数理解析研究所講究録
第 1956 巻 2015 年 60-67

A design-theoretic analogy between codes, lattices, and vertex operator algebras

山形大学・地域教育文化学部　三枝崎　剛
Tsuyoshi Miezaki
Faculty of Education, Art and Science
Yamagata University

1　はじめに

次の表のように，符号・格子・頂点作用素代数から，組合せ t-デザイン・球面 t-デザイン・共形 t-デザインが構成される：

$$\begin{array}{ccc}
\text{符号} & \rightarrow & \text{組合せ } t\text{-デザイン} \\
\downarrow & & \\
\text{格子} & \rightarrow & \text{球面 } t\text{-デザイン} \\
\downarrow & & \\
\text{頂点作用素代数} & \rightarrow & \text{共形 } t\text{-デザイン}
\end{array}$$

特に，extremal Type II と呼ばれるクラスは，高い t の t-デザインの例を与える．では，extremal という仮定を外した際，どの程度デザインに関して類似した性質があるか．本稿ではこの問題を考えて行く．

以下では 3 つのデザインを扱うが，どのデザインを考えているかは，文脈から明らかなので，殆どの場合単に t-デザインと呼ぶ事にする．

2　格子と球面デザイン

球面デザインは次で定義される：

定義 2.1. $X \subset S^{n-1}(\subset \mathbb{R}^n)$, $|X| < \infty$: 球面t-デザイン $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|X|}\sum_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} f(\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{x})$ for $\forall$ polynomials $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ of degree $\leq t$

幾つか基本的な性質及び例を挙げる：

球面デザインに関する基本的なこと

- $X \subset S^{n-1}(r)$: t-デザイン $\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\sqrt{r}}X \subset S^{n-1}$: t-デザイン.
- $X : t$-デザイン $\Rightarrow X : (t-1)$-デザイン $\Rightarrow X : (t-2)$-デザイン $\cdots$.
- $\forall t, n \in \mathbb{N}$, $\exists X = t$-デザイン in S^{n-1}.
- X が t-デザイン $\Leftrightarrow \sum_{\mathbf{x}\in X} P(\mathbf{x}) = 0$ for $\forall P(\mathbf{x}) = P(x_1, \cdots x_n) \in \mathrm{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq j \leq t$ (もし $X = -X$(antipodal) なら，j が偶数のみ調べればよい).
- 正 n 角形は $(n-1)$-デザイン.
- E_8-型ルート系は 7-デザイン.

球面デザインを構成する方法は，いくつもあるが，ここでは格子を用いた方法を考える．格子に関する言葉を復習しよう：

格子に関する基本的なこと

- $L(\subset \mathbb{R}^n)$:n-次元格子 $\Leftrightarrow \exists$ basis $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ of $\mathbb{R}^n$ such that $L = \{k_1\mathbf{v_1} + \cdots + k_n\mathbf{v_n} \mid k_i \in \mathbb{Z}\}$.
- $L^* := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \mathbb{Z}, \forall \mathbf{x} \in L\}$.
- L が self-dual $\Leftrightarrow L^* = L$.
- L が even if $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in 2\mathbb{Z}$.
- L が Type II $\Leftrightarrow L$: self-dual かつ even.
- L の最小ノルム $\min(L)$: $\min\{(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in L\}$.
- L のノルム m の shell: $(L)_m = \{x \in L \mid (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = m\}$.

格子の shell は球面上に存在しているので，格子から球面デザインを構成するとは，その shell から球面 t-デザインを構成しようというものである．

格子のデザインを調べる際に有用な，theta series に関する性質を纏める：

格子の (harmonic) theta series

- 格子 L と $P(\mathbf{x}) \in \mathrm{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$ の Harmonic theta series: $\vartheta_{L,P}(q) := \sum_{x\in L} P(\mathbf{x})q^{(\mathbf{x},\mathbf{x})} = \sum_{m\geq 0} a_m^{(P)} q^m$, where $q = e^{\pi i \tau}, \tau \in \mathbb{H}$, $a_m^{(P)} = \sum_{\mathbf{x}\in(L)_m} P(\mathbf{x})$.
- $(L)_m(\neq \emptyset)$ が t-デザイン $\Leftrightarrow a_m^{(P)} = 0$ for every $P \in \mathrm{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq 2j \leq t$.

