数理解析研究所講究録
第 1952 巻 2015 年 38-45

Continuity and estimates of the transition density of the Liouville Brownian motion*

神戸大学・理学研究科 梶野 直孝†
Naotaka Kajino
Graduate School of Science
Kobe University

1 序

本稿では，フランスを中心に近年大きな発展を見せている 2 次元量子重力理論の厳密な数学的定式化と解析への試みの 1 つである，**Liouville Brown 運動**という 2 次元曲面上のあるランダムな幾何構造下での標準的拡散過程について，Sebastian Andres 氏 (Universität Bonn) と行った最近の共同研究 [1] で得られた結果を簡単に紹介する．[1] の主結果の証明には Alexander Grigor'yan 氏 (Universität Bielefeld) との共同研究 [9] が重要な役割を果たしており，そこで本稿の最後で [9] の主結果を手短に紹介する．研究の背景や近年の研究の進展状況についての解説は，本稿では紙数の都合で割愛せざるを得ない．興味のある方は例えば [11, 14, 16, 17] とその参考文献を参照されたい．

2 Liouville 測度の構成：Kahane の Gauss 乗法カオス

$m \in (0,\infty)$ を固定し，$X = \{X(x)\}_{x\in\mathbb{R}^2}$ を平均 0 で質量 m の（有質量）Gauss 自由場，すなわち次で与えられる共分散核を持つ Gauss 自由場とする[1]：

$$\text{“}\mathbb{E}[X(x)X(y)]\text{”} = \int_0^\infty \frac{1}{2u} e^{-\frac{m^2}{2}u - \frac{|x-y|^2}{2u}}\, du = \pi g_{m^2/2}(x,y). \tag{2.1}$$

*本研究は German Research Council (DFG) SFB 1060 “The Mathematics of Emergent Effects”, German Research Council (DFG) SFB 701 および JSPS 科研費 26287017 の助成を受けたものである．

†E-mail: nkajino@math.kobe-u.ac.jp

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 60J35, 60J55, 60J60, 60K37; Secondary 31C25, 60J45, 60G15

キーワード：Liouville 量子重力，Gauss 乗法カオス，Liouville Brown 運動，熱核，スペクトル次元

[1]（有質量）Gauss 自由場 X を超関数値確率変数として厳密に定式化することも可能だが，ここでは不要なので省略する．以下の議論に実際に必要なのは共分散核 $\pi g_{m^2/2}(x,y)$ だけである．

ただし $g_{m^2/2}(x,y)$ は 2 次元 Brown 運動の $\frac{m^2}{2}$ 次の resolvent 核を表す．容易に分かるように，$\pi g_{m^2/2}(x,y)$ はある有界連続関数 $f_m : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ により

$$\pi g_{m^2/2}(x,y) = \log\left(\frac{1}{|x-y|} \wedge 1\right) + f_m(x,y) \tag{2.2}$$

と表され，さらに $v := u^2|x-y|^2/t$ なる変数変換を考えることにより

$$\pi g_{m^2/2}(x,y) = \int_1^\infty \frac{k_m(u(x-y))}{u}\,du, \qquad k_m(z) := \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{m^2}{2v}|z|^2 - \frac{v}{2}}\,dv \tag{2.3}$$

とも表すことができる．

さて (2.3) を踏まえて，狭義単調増加列 $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty \subset [1,\infty)$ で $\alpha_0 = 1$, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \infty$ を満たすものを取り，$\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ をある確率空間 $(\Omega_X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上で定義された独立な Gauss 過程の列で，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $Y_n = \{Y_n(x)\}_{x\in\mathbb{R}^2}$ は（$x \in \mathbb{R}^2$ について）連続，かつ平均 0 で共分散

$$\mathbb{E}[Y_n(x)Y_n(y)] = \int_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_n} \frac{k_m(u(x-y))}{u}\,du \tag{2.4}$$

