数理解析研究所講究録
第 1952 巻 2015 年 17-21

二次元ランダムウォークの局所時間について

京都大学・理学研究科 阿部圭宏
Yoshihiro Abe
Graduate School of Science,
Kyoto University

1 導入

本稿では, 二次元シンプルランダムウォーク (SRW) を考え, その局所時間の最大値と最小値に関する結果 [1] を紹介する. この分野について興味のある方は, [2, 6, 7, 8] を参照いただきたい.

結果を述べるために, 記号の準備をする. 二次元離散トーラス $\mathbb{Z}_N^2 := (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ を考える. $X = (X_t)_{t\geq 0}$ は, $\mathbb{Z}_N^2$ 上の連続時間 SRW であり, その holding time は, 期待値 1 の指数分布に従うものとする. X の局所時間と逆局所時間を次のように定義する:

$$L_t^N(x) := \int_0^t 1_{\{X_s=x\}} ds, \quad x \in \mathbb{Z}_N^2, \quad \tau(t) := \inf\{s \geq 0 : L_s^N(o) > t\}, \quad t \geq 0.$$

但し, o は原点とする. 着目する時刻として, $\tau(t_\theta)$ を考える. 但し,

$$t_\theta := \frac{4}{\pi}\theta(\log N)^2, \quad \theta > 0.$$

既知の結果 [9, Lemma 2.1] と [7, Theorem 1.1] より,

$$\tau(t_\theta) \approx \theta \cdot \inf\left\{ t \geq 0 : \min_{x \in \mathbb{Z}_N^2} L_t^N(x) > 0 \right\} \tag{1.1}$$

と考えてよい. すなわち, $\tau(t_\theta)$ は被覆時間に比例する時刻である. 以下, 「事象の列 A_N が高確率で成立」という場合, "$\lim_{N\to\infty} P(A_N) = 1$"を意味するものとする.

定理 1.1 (Corollary 1.3, [1]) (1) 任意の $\theta > 0, \varepsilon > 0$ に対して, 高確率で次が成立する:

$$(1 + \frac{1}{2\sqrt{\theta}} - \varepsilon) 2\sqrt{2/\pi} \log N \leq \frac{\max_{x \in \mathbb{Z}_N^2} L^N_{\tau(t_\theta)}(x) - t_\theta}{\sqrt{2t_\theta}} \leq (1 + \frac{1}{2\sqrt{\theta}} + \varepsilon) 2\sqrt{2/\pi} \log N. \tag{1.2}$$

(2) 任意の $\theta > 1, \varepsilon > 0$ に対して, 高確率で次が成立する:

$$-(1 - \frac{1}{2\sqrt{\theta}} + \varepsilon) 2\sqrt{2/\pi} \log N \leq \frac{\min_{x \in \mathbb{Z}_N^2} L^N_{\tau_{t(\theta)}}(x) - t_\theta}{\sqrt{2t_\theta}} \leq -(1 - \frac{1}{2\sqrt{\theta}} - \varepsilon) 2\sqrt{2/\pi} \log N.$$

さらに, 局所時間が最大値, 最小値に近い点の集合を考える: $\eta, \theta > 0$ に対して,

$$\mathscr{L}_N^+(\eta, \theta) := \left\{ x \in \mathbb{Z}_N^2 : \frac{L^N_{\tau_{t(\theta)}}(x) - t_\theta}{\sqrt{2t_\theta}} \geq \eta \cdot 2\sqrt{2/\pi} \log N \right\},$$

$$\mathscr{L}_N^-(\eta,\theta) := \left\{ x \in \mathbb{Z}_N^2 : \frac{L^N_{\tau_{t(\theta)}}(x) - t_\theta}{\sqrt{2t_\theta}} \le -\eta \cdot 2\sqrt{2/\pi}\log N \right\}.$$

集合 B に対して, $|B|$ は B に属する点の総数を表すものとする.

