex systems*, I, II, III. J. Math. Phys. 3, 140–156, 166–175, 1191–1198.

[4] T. Jiang and S. Matsumoto, *Moments of traces for circular beta-ensembles*, To appear in Ann. Probab. arXiv:1102.4123.

[5] R. Killip and I. Nenciu, *Matrix models for circular ensembles*, Int. Math. Res. Not. (2004), no. 50, 2665–2701.

[6] 小林俊行・大島利雄, リー群と表現論, 岩波書店.

[7] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, second ed., Oxford University Press, Oxford, 1995.