数理解析研究所講究録
第 1956 巻 2015 年 1-8

閉曲面上のグラフの染色数及び代数的構造

慶應義塾大学　野口 健太 *
Kenta Noguchi
Keio University

1　導入

グラフ理論における最も有名な問題のひとつに，四色問題がある．これは平面上の任意の地図で，隣り合う国を異なる色で塗り分けるために必要な色数の最小値を求める問題である．この四色問題を一般の閉曲面上で考える問題があり，個人的に非常に面白い問題だと思い研究を続けている．本稿ではその一部に焦点を当て，それを解くために有用と思われる代数的指標を用いてグラフを分類する方法を紹介し，問題に対する部分的解決を与える．

2　平面グラフと局所平面グラフの彩色

まずグラフの彩色問題の概要を述べる．グラフとは，頂点集合と辺集合 (頂点集合の二元部分集合族) からなる構造として定義される．グラフ G の**頂点彩色**とは，頂点集合 $V(G)$ から自然数 $\{1,2,\ldots\}$ への写像で，辺で結ばれた頂点対には異なる自然数を割り当てるものである．以後単に**彩色**と呼ぶ．各頂点に割り当てられた数字を色と呼ぶ．地図において国を頂点，隣り合う国同士を辺で結ぶと平面グラフができるため，地図の彩色問題は平面グラフの彩色の問題と考えることができる (図 1, 2)．

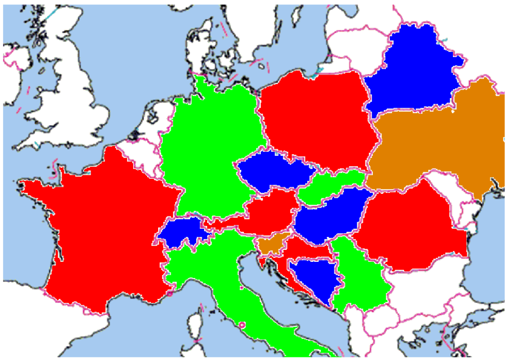


図 1: 地図

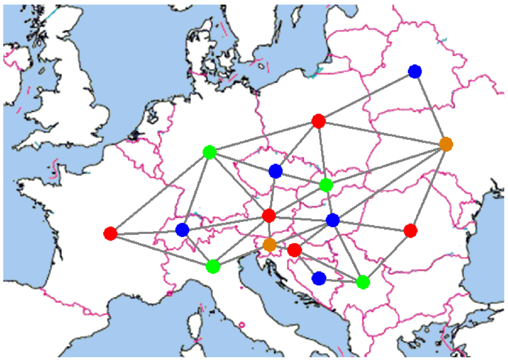


図 2: 地図に対応する平面グラフ

*E-mail: knoguchi@comb.math.keio.ac.jp 本研究は JSPS 科研費 13J00020 の助成を受けたものです．

ここで**平面グラフ**とは，平面上に辺の交差がないように埋め込まれたグラフである．グラフ G の彩色に必要な色数の最小値を**染色数**と呼び，$\chi(G)$ と表す．平面グラフの染色数については，次の定理が知られている．

定理 1 (Appel and Haken [2]) 任意の平面グラフ G に対し，$\chi(G) \leq 4$ が成り立つ．

定理1は四色問題の解であり，**四色定理**と呼ばれる．この結果より平面グラフの染色数は4以下であることが判明したが，オイラー標数が ε である閉曲面上のグラフでは，次の定理が知られている．ここで**閉曲面 F^2 上のグラフ**とは，F^2 上に辺の交差がないように埋め込まれたグラフのことである．

定理 2 (Ringel et al. [11]) F^2 をオイラー標数 $\varepsilon = \varepsilon(F^2)$ を持つ球面でない閉曲面とする．F^2 上の任意のグラフ G に対し，$\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{7+\sqrt{49-24\varepsilon}}{2} \right\rfloor$ が成り立つ．また F^2 がクラインボトルでないとき，右辺の値は最善である．F^2 がクラインボトルのとき，右辺は6が最善である．