を持つものとする．(ここで (2.4) の右辺は正定値核であるので平均 0 で (2.4) の右辺を共分散に持つ Gauss 過程 $Z_n = \{Z_n(x)\}_{x\in\mathbb{R}^2}$ は存在し，さらに (2.4) の右辺は $x-y$ の関数として十分よい正則性を持つため Kolmogorov の連続変形定理により $Z_n = \{Z_n(x)\}_{x\in\mathbb{R}^2}$ の連続な修正 $Y_n = \{Y_n(x)\}_{x\in\mathbb{R}^2}$ が存在することを注意しておく.）そして $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$X_n := \sum_{k=1}^n Y_k \tag{2.5}$$

と定めると，$\{Y_k\}_{k=1}^n$ の独立性により $X_n = \{X_n(x)\}_{x\in\mathbb{R}^2}$ は平均 0 の連続な Gauss 過程で共分散

$$\mathbb{E}[X_n(x)X_n(y)] = \int_1^{\alpha_n} \frac{k_m(u(x-y))}{u}\,du \tag{2.6}$$

を持つ．X_n の共分散 (2.6) は n について非減少で $n \to \infty$ のとき $X = \{X(x)\}_{x\in\mathbb{R}^2}$ の共分散核 (2.3) に収束しているので，$\{X_n\}_{n=1}^\infty$ は X の「単調非減少列による近似」を与えていると解釈される．

$\gamma \in [0,\infty)$ とする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $X_n = \{X_n(x)\}_{x\in\mathbb{R}^2}$ は連続な Gauss 過程であるから，$\mathbb{R}^2$ 上のランダムな Radon 測度 $M_{\gamma,n}$ を

$$M_{\gamma,n}(dx) := c_n^{-\gamma^2/2} e^{\gamma X_n(x)}\,dx, \qquad c_n := e^{\mathbb{E}[X_n(x)^2]} \tag{2.7}$$

により定義することができる．ここで (2.6) により c_n は $x \in \mathbb{R}^2$ に依らない定数であり，また (2.7) における密度関数は平均が n に依らず 1 になるように正規化されていることを注意しておく：

$$\text{各 } x \in \mathbb{R}^2 \text{ に対し} \qquad \mathbb{E}\left[c_n^{-\gamma^2/2} e^{\gamma X_n(x)}\right] = 1. \tag{2.8}$$

このとき次の定理が成り立つ．

定理 2.1 (Kahane [10], *cf.* Rhodes and Vargas [16, 17]). 上述の確率空間 $(\Omega_X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上で定義された，ランダムな $\mathbb{R}^2$ 上の Radon 測度 M_γ が存在して次が成り立つ：
(1) $\mathbb{P}$-a.s. に $\{M_{\gamma,n}\}_{n=1}^{\infty}$ は M_γ に $\mathbb{R}^2$ 上で漠収束する，すなわち任意の台コンパクトな連続関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f\, dM_{\gamma,n} = \int_{\mathbb{R}^2} f\, dM_\gamma. \tag{2.9}$$

(2) $\gamma < 2$ ならば $\mathbb{P}$-a.s. に $\mathbb{R}^2$ の空でない任意の開集合 U に対し $M_\gamma(U) > 0$ であり，$\gamma \geq 2$ ならば $\mathbb{P}$-a.s. に $M_\gamma(\mathbb{R}^2) = 0$.
(3) $\gamma > 0$ ならば $\mathbb{P}$-a.s. に M_γ は $\mathbb{R}^2$ 上の Lebesgue 測度に関して特異である.

注意 2.2. (1) 定理 2.1 の M_γ は，heuristic には

$$M_\gamma(dx) = \text{“}e^{\gamma X(x) - \gamma^2 \mathbb{E}[X(x)^2]/2}\, dx\text{”} \tag{2.10}$$

なる測度であると解釈することができるが，$\gamma > 0$ ならば実際には M_γ は Lebesgue 測度に関して特異であるので，(2.10) の右辺の表式はあくまで heuristics でしかない.
(2) Kahane [10] の結果は一般の局所コンパクト可分距離空間とその上の Radon 測度という抽象的な設定で定式化されている．概説論文 [16] および講義録 [17] も参照のこと.
(3) 定理 2.1 のランダムな Radon 測度 M_γ の分布は，元の Gauss 自由場 X の共分散核 “$\mathbb{E}[X(x)X(y)]$” により一意に定まる．この M_γ を共分散核 “$\mathbb{E}[X(x)X(y)]$” により定まる **Gauss 乗法カオス** (*Gaussian multiplicative chaos*) という.

