数理解析研究所講究録
第 1957 巻 2015 年 81-90



# Navier–Stokes 方程式のための数値積分誤差を伴わない特性曲線有限要素スキームとその応用

内海 晋弥 [1], 田端 正久 [2]
[1] 早稲田大学大学院基幹理工学研究科, su48@fuji.waseda.jp
[2] 早稲田大学理工学術院, tabata@waseda.jp

Shinya Uchiumi[1], Masahisa Tabata[2]
[1] Graduate School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University
[2] Faculty of Science and Engineering, Waseda University

## 1 はじめに

本稿では $P_2/P_1$ 有限要素近似に対する，数値積分誤差を伴わない特性曲線有限要素スキームを述べ，その数値例を紹介する．

特性曲線有限要素スキーム (Lagrange–Galerkin スキームとも呼ばれる) は移流拡散方程式や Navier–Stokes 方程式のような流れ問題に対する有力な手法である．物質微分項を特性曲線に沿って離散化することが特徴である．解くべき連立一次方程式に現れる係数行列は対称であり，ゆえに，CG 法や MINRES 法 [1] といった，効率が良い線形ソルバーを用いることができる．

しかし，その安定性や誤差解析には，合成関数項が厳密に積分されることが仮定されていた．そこに数値積分公式が使われた場合，不安定になりうることが報告されている [6, 8, 9, 10, 11, 12]．一方我々は，移流拡散方程式に対して，線形化流速を用い，数値積分誤差を伴わないスキームを構成した [8, 12]．

本稿では Navier–Stokes 方程式に対して，厳密に実装できる数値積分誤差を伴わない特性曲線有限要素スキームを構成する．我々は $P_2/P_1$ 有限要素を用い，流速を近似し，厳密な積分を行う．その誤差評価と，数値結果を紹介する．

## 2 準備

$(u,p):\Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ を未知関数とする Navier–Stokes 問題：

$$
\begin{aligned}
\frac{Du}{Dt}-\nu\Delta u+\nabla p&=f, &&(x,t)\in\Omega\times(0,T),\\
\nabla\cdot u&=0, &&(x,t)\in\Omega\times(0,T),\\
u&=0, &&(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\
u(\cdot,0)&=u^0, &&x\in\Omega,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

を考える．ここに，$\Omega$ は $\mathbb{R}^d$ $(d=2,3)$ の多角形領域，$\partial\Omega$ はその境界，$T>0$ は時刻，$\frac{Du}{Dt}\equiv\frac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u$ は物質微分，$\nu>0$ は粘性係数である．関数 $f\in C^0(L^2)$ と $u^0:\Omega\to\mathbb{R}^d$ が与えられている．

括弧 $(\cdot,\cdot)$ は $L^2(\Omega)^i$ 内積 $(i=1,\,d,\,d\times d)$ を表す．双線形形式 $a,b$ を $a(u,v)\equiv\nu(\nabla u,\nabla v)$, $u,v\in H_0^1(\Omega)^d$, $b(v,q)\equiv-(\nabla\cdot v,q)$, $v\in H_0^1(\Omega)^d, q\in L_0^2(\Omega)$ で定める．これを用いて (1) を $(u,p):(0,T)\to H_0^1(\Omega)^d\times L_0^2(\Omega)$ を未知関数とする弱形式：

$$\left(\frac{Du}{Dt}(t),v\right)+a(u(t),v)+b(v,p(t))=(f(t),v),\quad \forall v\in H_0^1(\Omega)^d, t\in(0,T),$$
$$b(u(t),q)=0,\quad \forall q\in L_0^2(\Omega), t\in(0,T)$$

に書きなおすことができる．

$\mathcal{T}_h$ を $\bar{\Omega}$ の三角形分割とし，$h\equiv\max_{K\in\mathcal{T}_h}\mathrm{diam}(K)$ とする．$V_h\subset H_0^1(\Omega)^d, Q_h\subset L_0^2(\Omega)$ を $\mathrm{P}_2/\mathrm{P}_1$ 有限要素空間とする．$\Pi_h^{(1)}: C^0(\bar{\Omega})^d\cap H_0^1(\Omega)^d\to V_h$ を $\mathrm{P}_1$ 有限要素空間への Lagrange 補間作用素とする．$(\hat{u}_h,\hat{p}_h)\equiv\Pi_h^S(u,p)\in V_h\times Q_h$ を $(u,p)\in H_0^1(\Omega)^d\times L_0^2(\Omega)$ の Stokes 射影とする．すなわち，$(\hat{u}_h,\hat{p}_h)$ は次を満たす．

$$a(\hat{u}_h,v_h)+b(v_h,\hat{p}_h)=a(u,v_h)+b(v_h,p),\quad \forall v_h\in V_h,$$
$$b(\hat{u}_h,q_h)=b(u,q_h),\quad \forall q_h\in Q_h.$$