つまり一般の閉曲面上のグラフにおいては，閉曲面の種数が上がる，つまりオイラー標数が小さくなるにつれて染色数の上限が大きくなる．しかし一般の閉曲面上のグラフの中でも，**局所平面グラフ**と呼ばれる **representativity** が十分に大きいグラフに関しては染色数が小さくなることが示されている．ここで球面でない閉曲面 F^2 上のグラフ G に対して representativity $r(G)$ とは，$r(G) := \min\{|G \cap l| : l$ は F^2 上の非可縮な閉曲線$\}$ で定義される．

定理 3 (Thomassen [14]) 球面でない任意の閉曲面 F^2 に対し，以下を満たす定数 $N = N(F^2)$ が存在する；F^2 上の $r(G) \geq N$ を満たす任意のグラフ G に対し，$\chi(G) \leq 5$ が成り立つ．

定理3より，局所平面グラフは平面グラフに染色数の意味で“近い”と言える．ここでさらに局所平面グラフの構造を解析し，その“距離”の指標を細分化して有用性を高めたい．例えば平面グラフと局所平面グラフの距離が近いと解釈できる主張として，次の二つの予想がある．これらは四色問題の一般の閉曲面への一種の拡張であり，閉曲面上のグラフの彩色における重要な未解決問題である．

予想 4 (Robertson [12]) 球面でない任意の閉曲面 F^2 に対し，以下を満たす定数 $N = N(F^2)$ が存在する；F^2 上の $r(G) \geq N$ を満たす任意の3-正則グラフ G は，3-辺彩色を持つ．

予想 5 (Albertson [1]) 任意の閉曲面 F^2 に対し，ある定数 $q = q(F^2)$ が存在して以下を満たす；F^2 上の任意のグラフ G は，$G - A$ が4-彩色を持つような q 頂点以下からなる頂点集合 A を持つ．

三角形分割グラフとは，全ての面が三角形となるように閉曲面へ埋め込まれた単純グラフであり，以後**三角形分割**と呼ぶ．平面三角形分割 G の4-彩色は，G の双対グラフ G^* の3-辺彩色と一対一対応していることが知られている (Tait [13])．つまり四色定理は任意の平面3-正則グラフが3-辺彩色を持つことを保証しており，予想4は，一般の閉曲面上でも3-正則グラフ G が局所平面的ならば，平面上と同じく3-辺彩色を持つと主張している．なお3-正則グラフのうち3-辺彩色を持たないグラフはスナークと呼ばれており，多くの先行研究がある．また予想5は，閉曲面上のグラフの染色数は一般には4より大きいが，閉曲面に依存する定数個の頂点を除けば平面グラフと同じく4-彩色を持つと主張している．こ