定理 1.2 (Theorem 1.2, [1]) (1) 任意の $\theta > 0$, $\eta \in (0, 1+\frac{1}{2\sqrt{\theta}})$, $\varepsilon > 0$ に対して, 高確率で次が成立する：

$$N^{2-2(\sqrt{\theta+2\eta\sqrt{\theta}}-\sqrt{\theta})^2-\varepsilon} \le |\mathscr{L}_N^+(\eta,\theta)| \le N^{2-2(\sqrt{\theta+2\eta\sqrt{\theta}}-\sqrt{\theta})^2+\varepsilon}. \tag{1.3}$$

(2) 任意の $\theta > 1$, $\eta \in (0, 1-\frac{1}{2\sqrt{\theta}})$, $\varepsilon > 0$ に対して, 高確率で次が成立する：

$$N^{2-2(\sqrt{\theta}-\sqrt{\theta-2\eta\sqrt{\theta}})^2-\varepsilon} \le |\mathscr{L}_N^-(\eta,\theta)| \le N^{2-2(\sqrt{\theta}-\sqrt{\theta-2\eta\sqrt{\theta}})^2+\varepsilon}.$$

本研究の動機は, SRW の局所時間と Gaussian free field (GFF) の関係を調べることにある. そこで, $\mathbb{Z}_N^2$ 上の GFF $(h_x^N)_{x\in\mathbb{Z}_N^2}$ を考える. すなわち, $(h_x^N)_{x\in\mathbb{Z}_N^2}$ は, $h_o^N = 0$ かつ期待値 0 のガウス過程で, その共分散はグリーン関数で与えられる：

$$\mathbb{E}[h_x^N h_y^N] = E_x[L_{T_o}(y)], \quad x, y \in \mathbb{Z}_N^2.$$

但し, $T_o := \inf\{t \ge 0 : X_t = o\}$. 局所時間と GFF は次の定理によって結び付けられる：

定理 1.3 (The generalized second Ray-Knight theorem [10])
任意の $t \ge 0$ に対して,

$P_o \times \mathbb{P}$ の下での $\{L^N_{\tau(t)}(x) + \frac{1}{2}(h_x^N)^2 : x \in \mathbb{Z}_N^2\}$ の法則は, $\mathbb{P}$ の下での $\{\frac{1}{2}(h_x^N + \sqrt{2t})^2 : x \in \mathbb{Z}_N^2\}$ の法則と等しい.

特に, N を固定し, $t \to \infty$ とするとき, 次の法則収束が成り立つ:

$$\left(\frac{L^N_{\tau(t)}(x) - t}{\sqrt{2t}} \right)_{x\in\mathbb{Z}_N^2} \to (h_x^N)_{x\in\mathbb{Z}_N^2}. \tag{1.4}$$

収束 (1.4) により, $\frac{\max_{x\in\mathbb{Z}_N^2} L^N_{\tau(t_\theta)}(x) - t_\theta}{\sqrt{2t_\theta}}$ の法則と $\max_{x\in\mathbb{Z}_N^2} h_x^N$ の法則は近いと期待される. 定理 1.1, 1.2 で正規化された局所時間を考えている理由は, この背景による. しかし, GFF に関する先行結果と定理 1.1, 1.2 を比較すると微妙な差異があることがわかる. 以下に, 対応する GFF の結果を紹介する. 二次元ボックス $V_N := [1,N]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ を考える. ここで, $(\tilde{h}_x^N)_{x\in V_N}$ を V_N 上の Dirichlet 境界条件をもつ GFF とする. Bolthausen, Deuschel, Giacomin [3] は 以下が高確率で成立することを示した: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$(1-\varepsilon)2\sqrt{2/\pi}\log N \le \max_{x\in V_N} \tilde{h}_x^N \le (1+\varepsilon)2\sqrt{2/\pi}\log N. \tag{1.5}$$

Daviaud [5] は以下が高確率で成立することを示した: 任意の $\varepsilon > 0$ と $\eta \in (0,1)$ に対して,

$$N^{2(1-\eta^2)-\varepsilon} \le |\{x \in V_N : \tilde{h}_x^N \ge \eta \cdot 2\sqrt{2/\pi}\log N\}| \le N^{2(1-\eta^2)+\varepsilon}. \tag{1.6}$$