$(\Pi_h^S(u,p))_1$ は $(u,p)$ の Stokes 射影の第一成分 $\hat{u}_h$ を表す．

$\Delta t>0$ を時間刻み, $N_T\equiv\lfloor T/\Delta t\rfloor$ を時間ステップ数，$t^n\equiv n\Delta t$，$\psi^n\equiv\psi(\cdot,t^n)$ とする．関数集合 $\psi=\{\psi^n\}_{n=0}^{N_T}$, に対してノルム $\|\cdot\|_{\ell^\infty(X)}$, $\|\cdot\|_{\ell^2(X)}$ を

$$\|\psi\|_{\ell^\infty(X)}\equiv\max\{\|\psi^n\|_X\,;n=0,\ldots,N_T\},$$
$$\|\psi\|_{\ell^2(X)}\equiv\left(\Delta t\sum_{n=1}^{N_T}\|\psi^n\|_X^2\right)^{1/2}$$

で定める．

$u$ が滑らかと仮定する．特性曲線 $X(t;x,s)$ は常微分方程式系

$$\begin{cases}\frac{dX}{dt}(t;x,s)=u(X(t;x,s),t), & t<s,\\ X(s;x,s)=x\end{cases}$$

の解として定義される．これを用いると物質微分項 $(\frac{\partial}{\partial t}+u\cdot\nabla)u$ を

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\cdot\nabla\right)u(X(t),t)=\frac{d}{dt}u(X(t),t)$$

と書ける．$w:\Omega\to\mathbb{R}^d$ に対して，写像 $X_1(w):\Omega\to\mathbb{R}^d$ を次で定める．

$$(X_1(w))(x)\equiv x-w(x)\Delta t.$$

写像 $X_1(u(\cdot,t))$ は $X(t-\Delta t;x,t)$ の後退 Euler 近似である．

記号 $\circ$ は関数の合成を表す：$(g\circ f)(x)\equiv g(f(x))$.

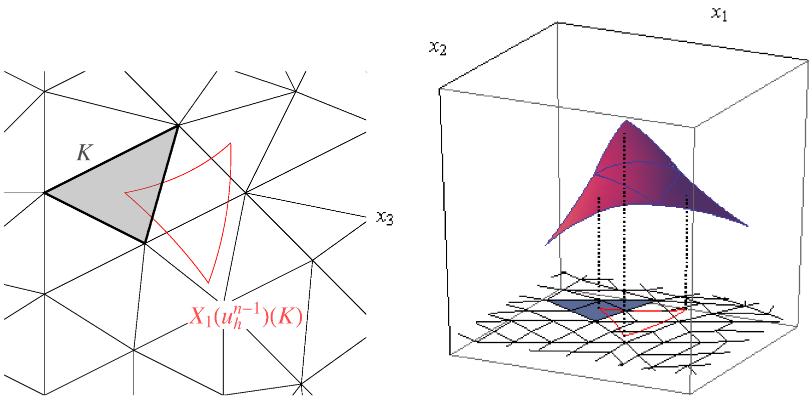


図 1: 要素 $K$ とその像 $X_1(u_h^{n-1})(K)$（左），要素 $K$，その像 $X_1(u_h^{n-1})(K)$ と関数 $u_{h2}^{n-1}$（右）.

## 3 特性曲線有限要素スキーム

従来の特性曲線有限要素スキームは次で定義される.

**スキーム 0.** $u_h^0 \equiv (\Pi_h^S(u^0, 0))_1$ とする．次を満たす $\{(u_h^n, p_h^n)\}_{n=1}^{N_T} \subset V_h \times Q_h$ を求めよ：

$$\left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1} \circ X_1(u_h^{n-1})}{\Delta t}, v_h\right) + a(u_h^n, v_h) + b(v_h, p_h^n) = (f^n, v_h), \quad \forall v_h \in V_h,$$

$$b(u_h^n, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h,$$

$n = 1, \ldots, N_T$.