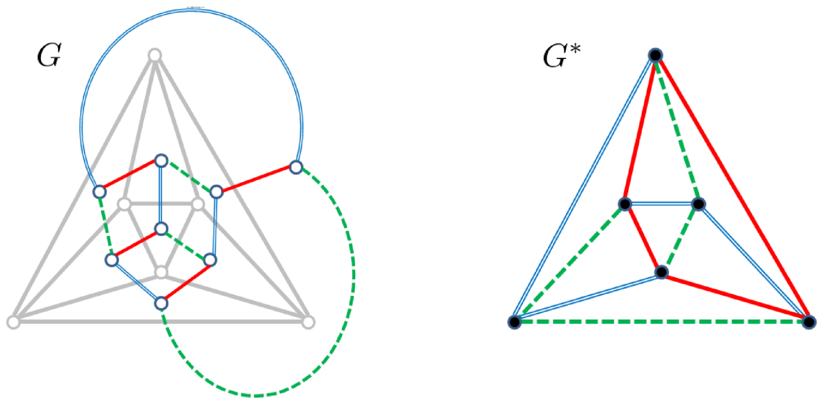


図 3: 3-正則グラフ G の 3-辺彩色と，それに対応する双対グラフ G^* の Grünbaum coloring

れらの予想は平面グラフと局所平面グラフがある意味で“非常に近い”という主張であり，非常に興味深い．

一般に予想 4 と 5 はいずれも，閉曲面 F^2 上の局所平面的三角形分割について調べれば十分である．それは予想 4 では G の双対グラフ G^* の各面に 3 色それぞれが現れるような 3-辺着色 (**Grünbaum coloring** と呼ばれる) が G の 3-辺彩色に一対一対応しており (図 3)，予想 4 の主張は「閉曲面 F^2 上の任意の局所平面的三角形分割 G は Grünbaum coloring を持つ」と言い換えられるためである．また予想 5 では，与えられたグラフ G に適当に辺を加えて三角形分割にしても一般性を失わないため，及び局所平面的でないグラフに対しては短い非可縮サイクルで切り開いて種数を下げるという手法で，種数に関する帰納法により定数 q が定まるためである．

3　Cycle parity と monodromy

この章では，予想 4 と 5 を完全にもしくは部分的に解くために有用であると思われるアプローチとして，代数的指標を紹介する．

四色定理により平面グラフの染色数は 4 以下であることが判明したわけだが，平面上で染色数がそれぞれ 2 と 3 であるグラフは完全に分類されている．**四角形分割グラフ**とは，全ての面が四角形となるように閉曲面へ埋め込まれた単純グラフであり (図 4 左)，平面上では辺極大な二部グラフの族であることが知られている．**偶三角形分割グラフ**とは，三角

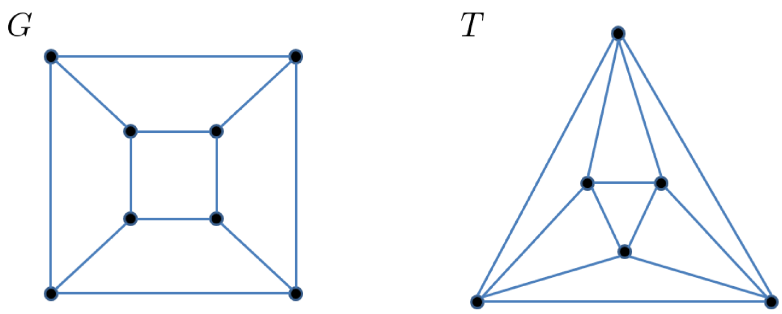


図 4: 四角形分割グラフ G と，偶三角形分割グラフ T

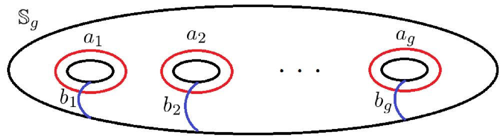


図 5: $\mathbb{S}_g$ の基本群 $\pi_1(\mathbb{S}_g)$ の生成元

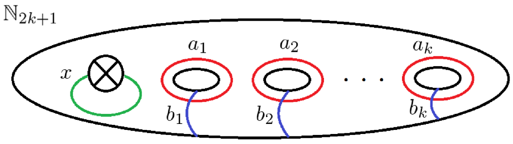


図 6: $\mathbb{N}_{2k+1}$ の基本群 $\pi_1(\mathbb{N}_{2k+1})$ の生成元

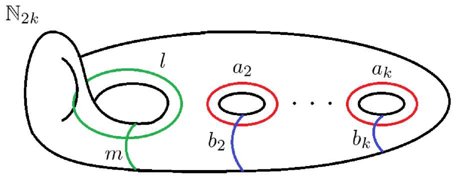


図 7: $\mathbb{N}_{2k}$ の基本群 $\pi_1(\mathbb{N}_{2k})$ の生成元

形分割グラフのうち各頂点が偶次数であるものであり (図 4 右)，こちらは平面上では辺極大な 3-染色的なグラフの族であることが知られている．以後それぞれ**四角形分割**，**偶三角形分割**と呼ぶ．