3 Liouville Brown 運動の構成：正値連続加法汎関数 F

以後，定理 2.1 の結果の成立を前提とし自明な場合を排除する為，$\gamma \in (0, 2)$ とする.
本節では，M_γ を Revuz 測度とする 2 次元 Brown 運動 B の連続正値加法汎関数 $F = \{F_t\}_{t\in[0,\infty)}$ の厳密な構成に関する結果を述べる．これは本質的な部分は [5, 6] で（部分的には独立に [2] でも）なされたが，そこでの主張は複雑で分かりにくかったため，筆者らは [1] において彼らの構成を修正し分かり易い主張に整理した．そうして得られたのが次の定理である．$B = \left(\Omega_B, \mathcal{M}, \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}, \{P_x\}_{x\in\mathbb{R}^2}\right)$ を 2 次元 Brown 運動とし，$\mathcal{G}_\infty^0 := \sigma(\{B_t\}_{t\in[0,\infty)})$ とおく．$\mathcal{A}$ と $\mathcal{G}_\infty^0$ の直積 σ-加法族を $\mathcal{A} \otimes \mathcal{G}_\infty^0$ で表すとする.

定理 3.1 ([1, Propositions 2.4 and 2.5], *cf.* [6, Theorem 2.7]). $\Lambda \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{G}_\infty^0$ が存在して次が成り立つ：
(1) $\mathbb{P}$-a.e. $\omega \in \Omega_X$ に対し，任意の $x \in \mathbb{R}^2$ で $E_x[\mathbf{1}_\Lambda(\omega, \cdot)] = 1$.
(2) Λ 上では，$s < t$ なる任意の $s, t \in (0, \infty)$ に対し極限

$$F_{s,t} := \lim_{n\to\infty} \int_s^t c_n^{-\gamma^2/2} e^{\gamma X_n(B_u)}\, du \tag{3.1}$$

が $\mathbb{R}$ において存在し，かつ任意の $t \in (0,\infty)$ に対し極限 $F_t := \lim_{s \downarrow 0} F_{s,t}$ も $\mathbb{R}$ において存在し，さらに $(0,\infty) \ni t \mapsto F_t$ は $(0,\infty)$ から $(0,\infty)$ への単調増加な同相写像である．
(3) $t \in (0,\infty)$ とし $F_t|_{(\Omega_X \times \Omega_B)\setminus\Lambda} := t$ とおくとき，F_t は $\mathcal{A} \otimes \mathcal{G}^0_\infty$-可測である．
(4) $F_0 := 0$ とおくとき，$\mathbb{P}$-a.e. $\omega \in \Omega_X$ に対し，$\{F_t(\omega,\cdot)\}_{t\in[0,\infty)}$ は Brown 運動 B の正値連続加法汎関数であり，さらに $\mathbb{P}$-a.s. に任意の $x \in \mathbb{R}^2$ と任意の Borel 可測関数 $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty]$, $f : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty]$ に対し

$$E_x\left[\int_0^\infty \eta(t) f(B_t)\, dF_t\right] = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \eta(t) f(y) \frac{e^{-|x-y|^2/(2t)}}{2\pi t} M_\gamma(dy)\, dt. \tag{3.2}$$

特に，$\mathbb{P}$-a.e. $\omega \in \Omega_X$ に対し $\{F_t(\omega,\cdot)\}_{t\in[0,\infty)}$ の Revuz 測度は M_γ である．

B の正値連続加法汎関数とその Revuz 測度の概念の定義は割愛する．要するに定理 3.1-(4) は全体として，$\{F_t\}_{t\in[0,\infty)}$ が heuristic には

$$\text{“}F_t = \int_0^t e^{\gamma X(B_s) - \gamma^2 \mathbb{E}[X(B_s)^2]/2}\, ds\text{”} \tag{3.3}$$