合成関数項 $(u_h^{n-1} \circ X_1(u_h^{n-1}), v_h)$ が厳密に積分されると仮定すれば，誤差評価

$$\|u_h - u\|_{\ell^\infty(H^1)}, \|p_h - p\|_{\ell^2(L^2)} \leq c(h^2 + \Delta t), \tag{2a}$$

$$\|u_h - u\|_{\ell^\infty(L^2)} \leq c(h^3 + \Delta t) \tag{2b}$$

を [2, 7] と同様の方法で示すことができる.

関数 $u_h^{n-1}$ は要素 $K$ 上多項式であるが，合成関数 $u_h^{n-1} \circ X_1(u_h^{n-1})$ は一般には $K$ 上多項式でない． 像 $X_1(u_h^{n-1})(K)$ が複数の要素に跨るからである（図 1）． ゆえに $(u_h^{n-1} \circ X_1(u_h^{n-1}), v_h)$ を厳密に積分することは困難である．現実的にはそこに数値積分が使われる．$N_q$ を正整数，$g : K \to \mathbb{R}$ を連続関数，$w_i \in \mathbb{R}$ を重み，$a_i \in K$ を積分点とする $(i = 1, \ldots, N_q)$. $\int_K g dx$ の数値積分 $I_h[g; K]$ は

$$I_h[g; K] \equiv \operatorname{meas} K \sum_{i=1}^{N_q} w_i g(a_i)$$

で定義される.

**スキーム 1.** $u_h^0 \equiv (\Pi_h^S(u^0, 0))_1$ とする．次を満たす $\{(u_h^n, p_h^n)\}_{n=1}^{N_T} \subset V_h \times Q_h$ を求めよ：

$$\frac{1}{\Delta t}(u_h^n, v_h) - \frac{1}{\Delta t} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} I_h[(u_h^{n-1} \circ X_1(u_h^{n-1})) \cdot v_h; K]$$

$$+ a(u_h^n, v_h) + b(v_h, p_h^n) = (f^n, v_h), \qquad \forall v_h \in V_h,$$

$$b(u_h^n, q_h) = 0, \qquad \forall q_h \in Q_h,$$

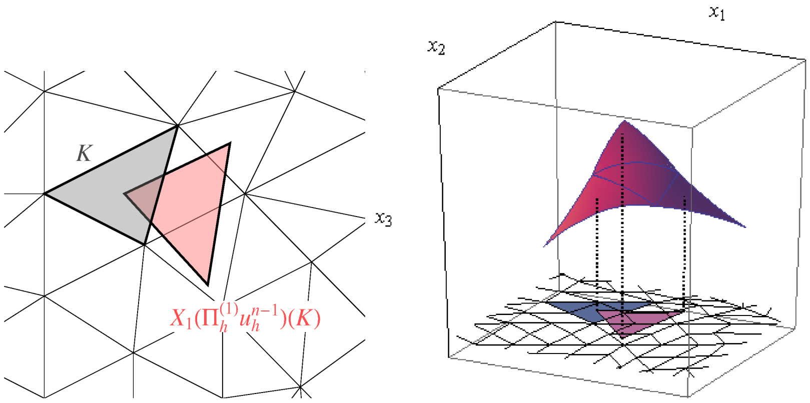


図 2: 要素 $K$ とその像 $X_1(\Pi_h^{(1)} u_h^{n-1})(K)$（左），要素 $K$，その像 $X_1(\Pi_h^{(1)} u_h^{n-1})(K)$ と関数 $u_{h2}^{n-1}$（右）．

$n = 1, \ldots, N_T$.

移流拡散方程式に対して，数値積分誤差を用いるスキームは不安定になりうることが知られている [6, 8, 9, 10, 11, 12].