評価 (1.2) と (1.5) を比較すると係数が $1/2\sqrt{\theta}$ 分だけ異なることがわかる. また, 評価 (1.3) と (1.6) を比較すると, 指数に差異があることがわかる. しかし, θ が十分大きいとき, (1.3) の指数は (1.6) のそれに近いことがわかる. 定理 1.3 をもとにして, 最近, Zhai は局所時間と GFF の有用なカップリングを構成した：

定理 1.4 (Theorem 3.1, [13]) 任意の $t \geq 0$ に対して, 次を満たす $(L^N_{\tau(t)}(x))_{x\in\mathbb{Z}^2_N}$ と $(h^N_x)_{x\in\mathbb{Z}^2_N}$ のカップリングを構成できる：任意の $x \in \mathbb{Z}^2_N$ に対して,

$$\sqrt{L^N_{\tau(t)}(x)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\max(h^N_x + \sqrt{2t}, 0). \tag{1.7}$$

Zhai は $\mathbb{Z}^2_N$ に限らず一般の有限グラフで定理 1.4 の主張を示したことを注意しておく. このカップリングでは, 特に次の包含関係が成立する:

$$\left\{x \in \mathbb{Z}^2_N : h^N_x < -\sqrt{2t}\right\} \subset \left\{x \in \mathbb{Z}^2_N : L^N_{\tau(t)}(x) = 0\right\}. \tag{1.8}$$

(1.7), (1.8), [8, Proposition 1.1] 及び定理 1.2(1) より, (1.6) と同じ主張が $\mathbb{Z}^2_N$ 上の GFF に対して成立する:

系 1.5 $\mathbb{Z}^2_N$ 上の GFF $(h^N_x)_{x\in\mathbb{Z}^2_N}$ に対して, 以下が高確率で成立する: 任意の $\varepsilon > 0$ と $\eta \in (0,1)$ に対して,

$$N^{2(1-\eta^2)-\varepsilon} \leq |\{x \in V_N : h^N_x \geq \eta \cdot 2\sqrt{2/\pi}\log N\}| \leq N^{2(1-\eta^2)+\varepsilon}.$$

2 証明のアイディア

この節では, 定理 1.1(1) の証明のアイディアを紹介する. アイディアのみに重点を置くため, 以下の議論は厳密さを犠牲にしていることをあらかじめ注意しておく. 厳密な証明については [1, Section 3] を参照いただきたい. まず, 定理 1.1(1) の上からの評価は, 定理 1.4 と $\mathbb{Z}^2_N$ 上の GFF の最大値の評価により直ちに従う. そこで以下では, 定理 1.1(1) の下からの評価法についてのみ説明する.

証明では, Dembo, Peres, Rosen, Zeitouni [6, 7, 8] が開発したいわゆる "refined second moment method" を援用する. この手法では, 「"successful" な点の集合」が重要な役割を果たす. これを説明するためにいくつか記号の準備をする. 点 $x \in \mathbb{Z}^2_N$ と各 $0 \leq i \leq L$ に対して, x を中心とした半径 r_i の円 $B(x, r_i)$ を考える. 但し,

$$r_i := e^{L+1-i}, \quad 0 \leq i \leq L, \qquad L \approx \log N.$$

各 $0 \leq i \leq L-1$ に対して, $\mathscr{N}^x_i$ を次のように定義する:

$$\mathscr{N}^x_i := \mathbb{Z}^2_N \text{ 上の SRW が, 時刻 } \tau(t_\theta) \text{ までに円環 } B(x,r_i)\backslash B(x,r_{i+1}) \text{ を（外向きに）横断する回数.}$$

Dembo らによる評価 [8, Lemma 3.2] より, $\mathbb{Z}^2_N$ 上の SRW が円環 $B(x,r_0)\backslash B(x,r_1)$ を M 回（外向きに）横断するまでに要する時間は, ほぼ $\frac{2}{\pi}N^2M$ であることがわかる. したがって, $\mathscr{N}^x_0$ の定義より,

$$\frac{2}{\pi}N^2\mathscr{N}^x_0 \approx \tau(t_\theta) \approx \theta\frac{4}{\pi}N^2(\log N)^2. \tag{2.1}$$