このことから，$1 \leq 2j \leq t$ に対し harmonic theta series の q^m の係数が消えていれば (L_m) は t-デザインである事がわかる．

一つ例を見てみよう：

例 2.1. $L = \mathbb{Z}^2$ とおく．すると $(L)_1 = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$, $(L)_2 = \{(\pm 1, \pm 1)\}$. テータ級

数は,

$$\vartheta_L(q) = \vartheta_{L,1}(q) = 1 + 4q + 4q^2 + \cdots.$$

次の事実,

- $\mathrm{Harm}_2(\mathbb{R}^2) = \langle P_2 = x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(z^2), 2xy = \mathrm{Im}(z^2)\rangle$.

を用いると，$\vartheta_{L,P_2}(q) \equiv 0$，即ち $\forall m \in \mathbb{Z}_{>0}$，$(L)_m$ は 3-デザインとなることがわかる.

実は L が Type II のとき，次が知られている：

定理 2.1 ([6, 11, 12]). L: n-次元 Type II 格子 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \vartheta_{L,P}(q) \text{ はモジュラー形式でウェイトは } n/2 + \deg(P), \\ \vartheta_{L,P}(q) \in \mathbb{C}[E_4(q), E_6(q)]. \end{cases}$$

これを用いると，次のことがわかる：

系 2.1. $\exists$ n-次元 Type II 格子 $\Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod 8$.

系 2.2 ([13]). L: n-次元 Type II 格子 $\Rightarrow \min(L) \leq 2\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 2$.

この不等式が等号となる際，格子は extremal と呼ばれる：

定義 2.2. • L: n-次元 Type II 格子.

L が extremal $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \min(L) = 2\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 2$.

これらのことを用いると，例えば，L が 24-次元 Type II 格子なら，全てのシェルで 3-デザインが次のようにしてわかる：

例 2.2. • L: 24-次元 Type II 格子, $P \in \mathrm{Harm}_2(\mathbb{R}^{24})$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \vartheta_{L,P}(q) \text{ はモジュラー形式でウェイトは } 12 + 2 = 14, \\ \vartheta_{L,P}(q) \in \mathbb{C}[E_4(q), E_6(q)]. \end{cases}$$

- しかしウェイトが 14 となるカスプ形式は存在しない.

$\Rightarrow \vartheta_{L,P} = 0$, i.e., $\sum_{x \in (L)_{2m}} P(\mathbf{x}) = 0$ for all $P(\mathbf{x}) \in \mathrm{Harm}_j(\mathbb{R}^n), j = 2$.
$\Rightarrow (L)_{2m}$ は 3-デザイン.

Extremal な Type II 格子に関しては次が成立する：

定理 2.2 ([14, 15]). • L: extremal な n-次元 Type II 格子.
$\Rightarrow (L)_{2m}$ は次の値 t の t-デザインとなる：

$$t = \begin{cases} 11 & n \equiv 0 \pmod{24} \\ 7 & n \equiv 8 \pmod{24} \\ 3 & n \equiv 16 \pmod{24}. \end{cases}$$

この事より，n が 24 の倍数のときは，11-デザインが得られる．更に，格子の shell から 12-デザイン以上は構成できないと予想されており，extremal な Type II 格子は，デザインという視点から見て大変美しい対象だという事がわかる．そして存在もあまり知られていない．$\dim n = 24m$ のときの extremal な Type II 格子のリストを提示する:

n	$\sharp$ extremal even uni. lattice
24	1 (Leech lattice Λ_{24})
48	≥ 4 (P_{48p}, P_{48q}, P_{48n}, P_{48m})
72	≥ 1
≥ 96	?
≥ 164000	0

ここで，球面t-デザインの概念を拡張する：

定義 2.3 ([8]). $T \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. X が球面T-デザイン $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\sum_{\mathbf{x} \in X} P(\mathbf{x}) = 0$$

holds for all $P(\mathbf{x}) \in \mathrm{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$ with $j \in T$.

注意 2.1. • t-デザインは $\{1, 2, \ldots, t\}$-デザインのことである.

- T_4 を4の倍数以外の自然数からなる集合とする:$T_4 = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, \cdots\}$. すると，$(\mathbb{Z}^2)_m (\neq \emptyset)$ は T_4-デザイン.

講演中に，次の結果を紹介しましたが，これは完全に誤りでした．お詫びして訂正いたします.

定理 2.3 ([9]). L: n-次元 Type II 格子 $\Rightarrow$ $(L)_{2m}$ は T_4-デザイン.

3 符号と組合せデザイン

組合せデザインは次で定義される：

定義 3.1. • $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $X^{\{k\}} = \{\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \mid \alpha_i \in X,\ \alpha_i \neq \alpha_j\ (i \neq j)\}$.