と解釈できるような確率過程であるということを言っている．(3.2) は一見複雑に見えるが，(3.3) すなわち “$dF_t = e^{\gamma X(B_t) - \gamma^2 \mathbb{E}[X(B_t)^2]/2}\, dt$”, および (2.10) の両方の等式が厳密な意味で正しいとすれば，等式 (3.2) は単に Fubini の定理を適用して積分の順序をしただけのことに過ぎない．もちろん実際には (3.2) をそのような議論で証明することはできないが，(3.2) が成り立つという事実が F_t に対する我々の heuristics である (3.3) の妥当性を示している，と考えることができる．

定義 3.2 ([6]). $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ を各 $t \in [0,\infty)$ に対し $\mathcal{B}_t := B_{F_t^{-1}}$ で定義し，これを **Liouville Brown 運動**という．

[3, Section 6.2] で述べられている Markov 過程の時間変更に関する一般論から次の事実が直ちに従う：$\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ は $\mathbb{R}^2$ 上の再帰的な M_γ-対称拡散過程であり，1 点集合には確率 1 で到達しない．

4 主結果 1：熱核の連続性と劣 Gauss 型上方評価

本節と次節で，共同研究 [1] の主結果，および関連して同時期に独立に得られた Maillard, Rhodes, Vargas and Zeitouni [13] による結果について解説する．

$\gamma \in (0,2)$ は固定されており，定理 2.1 により与えられるランダムな $\mathbb{R}^2$ 上の Radon 測度 M_γ は確率空間 $(\Omega_X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上で定義されていたことを思い出しておく．この設定で，$\mathbb{P}$-a.s. に以下本節と次節で述べる全ての主張が成立する．

$\mathbb{R}^2$ の空でない開集合 U に対し，$U_\Delta := U \cup \{\Delta_U\}$ をその 1 点コンパクト化とし，

$$\tau_U := \inf\{t \in [0,\infty) \mid \mathcal{B}_t \in \mathbb{R}^2 \setminus U\} \ (\inf\emptyset := \infty), \qquad \mathcal{B}^U_t := \begin{cases} \mathcal{B}_t & \text{if } t < \tau_U, \\ \Delta_U & \text{if } t \geq \tau_U \end{cases} \tag{4.1}$$

で U の外で吸収壁境界条件を持つ Liouville Brown 運動 $\mathcal{B}^U := \{\mathcal{B}^U_t\}_{t\in[0,\infty]}$ を定める．

定理 4.1 ([1, Theorem 5.1]). $\mathbb{R}^2$ の空でない任意の開集合 U に対し次が成り立つ：
(1) 連続関数 $p^U = p_t^U(x,y) : (0,\infty) \times U \times U \to [0,\infty)$ が（唯 1 つ）存在して任意の $(t,x) \in (0,\infty) \times U$ に対し $P_x[\mathcal{B}_t^U \in dy] = p_t^U(x,y)\, M_\gamma(dy)$.
(2) $\mathcal{B}^U$ は強 Feller 性を持つ．すなわち，任意の $t \in (0,\infty)$ と任意の有界 Borel 可測関数 $u : U \to \mathbb{R}$ に対し，

$$P_t^U u(x) := \int_U p_t^U(x,y) u(y)\, M_\gamma(dy) = E_x[u(\mathcal{B}_t)\mathbf{1}_{\{t<\tau_U\}}], \qquad x \in U \tag{4.2}$$

で定義される $P_t^U u : U \to \mathbb{R}$ は連続である．
(3) U が連結ならば任意の $(t,x,y) \in (0,\infty) \times U \times U$ に対し $p_t^U(x,y) \in (0,\infty)$.

定理 4.2 ([1, Theorem 1.2]). $p_t := p_t^{\mathbb{R}^2}$ とおく．このとき任意の $\beta \in \bigl(\frac{1}{2}(\gamma+2)^2, \infty\bigr)$ と任意の $R \in [1,\infty)$ に対し，ランダムな定数 $C_k = C_k(X,\gamma,\beta,R) \in (0,\infty)$, $k = 1,2$, が存在して，$|y| \le R$ であるような任意の $(t,x,y) \in (0,\frac{1}{2}] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ に対し

$$p_t(x,y) = p_t(y,x) \le C_1 t^{-1} \log(t^{-1}) \exp\biggl(-C_2\Bigl(\frac{|x-y|^\beta \wedge 1}{t}\Bigr)^{\frac{1}{\beta-1}}\biggr). \tag{4.3}$$