ここで, (2.1) の 2 番目の等式では, (1.1) と [7, Theorem 1.1] を用いた. これより,

$$\mathscr{N}^x_0 \approx 2\theta(\log N)^2 =: n_0.$$

また, 局所時間と $\mathscr{N}^x_{L-1}$ の間には次のような関係がある:

$$L^N_{\tau(t_\theta)}(x) \approx \sum_{j=1}^{\mathscr{N}^x_{L-1}} L^{(j)}_x. \tag{2.2}$$

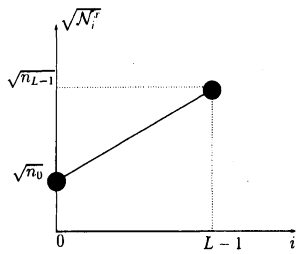

図 1　x が "successful" のとき, $(\sqrt{\mathcal{N}_i^x})_{0\le i\le L-1}$ は線形関数のようにふるまう.

但し, $L_x^{(j)}$ は次のように定義される: $B(x,r_L)$ の境界から出発して $B(x,r_{L-1})$ に到達するまでの excursion を考える. $L_x^{(j)}$ は j 番目の excursion による点 x での局所時間とする. SRW の強マルコフ性より, $L_x^{(j)}, j\ge 1$ はほぼ独立同分布とみなすことができる. よって, 大数の法則より, $\sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{L-1}^x} L_x^{(j)} \approx \frac{2}{\pi}\mathcal{N}_{L-1}^x$. これと (2.2) より,

$$\mathcal{N}_{L-1}^x \approx n_{L-1} := 2(\sqrt{\theta}+1)^2(\log N)^2 \text{ ならば } \frac{L^N_{\tau(t_\theta)}(x)-t_\theta}{\sqrt{2t_\theta}} \approx \left(1+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\right)2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\log N. \tag{2.3}$$

さらに, Belius と Kistler の最近の論文 [2] によると, $\sqrt{\mathcal{N}_0^x}$ と $\sqrt{\mathcal{N}_{L-1}^x}$ で条件付けたとき, $(\sqrt{\mathcal{N}_i^x})_{0\le i\le L-1}$ の分布はある Brownian bridge の分布に近いことがわかる (詳細については [2, Section 7] を参照いただきたい). Brownian bridge の期待値は 2 つの端点を結ぶ線形関数である. よって, $\sqrt{\mathcal{N}_0^x}\approx\sqrt{n_0}$ かつ $\sqrt{\mathcal{N}_{L-1}^x}\approx\sqrt{n_{L-1}}$ の下では, $(\sqrt{\mathcal{N}_i^x})_{0\le i\le L-1}$ は (i の関数として) $(0,\sqrt{n_0})$ と $(L-1,\sqrt{n_{L-1}})$ を結ぶ線形関数のようにふるまうと期待することは自然である. 以上の議論により, 次の定義に辿り着く.

定義 2.1　以下が成り立つとき, 点 $x\in\mathbb{Z}_N^2$ は "successful" であるという: 任意の $0\le i\le L-1$ に対して,

$$\sqrt{\mathcal{N}_i^x}\approx\sqrt{2\theta}\log N+\sqrt{2}\frac{i}{L-1}\log N.$$

図 1 も参照いただきたい. 上の (2.3) より次の包含関係が成り立つ:

$$\{x\in\mathbb{Z}_N^2 : x \text{ は "successful"}\}\subset\left\{x\in\mathbb{Z}_N^2 : \frac{L^N_{\tau(t_\theta)}(x)-t_\theta}{\sqrt{2t_\theta}}\approx\left(1+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\right)2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\log N\right\}. \tag{2.4}$$

したがって, 定理 1.1(1) の下からの評価を得るためには, (2.4) の左辺の集合が空でないことを示せばよい. そこで, (2.4) の左辺の集合のサイズを Z_N とおく. Paley-Zygmund の不等式より,

$$P(Z_N\ge 1)\ge\frac{E[Z_N]^2}{E[Z_N^2]}. \tag{2.5}$$

よって, Z_N の一次, 二次モーメントを評価して, (2.5) の右辺が $N\to\infty$ のとき 1 に収束することを示せばよい. Z_N の一次モーメントは主に Stirling の公式を使って評価できる. Z_N の二次モーメントの計算では, 二点 x,y が "successful" である確率を計算する必要があり, 幾何的情報が必要となる. 次のように二点の幾何的情報を捉える: 一般に次を満たす $1\le\ell\le L$ が存在する:

$$B(x,r_{\ell-1})\cap B(y,r_{\ell-1})\ne\emptyset \text{ かつ } B(x,r_\ell)\cap B(y,r_\ell)=\emptyset.$$