- $\mathbb{B} \subset X^{\{k\}}$.
  $(X, \mathbb{B})$: 組合せ t-デザイン (t-(v, k, λ)) $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ For $\forall T \in X^{\{t\}}, \sharp\{B \in \mathbb{B} \mid T \subset B\} = \lambda (> 0)$.

例 3.1. • $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\mathbb{B} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 1\}\}$.
$\Rightarrow (X, \mathbb{B})$ は 1-デザイン (1-(7, 2, 2)).

- $\mathbb{B} = \{\{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 7, 2\}, \{7, 1, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$. $\Rightarrow (X, \mathbb{B})$ は 2-デザイン (2-(7, 3, 1), unique).

球面デザインに関して，次のことを紹介した：

球面 t-デザインの同値条件

X が球面 t-デザイン $\Leftrightarrow$ $\sum_{\mathbf{x} \in X} P(\mathbf{x}) = 0$ for $\forall P(\mathbf{x}) = P(x_1, \cdots x_n) \in \mathrm{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq j \leq t$.

この類似が組合せデザインにも存在し，次のようなものである：

定理 3.1 ([4]). $\mathbb{B} \subset X^{\{k\}}$ が組合せ t-デザイン $\Leftrightarrow$ $\sum_{x \in \mathbb{B}} \widetilde{f}(x) = 0$ for all $f \in \mathrm{Harm}_k$, $1 \leq k \leq t$.

ただし，定理中の記号は次で定義される：

離散調和解析に関すること

- $X := \{1, 2, \ldots, n\}$, 2^X を X の全ての部分集合.
- $\mathbb{R}2^X$, $\mathbb{R}X^{\{k\}}$: 2^X, $X^{\{k\}}$ の元で張られる実ベクトル空間.
- $\gamma(z) := \sum_{y \in X^{\{k-1\}}, y \subset z} y$.
- $\mathrm{Harm}_k := \ker(\gamma|_{\mathbb{R}X^{\{k\}}})$.
- $\mathbb{R}X^{\{k\}}$ の元 f を次のように書く $f = \sum_{z \in X^{\{k\}}} f(z)z$
- $f \in \mathbb{R}X^{\{k\}}$ は $\widetilde{f} \in \mathbb{R}2^X$ に次のようにして拡張される：for all $u \in 2^X$, $\widetilde{f}(u) = \sum_{z \in X^{\{k\}}, z \subset u} f(z)$.

一つ例を見てみよう：

例 **3.2.** 次のように $X, \mathbb{B}$ をおく：$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
$\mathbb{B} = \{\{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 7, 2\}, \{7, 1, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$.
すると $(X, \mathbb{B})$ は組合せ 2-デザインであった．従って，Harm_2 の元で和を取ると消えるはずで，例えば，$\sum_{x \in \mathbb{B}} \widetilde{f}(x) = 0$, for $f := \{1, 3\} - \{2, 3\} - \{1, 4\} + \{2, 4\} \in \mathrm{Harm}_2$.

格子から球面デザインが構成できたように，符号から組合せデザインが構成できる．その紹介のために，符号に関する言葉を復習しよう：

符号に関する基本的なこと

- $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$.
- C: 長さ n の符号 $\Leftrightarrow$ C は $\mathbb{F}_2^n$ の部分空間.
- $C^{\perp} = \{x \in \mathbb{F}_2^n \mid x \cdot y = 0\ (\forall y \in C)\}$.
- C が self-dual $\Leftrightarrow$ $C = C^{\perp}$.
- ウェイト of $x = (x_i)$: $\mathrm{wt}(x) = \sharp\{i \mid x_i \neq 0\}$.
- C が Type II $\Leftrightarrow$ C: self-dual かつ $\mathrm{wt}(x) \equiv 0 \pmod 4$ $(\forall x \in C)$.
- C の最少距離 $\min(C)$: $\min\{\mathrm{wt}(x) \mid (0 \neq) x \in C\}$.
- C のノルム m の shell: $\{c \in C \mid \mathrm{wt}(c) = m\}$.