注意 4.3. (1) 定理 4.1 および定理 4.2 に類似の結果は同時期に独立に Maillard, Rhodes, Vargas and Zeitouni [13] においても，2 次元トーラス上の Liouville Brown 運動に対して得られていたが，我々の定理 4.2 は [13] の対応する結果より真に強い．
(2) 残念ながら定理 4.2 の評価だけでは β を 2 に幾らでも近い値に取れるという可能性を排除することはできない．しかし 2 次元トーラス $\mathbb{T}^2$ の場合については Maillard, Rhodes, Vargas and Zeitouni [13, Theorem 5.1] の結果により，(4.3) のような型の熱核の劣 Gauss 型上方評価が指数 β の下で成り立つならば

$$\beta \ge 2 + \frac{\gamma^2}{4} \tag{4.4}$$

でなくてはならないことが分かっている．

5　主結果 2：熱核の対角部分の下方評価とスペクトル次元

定理 5.1 ([1, Theorem 6.1]). M_γ-a.e. $x \in \mathbb{R}^2$ に対し，$x \in U$ であるような $\mathbb{R}^2$ の任意の開集合 U について，ランダムな定数 $C_3 = C_3(X,\gamma,|x|) \in (0,\infty)$ と $t_0(x) = t_0(X,\gamma,x,U) \in (0,\frac{1}{2}]$ が存在して任意の $t \in (0, t_0(x)]$ に対し

$$p_t^U(x,x) \ge C_3 t^{-1}\bigl(\log(t^{-1})\bigr)^{-34}. \tag{5.1}$$

系 5.2 ([1, Corollary 6.2], *cf.* Rhodes and Vargas [15, Theorem 3.6]). M_γ-a.e. $x \in \mathbb{R}^2$ に対し，$x \in U$ であるような $\mathbb{R}^2$ の任意の開集合 U について

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{2\log p_t^U(x,x)}{-\log t} = 2. \tag{5.2}$$

$\mathbb{R}^2$ の空でない有界な開集合 U に対し，$\mathcal{B}^U$ の生成作用素の固有値を減少順に並べ，各固有値を重複度に等しい回数分だけ繰り返したものを $\{-\lambda_n^U\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, 0]$ とする．さらに各 $t \in (0,\infty)$ に対し $Z_U(t)$ を次で定める：

$$Z_U(t) := \int_U p_t^U(x,x)\, M_\gamma(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^U t}.$$

系 5.3 ([1, Corollary 6.10]). U を $\mathbb{R}^2$ の空でない有界な開集合とする．このときランダムな定数 $C_k = C_k(X, \gamma, \sup_{x\in U}|x|) \in (0,\infty)$, $k = 4, 5$, $t_1(U) = t_1(X,\gamma,U) \in (0, \frac{1}{2}]$ が存在して任意の $t \in (0, t_1(U)]$ に対し

$$C_4 M_\gamma(U) t^{-1} \bigl(\log(t^{-1})\bigr)^{-34} \le Z_U(t) \le C_5 M_\gamma(U) t^{-1} \log(t^{-1}). \tag{5.3}$$

特に

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{2\log Z_U(t)}{-\log t} = 2. \tag{5.4}$$

以上が [1] の主結果である．その証明についてであるが，定理 4.1 と定理 4.2 を前提とすれば，本節に述べた結果の証明は多少のアイデアは必要になるものの技術的には平易である．定理 4.1 と定理 4.2 については，まず Garban, Rhodes and Vargas [4, Theorem 2.4] による $\mathcal{B}$ の resolvent 強 Feller 性の証明を吸収壁 Liouville Brown 運動 $\mathcal{B}^U$ の場合へ拡張し，それと熱核の固有関数展開を用いて定理 4.1 と定理 4.2 を U が有界である場合について証明する．その後さらに [9] の主結果を用いることで，$U \uparrow \mathbb{R}^2$ とした極限を取ると $p^U = p_t^U(x,y)$ が $(0,\infty)\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ 上で広義一様収束することが証明でき，これにより U が非有界である場合についても定理 4.1 と定理 4.2 を示すことができる．