この幾何的性質より, 以下が成り立つと考えてよい:

$$\mathcal{N}_i^x\approx\mathcal{N}_i^y,\ 0\le i\le\ell-1 \text{ かつ } (\mathcal{N}_i^x)_{\ell\le i\le L-1} \text{ と } (\mathcal{N}_i^y)_{\ell\le i\le L-1} \text{ はほぼ独立.}$$

この独立性と Stirling の公式を使うことで Z_N の二次モーメントを評価できる.

3 今後の課題

いわゆる "log-correlated random field" の最大値の理論は, 近年急速に発展している. 代表例である二次元 GFF, 分岐ブラウン運動, 分岐ランダムウォークの最大値については, subleading order, 揺らぎ, 統計的性質などかなり詳しいことまで解明されている. 興味がある方は, 例えばレクチャーノート [4, 11, 12] を参照していただきたい. 二次元ランダムウォークの被覆時間や局所時間の最大値も重要な例だが, 研究が遅れていてまだ未解決な課題が多く残っている. 最近, Belius と Kistler [2] が二次元ブラウン運動の被覆時間の subleading order を精密に評価し, 研究が大きく前進した. 彼らの手法を応用することで, $\max_{x\in\mathbb{Z}_N^2}\sqrt{L^N_{\tau(t_\theta)}(x)}$ の subleading order を求めることができる可能性があるが, 技術的に困難な点が多く, 現段階ではそこまで達成できていない. この subleading order を精密に評価することが今後の大きな課題である.

参考文献

[1] Y. Abe. Maximum and minimum of local times for two-dimensional random walk. *Electron. Commun. Probab.* **20** (2015), no. 22, 1-14.

[2] D. Belius and N. Kistler. The subleading order of two dimensional cover times. arXiv:1405.0888v1.

[3] E. Bolthausen, J.-D. Deuschel, and G. Giacomin. Entropic repulsion and the maximum of the two-dimensional harmonic crystal. *Ann. Probab.* **29** (2001), 1670-1692.

[4] A. Bovier. *From spin glasses to branching Brownian motion -and back?* Lecture Notes for the 2013 Prague Summer School on Mathematical Statistical Physics. Available at `http://www.math.ucla.edu/~biskup/Prague-school-2013/figs/Anton-notes.pdf`

[5] O. Daviaud. Extremes of the discrete two-dimensional Gaussian free field. *Ann. Probab.* **34** (2006), 962-986.

[6] A. Dembo, Y. Peres, J. Rosen, and O. Zeitouni. Thick points for planar Brownian motion and the Erős-Taylor conjecture on random walk. *Acta Math.,* **186** (2001), 239-270.

[7] A. Dembo, Y. Peres, J. Rosen, and O. Zeitouni. Cover times for Brownian motion and random walks in two dimensions. *Ann. Math.* **160** (2004), 433-464.

[8] A. Dembo, Y. Peres, J. Rosen, and O. Zeitouni. Late points for random walks in two dimensions. *Ann. Probab.* **34** (2006), 219-263.

[9] J. Ding. Asymptotics of cover times via Gaussian free fields: Bounded-degree graphs and general trees. *Ann. Probab.* **42** (2014), 464-496.

[10] N. Eisenbaum, H. Kaspi, M. B. Marcus, J. Rosen, and Z. Shi. A Ray-Knight theorem for symmetric Markov processes. *Ann. Probab.* **28** (2000), 1781-1796.

[11] N. Kistler. *Derrida's random energy models. From spin glasses to the extremes of correlated random fields.* Lecture Notes for the 2013 Jean Morlet chair. Available at `http://arxiv.org/abs/1412.0958`

[12] O. Zeitouni. *Branching random walks and Gaussian fields.* Available at `http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~zeitouni/pdf/notesBRW.pdf`

[13] A. Zhai. Exponential concentration of cover times. arXiv:1407.7617v1.