数値積分誤差を伴わないスキームを述べる．

**スキーム 2.** $u_h^0 \equiv (\Pi_h^S(u^0, 0))_1$ とする．次を満たす $\{(u_h^n, p_h^n)\}_{n=1}^{N_T} \subset V_h \times Q_h$ を求めよ：

$$\left( \frac{u_h^n - u_h^{n-1} \circ X_1(\Pi_h^{(1)} u_h^{n-1})}{\Delta t}, v_h \right) + a(u_h^n, v_h) + b(v_h, p_h^n) = (f^n, v_h), \quad \forall v_h \in V_h,$$

$$b(u_h^n, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h,$$

$n = 1 \ldots, N_T$.

線形化流速場 $\Pi_h^{(1)} u_h^{n-1}$ を用いることにより，要素 $K$ の像 $X_1(\Pi_h^{(1)} u_h^{n-1})(K)$ は三角形となる (図 2)．積分 $(u_h^{n-1} \circ X_1(\Pi_h^{(1)} u_h^{n-1}), v_h)$ は厳密に行うことができる [8, 11, 12].

**注意 1.** $n (n = 1, \ldots, N_T)$ ステップ目の解 $(u_h^n, p_h^n)$ を得るためには $(X_1(\Pi_h^{(1)} u_h^{n-1}))(\Omega) \subset \Omega$ が成り立つことが必要である．

以下，スキーム 2 の誤差評価を述べる．

**仮定 1.** Navier–Stokes 方程式 (1) の解は次を満たす.

$$u \in Z^2 \cap H^1(0, T; H^3(\Omega)^d), \ p \in H^1(0, T; H^2(\Omega)),$$

ここに

$$Z^m \equiv \left\{ f \in H^j(0, T; H^{m-j}(\Omega)^d); 0 \leq j \leq m \right\}.$$

**仮定 2.** 分割列 $\{\mathcal{T}_h\}_{h \downarrow 0}$ は一様正則である．また，各 $h$ に対して，すべての $K \in \mathcal{T}_h$ は $\partial\Omega$ 上に無い頂点を少なくとも 1 つ持つ．

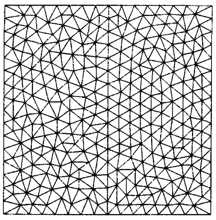

図 3: $N = 16$ のときの，$\bar{\Omega}$ の三角形分割.

**定理 1.** $(u, p)$ を (1) の解とし，$V_h \times Q_h$ を $\mathrm{P}_2/\mathrm{P}_1$ 有限要素空間とする．仮定 1, 2 の下，正定数 $c_0$, $h_0$ が存在して，$h \in (0, h_0]$, $\Delta t \le c_0 h^{d/4}$ ならばスキーム 2 の解 $(u_h, p_h) = \{(u_h^n, p_h^n)\}_{n=0}^{N_T}$ が存在し，評価

$$\|u_h - u\|_{\ell^\infty(H^1)}, \|p_h - p\|_{\ell^2(L^2)} \le c(h^2 + \Delta t)$$

が成り立つ．ここに，$c$ は $h$, $\Delta t$ に依存しない正定数である．

**注意 2.** スキーム 2 では誤差評価 (2b) を示すことはできない．

# 4 数値結果

空間次元 $d = 2$ での数値結果を述べる．従来の数値積分を用いるスキーム（スキーム 1）と今回のスキーム（スキーム 2）を比較する．領域分割には FreeFem++ [5] を用いる．スキーム 1 では，5 次の数値積分公式 [4] を用いる．相対誤差 $E_X$ を

$$E_X \equiv \frac{\|\Pi_h \phi - \phi_h\|_X}{\|\Pi_h \phi\|_X}$$

で定める．ここに，$\phi = u$ に対して $X = \ell^\infty(H_0^1)$, $\ell^\infty(L^2)$, $\phi = p$ に対して $X = \ell^2(L^2)$ である．

**例 1.** (1) において，$\Omega \equiv (0,1)^2$, $T = 1$, $\nu = 10^{-2}$, $10^{-3}$, $10^{-4}$ とする．関数 $f$ と $u^0$ を厳密解が

$$\begin{aligned}
u_1(x,t) &= (1 + \sin(\pi t)) \sin^2(\pi x_1) \sin(2\pi x_2), \\
u_2(x,t) &= -(1 + \sin(\pi t)) \sin^2(\pi x_2) \sin(2\pi x_1), \\
p(x,t) &= (1 + \cos(t)) \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)
\end{aligned}$$