6 [9] の主結果：拡散過程の熱核の時空間限局的上方評価

さて，そこで最後に [9] の主結果を紹介する．その主張を要約すると「[12, 7, 8] で与えられた拡散過程の推移確率密度（熱核）の劣 Gauss 型上方評価の為の十分条件について，仮定を時空間的に限局しても同様の熱核評価が出せる」となる．多様体などにおける Gauss 型熱核評価の場合にはそのような主張は解析的手法により自然に得られることが知られているが，[9] の主結果は確率論的な仮定と手法に基づいている点，及びフラクタル等で典型的に見られる劣Gauss 型熱核評価を対象としている点が新しい．

(M,d) を局所コンパクト可分距離空間，$M_\Delta := M \cup \{\Delta\}$ を M の 1 点コンパクト化とする．$X = \bigl(\Omega, \mathcal{M}, \{X_t\}_{t\in[0,\infty]}, \{\mathbb{P}_x\}_{x\in M_\Delta}\bigr)$ を $(M, \mathcal{B}(M))$ 上の Hunt 過程とし[2]，$\zeta := \inf\{t \in [0,\infty) \mid X_t = \Delta\}$ ($\inf\emptyset := \infty$) を X の生存時間とする．$B \in \mathcal{B}(M_\Delta)$ に対し $\dot\sigma_B := \inf\{t \in [0,\infty) \mid X_t \in B\}$, $\tau_B := \dot\sigma_{M_\Delta \setminus B}$ とおく．

μ を M 上の σ-有限な Borel 測度とし，$N \in \mathcal{B}(M)$ は任意の $x \in M \setminus N$ に対し

$$\mathbb{P}_x\bigl[\dot\sigma_N = \infty,\ [0,\zeta) \ni t \mapsto X_t \in M \text{ は連続}\bigr] = 1, \quad \mathbb{P}_x[\zeta < \infty, X_{\zeta-} \in M] = 0 \tag{6.1}$$

[2]位相空間 Y に対し $\mathcal{B}(Y)$ はその Borel σ-加法族を表す．

を満たすとする．すなわち，$M \setminus N$ は X-不変，かつ X の $M \setminus N$ への制限 $X|_{M \setminus N}$ は内部消滅を持たない拡散過程とする．また (M, d) の任意の有界閉集合はコンパクトと仮定する．このとき [9] の主結果 [9, Theorems 6.2 and 7.2] の簡易版として次が成り立つ．

定理 6.1. $\beta \in (1, \infty)$, $R \in (0, \infty)$ とし，$U \neq \emptyset$ は M の開集合で $\mathrm{diam}_d U \leq R$ とする．さらに $F = F_t(x, y) : (0, R^\beta] \times U \times U \to (0, \infty)$ は Borel 可測，$c_F, \alpha_F, \delta \in (0, \infty)$, $\gamma \in (0, 1)$ とし，次の 3 条件を仮定する：

$(\mathrm{DB})_\beta$　$s \leq t$ なる任意の $(t, x, y), (s, z, w) \in (0, R^\beta] \times U \times U$ に対し

$$\frac{F_s(z, w)}{F_t(x, y)} \leq c_F \left(\frac{\max\{t, d(x, z)^\beta, d(y, w)^\beta\}}{s} \right)^{\alpha_F}. \tag{6.2}$$

$(\mathrm{DU})_F^{U,R}$　任意の $(t, x) \in (0, R^\beta) \times (U \setminus N)$ と任意の $A \in \mathcal{B}(U)$ に対し

$$\mathbb{P}_x[X_t \in A,\, t < \tau_U] \leq \int_A F_t(x, y)\, d\mu(y). \tag{6.3}$$

$(\mathrm{P})_\beta^{U,R}$　$B(x, r) \subset U$ なる任意の $(x, r) \in (U \setminus N) \times (0, R)$ に対し

$$\mathbb{P}_x[\tau_{B(x,r)} \leq \delta r^\beta] \leq \gamma. \tag{6.4}$$

$\varepsilon \in (0, 1)$ とし $U_{\varepsilon R}^\circ := \{x \in M \mid \inf_{y \in M \setminus U} d(x, y) > \varepsilon R\}$ とおく．このとき Borel 可測関数 $p = p_t(x, y) : (0, \infty) \times (M \setminus N) \times U_{\varepsilon R}^\circ \to [0, \infty)$ が存在して任意の $(t, x) \in (0, \infty) \times (M \setminus N)$ に対し，

$$\mathbb{P}_x[X_t \in A] = \int_A p_t(x, y)\, d\mu(y), \qquad A \in \mathcal{B}(U_{\varepsilon R}^\circ) \tag{6.5}$$