一方で一般の閉曲面上では，局所平面グラフの族に関してさえ，彩色の性質は平面上と大きく異なる．例えば一般の閉曲面上の四角形分割は，二部グラフとは限らない．そこで一般の閉曲面上のグラフの分類という目的のため，二つの代数的指標 cycle parity と monodromy を紹介する．

閉曲面は，**種数 g の向き付け可能閉曲面** $\mathbb{S}_g$ と**種数 k の向き付け不可能閉曲面** $\mathbb{N}_k$ に分類される．そして閉曲面 F^2 上の閉曲線 (のホモトピー同値類) を元とする群は**基本群** $\pi_1(F^2)$ と呼ばれ，図 5, 6, 7 に図示された元を生成元に取る．

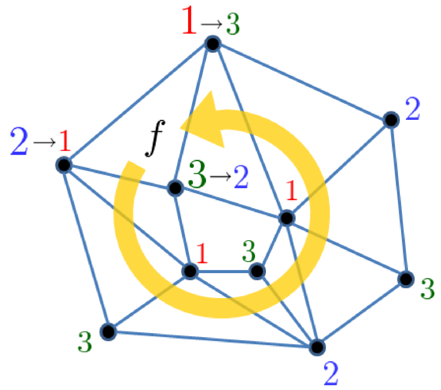
閉曲面 F^2 上の四角形分割 G における可縮なサイクルは長さが必ず偶数であり，そのため二つのサイクルがホモトピックであるとき長さの偶奇が一致することが知られている．ここで基本群 $\pi_1(F^2)$ の各元に，それとホモトピックな G のサイクルの長さの偶奇を対応させる写像 $\rho_G : \pi_1(F^2) \to \mathbb{Z}_2$ は準同型写像となり，**cycle parity** と呼ばれる．閉曲面 F^2 上の二つの四角形分割 G と G' に対し，$\rho_G = \rho_{h(G')}$ を満たす位相同型写像 $h : F^2 \to F^2$ が存在するとき，ρ_G と $\rho_{G'}$ は同値であると定義する．この同値関係を入れたとき，cycle parity ρ の同値類 (タイプ) は以下のように分類される．ここで ρ は $F^2 \sim \mathbb{S}_g$ のとき $\rho = (\rho(a_1), \rho(b_1), \ldots, \rho(a_g), \rho(b_g))$，$F^2 \sim \mathbb{N}_{2k+1}$ のとき $\rho = (\rho(x), \rho(a_1), \rho(b_1), \ldots, \rho(a_k), \rho(b_k))$，$F^2 \sim \mathbb{N}_{2k}$ のとき $\rho = (\rho(m), \rho(l), \rho(a_2), \rho(b_2), \ldots, \rho(a_k), \rho(b_k))$ を表す．

定理 6 (Nakamoto et al. [7]) 種数 g の向き付け可能閉曲面 $\mathbb{S}_g$ において，任意の自明でない *cycle parity* ρ は，以下に同値である；

$$(1, 0, \ldots, 0).$$

種数が奇数である向き付け不可能閉曲面 $\mathbb{N}_{2k+1} (k \geq 1)$ において，任意の自明でない *cycle parity* ρ は，以下のいずれかに同値である；

$$A = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0),$$
$$B = (1, 1, 0, \ldots, 0, 0),$$
$$C = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0).$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_3$$

図 8: 三角形面の列における色の置換と，それに対応する $\mathfrak{S}_3$ の元

種数が偶数である向き付け不可能閉曲面 $\mathbb{N}_{2k}(k \geq 2)$ において，任意の自明でない *cycle parity* ρ は，以下のいずれかに同値である；

$$\begin{aligned} D &= (0,0,1,0,\dots,0,0), \\ E &= (0,1,0,0,\dots,0,0), \\ F &= (1,0,0,0,\dots,0,0). \end{aligned}$$