符号から組合せデザインを構成するとは，$\mathbb{F}_2^n$ と 2^X の自然な同一視の下で，その shell からデザインを構成しようというものである．
格子の球面デザインを調べる際に有用であった harmonic theta series の類似がある：

Harmonic weight enumerators

- 符号 C と $f \in \mathrm{Harm}_\ell$ の harmonic weight enumerator: $w_{C,f}(x,y) := \sum_{c\in C}\widetilde{f}(c)x^{n-\mathrm{wt}(c)}y^{\mathrm{wt}(c)} = \sum_{m\geq 0} a_m^{(f)}x^{n-m}y^m$, where $a_m^{(f)} = \sum_{x\in(C)_m}\widetilde{f}(x)$.
- C の weight enumerator: $w_C(x,y) := \sum_{c\in C} x^{n-\mathrm{wt}(c)}y^{\mathrm{wt}(c)} = \sum_{m\geq 0}|(C)_m|x^{n-m}y^m$.
- $w_{H_8}(x,y) = x^8 + 14x^4y^4 + y^8$.
- $C_m(\neq\emptyset)$ が t-デザイン $\Leftrightarrow a_m^{(f)} = 0$ for every $f \in \mathrm{Harm}_j,\ 1 \leq j \leq t$.

更に Hecke–Schoeneberg の結果の類似も以下の用に存在する：

定理 3.2 ([5, 3]). C を長さ n の Type II 符号, $f \in \mathrm{Harm}_k$ とおく.

すると, $\begin{cases} w_{C,f}(x,y) = (xy)^k Z_{C,f}(x,y) \\ Z_{C,f}(x,y) \text{ は次数 } n-2k \text{ で}, Z_{C,f}(x,y) \in I_{G,\chi_k}, \end{cases}$

ただし,

$$I_{G,\chi_k} = \begin{cases} \langle P_8, P_{24}\rangle & \text{if } k\equiv 0 \pmod 4 \\ P_{12}\langle P_8, P_{24}\rangle & \text{if } k\equiv 2 \pmod 4 \\ P_{18}\langle P_8, P_{24}\rangle & \text{if } k\equiv 3 \pmod 4 \\ P_{30}\langle P_8, P_{24}\rangle & \text{if } k\equiv 1 \pmod 4). \end{cases}$$

ただし，記号などは以下で定義される：

Invariants

- $G = \left\langle T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ T_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{-1}\end{pmatrix}\right\rangle$.
- $\chi_k(T_1) = (-1)^k,\ \chi_k(T_2) = \sqrt{-1}^{-k}$.
- $I_G := I_{G,\chi_0} = \mathbb{C}[x,y]^G$:$G$ の不変式環,
  I_{G,χ_k} : G の χ_k に関する双対不変式環.
  これらの空間は次のようによくわかっている [3]：

$$I_{G,\chi_k} = \begin{cases} \langle P_8, P_{24}\rangle & \text{if } k\equiv 0 \pmod 4 \\ P_{12}\langle P_8, P_{24}\rangle & \text{if } k\equiv 2 \pmod 4 \\ P_{18}\langle P_8, P_{24}\rangle & \text{if } k\equiv 3 \pmod 4 \\ P_{30}\langle P_8, P_{24}\rangle & \text{if } k\equiv 1 \pmod 4), \end{cases}$$

  ただし，$P_8(x,y) = x^8 + 14x^4y^4 + y^8$, $P_{24}(x,y) = x^4y^4(x^4-y^4)^4, \ldots$.

これより，次が得られる：

系 3.1. $\exists$ 長さ n の Type II 符号 $\Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod 8$.

系 3.2 ([7]). C: 長さ n の Type II 符号 $\Rightarrow \min(C) \leq 4\lfloor\frac{n}{24}\rfloor + 4$.

すると Type II 格子と同様 Type II 符号に関しても extremal という概念が定義できる：

定義 3.2. • C: 長さ n の Type II 符号.

C が extremal $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\min(C) = 4\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 4$.

Extremal な Type II 符号に関しては次が成立する：

定理 3.3 ([2]). • C: 長さ n の extremal な Type II 符号
$\Rightarrow (C)_m$ は次の値 t の t-デザイン：

$$t = \begin{cases} 5 & n \equiv 0 \pmod{24} \\ 3 & n \equiv 8 \pmod{24} \\ 1 & n \equiv 16 \pmod{24}. \end{cases}$$

さて，組合せ t-デザインの概念は次のように拡張された：

定義 3.3 ([4, 3]). $T \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ とおく．X が組合せ T-design $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\sum_{x \in X} \widetilde{f}(x) = 0$ holds for all $f \in \mathrm{Harm}_j$, $j \in T$.

注意 3.1. • t-デザインは $\{1, 2, \ldots, t\}$-デザインのことである.