かつ $\beta, c_F, \alpha_F, \gamma, \delta, \varepsilon$ の具体的な関数 $c_\varepsilon, \gamma_\varepsilon \in (0, \infty)$ が存在して任意の $y \in U_{\varepsilon R}^\circ$ に対し

$$p_t(x, y) \leq \begin{cases} c_\varepsilon F_t(x, y) \exp\left(-\gamma_\varepsilon (d(x, y)^\beta / t)^{\frac{1}{\beta - 1}}\right), & t < R^\beta,\ x \in U, \\ c_\varepsilon (\inf_{U \times U} F_{(2t) \wedge R^\beta}) \exp\left(-\gamma_\varepsilon (R^\beta / t)^{\frac{1}{\beta - 1}}\right), & t < R^\beta,\ x \notin U, \\ c_\varepsilon (\inf_{U \times U} F_{R^\beta}), & t \geq R^\beta. \end{cases} \tag{6.6}$$

参考文献

[1] S. Andres and N. Kajino, *Continuity and estimates of the Liouville heat kernel with applications to spectral dimensions*, preprint, 2015. arXiv:1407.3240

[2] N. Berestycki, Diffusion in planar Liouville quantum gravity, *Ann. Inst. H. Poincar Probab. Stat.*, to appear.

[3] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, 2nd ed., Walter de Gruyter, Berlin, 2011.

[4] C. Garban, R. Rhodes and V. Vargas, On the heat kernel and the Dirichlet form of Liouville Brownian Motion, *Electron. J. Probab.* **19** (2014), no. 96, 1–25.

[5] C. Garban, R. Rhodes and V. Vargas, *Liouville Brownian Motion*, Preprint, 2013. arXiv:1301.2876v2

[6] C. Garban, R. Rhodes and V. Vargas, *Liouville Brownian Motion*, Preprint, 2014. arXiv:1301.2876v3

[7] A. Grigor'yan, *Heat kernel upper bounds on fractal spaces*, preprint, 2004. `http://www.math.uni-bielefeld.de/~grigor/fkreps.pdf`

[8] A. Grigor'yan and J. Hu, Upper bounds of heat kernels on doubling spaces, *Moscow Math. J.* **14** (2014), 505-563.

[9] A. Grigor'yan and N. Kajino, *Localized heat kernel upper bounds for diffusions via a multiple Dynkin-Hunt formula*, preprint, 2015.

[10] J.-P. Kahane, Sur le chaos multiplicatif, *Ann. Sci. Math. Québec* **9** (1985), 105–150.

[11] **梶野 直孝，** 2 **次元** Liouville **量子重力下の** Brown **運動に対する熱核解析，** 2015 **年度日本数学会年会・統計数学分科会特別講演予稿.**

[12] J. Kigami, Local Nash inequality and inhomogeneity of heat kernels, *Proc. London Math. Soc.* **89** (2004), 525–544.

[13] P. Maillard, R. Rhodes, V. Vargas and O. Zeitouni, *Liouville heat kernel: regularity and bounds*, Preprint, 2014. arXiv:1406.0491

[14] G. Miermont, *Aspects of random maps*, Lecture notes of the 2014 Saint-Flour Probability Summer School. `http://perso.ens-lyon.fr/gregory.miermont/coursSaint-Flour.pdf`

[15] R. Rhodes and V. Vargas, Spectral dimension of Liouville quantum gravity, *Ann. Henri Poincaré* **15** (2014), 2281–2298.

[16] R. Rhodes and V. Vargas, Gaussian multiplicative chaos and applications: A review, *Probab. Surv.* **11** (2014), 315–392.

[17] R. Rhodes and V. Vargas, Lectures on Gaussian multiplicative chaos, `https://www.newton.ac.uk/files/seminar/20150119100011001-297514.pdf`