クラインボトル $\mathbb{N}_2$ において，任意の自明でない *cycle parity* ρ は以下のいずれかに同値である；

$$\begin{aligned} E &= (0,1), \\ F &= (1,0). \end{aligned}$$

つまり，$\mathbb{S}_g$ 上の四角形分割の cycle parity は二部グラフとそうでないものの 2 タイプに分類でき，$\mathbb{N}_k$ 上の四角形分割の cycle parity は二部グラフとそれ以外の 3 タイプの 4 タイプに分類できるということである．

Cycle parity と同様の写像を，閉曲面 F^2 上の偶三角形分割 G に対して定義することができる．G の三角形面 f とその 3-彩色 c を固定し，基本群 $\pi_1(F^2,f)$ の (向き付き) 元にホモトピックな面の列に沿って c を拡張して f に戻ったときの色の変化を対応させる写像 $\sigma_{G,f^c} : \pi_1(F^2,f) \to \mathfrak{S}_3$ である (図 8)．これは平面偶三角形分割の 3-彩色性より，準同型写像になっている．二つの準同型写像 $\sigma_{G,f^c}, \sigma_{G,f^{c'}}$ に対し，$\sigma_{G,f^c}s = s\sigma_{G,f^{c'}}$ を満たすような $s \in \mathfrak{S}_3$ が存在するとき σ_{G,f^c} と $\sigma_{G,f^{c'}}$ は同じものとみなすことにすると，G に対応する準同型写像 σ_{G,f^c} は f と c の選択に依らず一意に定まることが知られている．これを G の **monodromy** と呼び，σ_G と表す．

Monodromy にも cycle parity と同じく位相同型で移り合えるという同値関係が入ることが知られているが，著者は Higuchi et al. [3] が未解決問題として挙げていた，一般の閉曲面上の monodromy の同値類を分類した．

定理 7 (Noguchi [9]) 向き付け可能閉曲面 $\mathbb{S}_g$ 上の *monodromy* は 4 タイプに分類でき，向き付け不可能閉曲面 $\mathbb{N}_k$ 上の *monodromy* は 8 タイプに分類できる．

[4, 6] の monodromy を用いた結果より，予想 4 と 5 は偶三角形分割に対しては正しいことが判明している．著者は定理 7 の分類結果を奇次数頂点を持った三角形分割へ拡張することにより，偶三角形分割に対する結果をより広い三角形分割の族へ拡張すべく研究中である．

4 全域四角形分割

この章では，monodromy の同値類が決定されたことにより得られた部分的な結果を紹介する．ここで次の命題を与える．

命題 8 閉曲面 F^2 上の三角形分割 G が 4-彩色可能であるための必要十分条件は，G が次を満たす *Grünbaum coloring* を持つことである；どの二色で塗られた辺から誘導される四角形分割も，二部的となる．

証明 まず必要性を示す．$c : V(G) \to \{1, 2, 3, 4\}$ を G の 4-彩色とする．このとき，

$$\begin{aligned}E_r &= \{uv \in E(G) | u \in c^{-1}(1) \text{ かつ } v \in c^{-1}(2), \text{ または } u \in c^{-1}(3) \text{ かつ } v \in c^{-1}(4)\},\\ E_b &= \{uv \in E(G) | u \in c^{-1}(1) \text{ かつ } v \in c^{-1}(3), \text{ または } u \in c^{-1}(2) \text{ かつ } v \in c^{-1}(4)\},\\ E_g &= \{uv \in E(G) | u \in c^{-1}(1) \text{ かつ } v \in c^{-1}(4), \text{ または } u \in c^{-1}(2) \text{ かつ } v \in c^{-1}(3)\}\end{aligned}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}&G - E_r \text{ は } X = c^{-1}(\{1, 2\}), Y = c^{-1}(\{3, 4\}),\\ &G - E_r \text{ は } X = c^{-1}(\{1, 3\}), Y = c^{-1}(\{2, 4\}),\\ &G - E_r \text{ は } X = c^{-1}(\{1, 4\}), Y = c^{-1}(\{2, 3\})\end{aligned}$$