更に我々は組合せ T-デザインの概念を更に拡張した：

定義 3.4 ([9]). • $X \subset X^{\{k\}} \cup X^{\{\ell\}}$ $(k \neq \ell)$.
X が 2 つのウェイトに関する組合せ t-デザイン $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ for any $T \in X^{\{t\}}$, $\sharp\{W \in X \mid T \subset W\} = \lambda$.
$T \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ とおく．X が2つのウェイトに関する組合せT-デザイン$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\sum_{x \in X} \widetilde{f}(x) = 0$ holds for all $f \in \mathrm{Harm}_j$, $j \in T$.

すると次が成立する事がわかった：

定理 3.4 ([9]). • C: 長さ n の Type II 符号 $\Rightarrow (C)_m \cup (C)_{n-m}$: 2 つのウェイトに関する組合せ T_2-デザイン.

特に $(C)_m \cup (C)_{n-m}$ は 2 つのウェイトに関する組合せ 1-デザイン.

これは次の結果の別証を与えている：

系 3.3 ([1, 10]). $(C)_{n/2}$ は T_2-デザイン．特に $(C)_{n/2}$ は 1-デザイン.

4 頂点作用素代数と共形デザイン

組合せT-デザイン，球面T-デザインの類似として，我々は共形t-デザインの概念を次のように拡張した：

定義 4.1 ([9]). $T \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ とおく．X が共形T-デザイン $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{tr}|_X o(v) = 0$ holds for all $v \in \mathrm{Ker}\,\pi = \bigoplus_{n>0} (V)_n$ of weight $j \in T$.

注意 4.1. t-デザインは共形 $\{1, 2, \ldots, t\}$-デザインのことである.

この新たに定義されたT-デザインに関しても，幾つかのことを証明したが，詳しくはプレプリント [9] をご参照下さい.

5　まとめ

t-デザインに関することを，T-デザインに拡張することで，成立する事を見てきた．この概念は，harm に関する性質を細かく見ていることから，どのような集合 T のデザインになるか調べる事で，符号・格子・頂点作用素代数を深く理解することが出来ると期待する．しかし，T-デザインになる T の決定は，述べなかったが Lehmer 予想とデザイン理論の対応などを鑑みても，難しい問題である．

本稿では，まず第一歩として，Type II というクラスに限って考えてきた．今後更に Type II，或いは他のクラスに対して，T を解析して行くことは，符号・格子・頂点作用素代数の研究，或いは，その類似性を高めるという意味でも大切と考えている．

参考文献

[1] W. O. Alltop, Extending t-designs, *J. Combin. Theory Ser. A* **18** (1975) 177-186.

[2] E. F. Assmus, Jr. and H. F. Mattson, Jr., New 5-designs, *J. Combinatorial Theory* **6** (1969), 122-151.

[3] C. Bachoc, On harmonic weight enumerators of binary codes, *Des. Codes Cryptogr.* **18** (1999), no. 1-3, 11-28.

[4] Ph. Delsarte, Hahn polynomials, discrete harmonics, and t-designs, *SIAM J. Appl. Math.* **34** (1978), no. 1, 157-166.

[5] A.M. Gleason, Weight polynomials of self-dual codes and the MacWilliams identities. Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 3 , pp. 211–215. Gauthier-Villars, Paris, 1971. 94A10 (05B30)

[6] E. Hecke, Mathematische Werke, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1983.

[7] C.L. Mallows, A.M. Odlyzko and N.J.A. Sloane, Upper bounds for modular forms, lattices, and codes, *J. Algebra* **36** (1975), 68–76.

[8] T. Miezaki, On a generalization of spherical designs, *Discrete Math.* **313** (2013), no. 4, 375–380.

[9] T. Miezaki, A design-theoretic analogy between codes, lattices, and vertex operator algebras, preprint.

[10] An upper bound of the value of t of the support t-designs of extremal binary doubly even self-dual codes, preprint.

[11] B. Schoeneberg, Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen. (German) *Math. Ann.* **116** (1939), no. 1, 511–523.

[12] B. Schoeneberg, "Elliptic modular functions: an introduction," Translated from the German by J. R. Smart and E. A. Schwandt. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 203. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974.

[13] C.L. Siegel, Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen (German), *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* **1969** (1969), 87–102.

[14] B. B. Venkov, Even unimodular extremal lattices. (Russian) Algebraic geometry and its applications. Trudy Mat. Inst. Steklov. 165 (1984), 43–48; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 165 (1985) 47–52.

[15] B. B. Venkov, "Boris Réseaux et designs sphériques," (French) [Lattices and spherical designs] Réseaux euclidiens, designs sphériques et formes modulaires, 10–86, Monogr. Enseign. Math., 37, Enseignement Math., Geneva, 2001.