となるように設定する．

$N$ を $\bar{\Omega}$ の各辺の分割数とし，$h \equiv 1/N, N = 16, 19, 23, 27, 32, 38, 45, 54, 64$ とする．図 3 は $N = 16$ のときの $\bar{\Omega}$ の三角形分割を示している．時間刻みを $\Delta t = h^2$ ととる． 図 4 は誤差 $E_X$ とメッシュ長 $h$ の両対数グラフであり，そこで使われる記号は表 1 に示している．$\nu = 10^{-2}$ のとき，いずれの傾きもほぼ 2 であり，スキーム 1, 2 の間で大きな差は見られない．$\nu = 10^{-3}$ のときも，傾きはほぼ 2 であるが，$u_h$ の $E_{\ell^\infty(H_0^1)}$ (●, ○) がやや大きくなっている．$\nu = 10^{-4}$ のとき，スキーム 1 の誤差 (●, ■, ▲) は，$N = 27, 32, 38, 45$ で非常

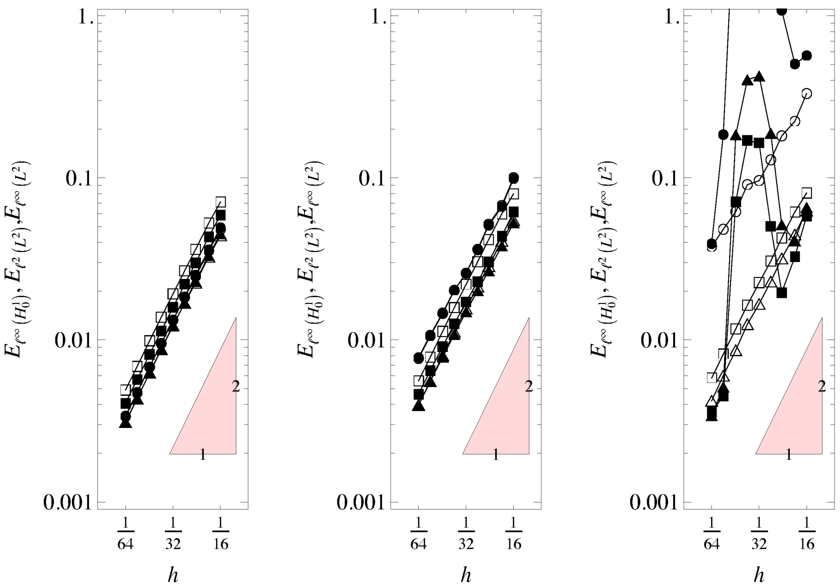


図 4: 例 1 における $h$ に対する誤差 $E_X$ の収束性．左から $\nu = 10^{-2}$, $\nu = 10^{-3}$, $\nu = 10^{-4}$.

表 1: 図 4 で使われる記号.

| | $u_h$ | $p_h$ | $u_h$ |
|---|---|---|---|
| $X$ | $\ell^\infty(H_0^1)$ | $\ell^2(L^2)$ | $\ell^\infty(L^2)$ |
| スキーム 1 | ● | ■ | ▲ |
| スキーム 2 | ○ | □ | △ |

に大きくなっている．一方，スキーム 2 の誤差 (○, □, △) は収束傾向にある．しかし，$u_h$ の $E_{\ell^\infty(H_0^1)}$(○) の傾きは 2 より小さい．理論的な収束勾配 2 を得るには，より細かいメッシュ分割が必要と思われる．

次に，キャビティ問題を考える．例 2, 3 では $\Omega = (0,1)^2$, $f = 0, u^0 = 0$ である．境界条件を図 5 に示している．

**例 2.** $g_1 = 1\ (0 < x_1 < 1), \nu = 10^{-3}$ とする．

この問題はベンチマークテストとしてよく使われる．図 7 は数値定常解の断面図を示している．スキーム 1，スキーム 2 の数値定常解と Ghia ら [3] の結果はほぼ同一であった．図 8 はその流線を示している．

**例 3.** $g_1 = 4x_1(1 - x_1)$, $\nu = 10^{-5}$ とする．

図 9 はスキーム 1 による $t^n = 8$ での解の立体図を示している．$x_2 = 1$ 周辺で振動が観察できる．図 10 はスキーム 2 による $t^n = 8$ での解の立体図を示している．安定な解が得られている．