をそれぞれ部集合として持つ二部的四角形分割となる．

次に十分性を示す．$E(G) = E_r \cup E_b \cup E_g$ を G の題意を満たす Grünbaum coloring とする．$c_1 : V(G) \to \{0, 1\}$ を $E_r \cup E_b$ が誘導する二部的四角形分割の 2-彩色，$c_2 : V(G) \to \{0, 1\}$ を $E_r \cup E_g$ が誘導する二部的四角形分割の 2-彩色とすると，任意の $v \in V(G)$ に対して $x = c_1(v), y = c_2(v)$ を満たす写像 $c' : V(G) \to \{(x, y) | x, y \in \{0, 1\}\}$ は，G の 4-彩色となることが容易に確認できる．□

定理 1 と命題 8 より，閉曲面上の局所平面的三角形分割と平面三角形分割の“距離”を測る上で，二部的四角形分割を持つことが一つの指標だと考えることができる．すなわち局所平面的三角形分割が二部的四角形分割を持てば，より距離が“近い”と考えることができる．まず閉曲面 F^2 上の三角形分割 G が，四角形分割を全域部分グラフとして持つかどうかを考える．G の全域部分グラフとしての四角形分割を，G の**全域四角形分割**と呼ぶ．このとき次が成り立つ．

命題 9 G を閉曲面 F^2 上の三角形分割とする．ことのき，G は全域四角形分割を持つ．

命題 9 の証明のため，以下の補題を用いる．

補題 10 (Petersen [10]) 任意の 2-辺連結 3-正則グラフは，完全マッチングを持つ．

命題 9 の証明 G^* を G の双対グラフとすると，G の単純性より G^* は 2-辺連結 3-正則グラフとなることがわかる．補題 10 より G^* は完全マッチング M^* を持つので，M を M^* に対応する G の辺集合とすると，$G \backslash E(M)$ は全域四角形分割となる．□

命題 9 より全域四角形分割の存在は保証されたので，その二部性を考える．球面上では，当然得られる全域四角形分割は二部的であるが，一般の閉曲面上ではその限りではない．

問題 11 閉曲面 F^2 上の三角形分割 G は，二部的全域四角形分割と二部的でない全域四角形分割をそれぞれ持つか．

問題 11 は，次の問題に言い換えることができる．G を閉曲面 F^2 上のグラフとするとき，G の**多色 k-着色**とは，G の各面に k 色全てが現れるような G の着色のことである(彩色である必要はない)．三角形分割 G が二部的全域四角形分割を持てば，それぞれの部集合に合わせて頂点を 2-着色すれば，G の多色 2-着色となる．逆もまた成り立つことが容易に確認できる．

問題 12 閉曲面 F^2 上の三角形分割 G は，多色 2-着色を持つか．

この多色着色の言葉で，次の予想がある．

予想 13 (Kündgen and Ramamurthi [5]) 球面でない任意の閉曲面 F^2 に対し，以下を満たす整数 $N = N(F^2)$ が存在する；F^2 上の $r(G) \geq N$ を満たす任意の三角形分割 G は，多色 2-着色を持つ．

射影平面上に三角形分割で埋め込まれた完全グラフ K_6 やトーラス上の K_7 は，多色 2-着色を持たないことが確認できるので，予想 13 から representativity の条件を外すことはできない．著者は Nakamoto and Ozeki との共同研究により，予想 13 の部分的解決として，偶三角形分割の族について考察し次の結果を得ている．

定理 14 (Nakamoto et al. [8]) F^2 を球面でも射影平面でもない閉曲面とする．このとき以下を満たす整数 $N = N(F^2)$ が存在する；F^2 上の $r(G) \geq N$ を満たす任意の偶三角形分割 G は，二部的全域四角形分割 Q_1 と二部的でない全域四角形分割 Q_2 を持つ．

また射影平面上では，representativity に依らない次の結果を得ている．

定理 15 (Nakamoto et al. [8]) G を射影平面上の偶三角形分割とする．G が 3-彩色可能ならば，G の任意の全域四角形分割 Q は二部的である．G が 3-彩色不可能ならば，G は二部的全域四角形分割 Q_1 と二部的でない全域四角形分割 Q_2 を持つ．

定理 15 より，射影平面上の任意の偶三角形分割は，二部的全域四角形分割を持つことがわかる．

さらに トーラス上では，次の結果を得ている．

定理 16 (Nakamoto et al. [8]) G をトーラス上の偶三角形分割とする．G が二部的全域四角形分割を持つための必要十分条件は，G が K_7 を部分グラフとして含まないことである．また，G は二部的でない全域四角形分割を持つ．

ここでは定理 14-16 の証明は省くが，とくに定理 14 の証明には定理 7 の monodromy の同値類の分類の結果を大きく用いている．

5 総括

本稿では，閉曲面上のグラフ，とくに局所平面的三角形分割が平面三角形分割とどのくらいの“距離”にあるかを測る一つの指標として，全域四角形分割を持つかどうかを検証した．その検証に非常に役立つものが代数的指標 monodromy であり，それを用いて偶三角形分割の族に対する部分的な結果を得ることができた．今後は得られた結果をさらに拡張し，より広いグラフの族に対して“距離”の指標として適用できるようにすることが目標である．また予想 4 と 5 の肯定的解決に向けた研究も進めて行く．

参考文献

[1] M.O. Albertson, Open problem 2, in "The Theory and Applications of Graphs," Ed. G. Chartrand et al., Wiley, 1981, p.609.

[2] K. Appel and W. Haken, Every planar map is four colorable, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 711–712.

[3] Y. Higuchi, A. Nakamoto, K. Ota, T. Sakuma, N-flips in even triangulations on the torus and Dehn twists preserving monodromies, Discrete Math. 311 (2011), 1128–1135.

[4] J.P. Hutchinson, R.B. Richter and P. Seymour, Colouring Eulerian triangulations, J. Combin. Theory Ser. B 84 (2002), 225–239.

[5] A. Kündgen and R. Ramamurthi, Coloring face-hypergraphs of graphs on surfaces, J. Combin. Theory Ser. B 85 (2002), 307–337.

[6] A. Nakamoto, 5-chromatic even triangulations on surfaces, Discrete Math. 308 (2008), 2571–2580.

[7] A. Nakamoto, S. Negami and K. Ota, Chromatic numbers and cycle parities of quadrangulations on non orientable closed surfaces, Discrete Math. 285 (2004), 211–218.

[8] A. Nakamoto, K. Noguchi, K. Ozeki, Spanning Quadrangulations of triangulations, preprint.

[9] K. Noguchi, Congruence classes of monodromies of even triangulations, submitted.

[10] J. Petersen, Die Theorie der regulären graphs, Acta Math. 15 (1891), 193–220.

[11] G. Ringel, "Map Color Theorem", Band 209, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[12] N. Robertson, Problem 5.5.17, in "Five-coloring maps on surfaces," B. Mohar and C. Thomassen, Johns Hopkins, 2001, p.153.

[13] P.G. Tait, Remarks on the colouring of maps, Proc. R. Soc. Edinburgh 10 (1880), 729.

[14] C. Thomassen, Five-coloring maps on surfaces, J. Combin. Theory Ser. B 59 (1993), 89–105.