キャビティ問題を三角形領域で考える．

**例 4.** 領域 $\Omega$ と境界条件は図 11 に示されている．$\nu = 1/Re\ (Re = 500, 1000, 2000, 4000)$, $f = 0, u^0 = 0$ とする．

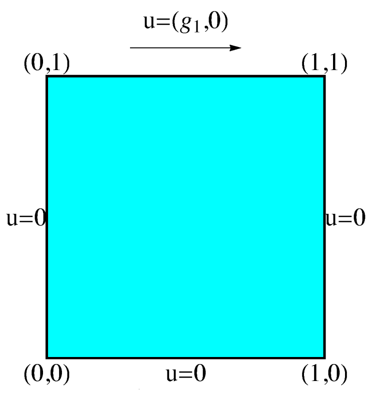


図 5: 四角形キャビティ問題を考える領域と境界条件.

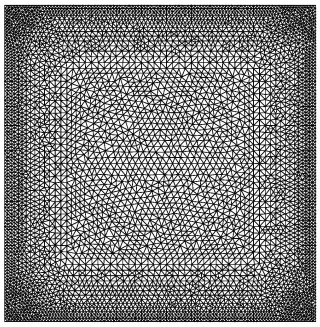

図 6: 四角形キャビティ問題に用いるメッシュ分割.

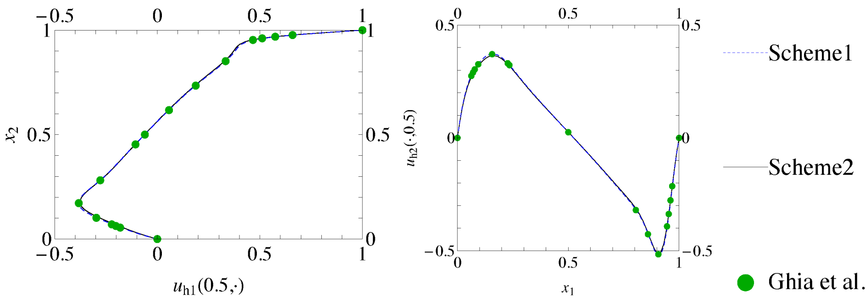


図 7: 例 2 の数値定常解の断面図. 左 : $u_{h1}(0.5,\cdot)$, 右 : $u_{h2}(\cdot,0.5)$.

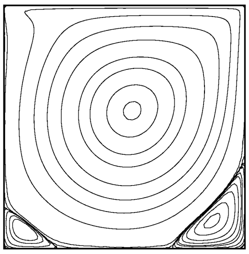

図 8: 例 2 の定常解の流線.

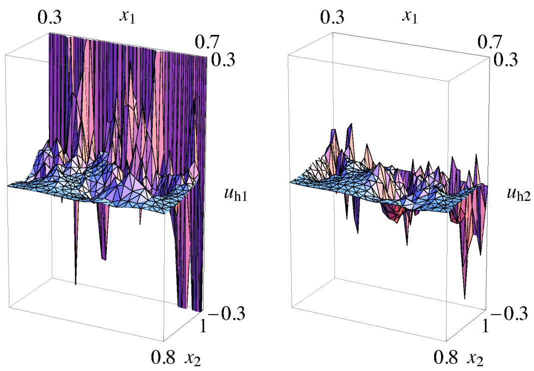

図 9: 例 3 における, スキーム 1 による解の $t^n=8$ における立体図. $u^n_{h1}$ (左), $u^n_{h2}$ (右).

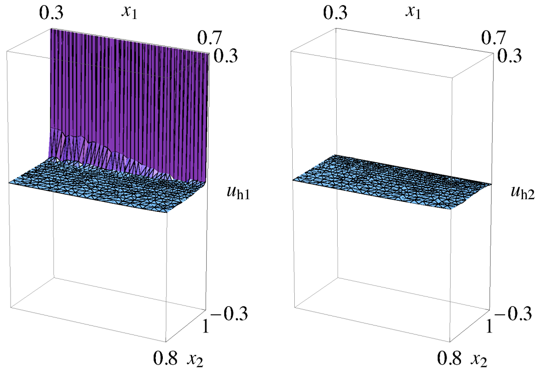


図 10: 例 3 における，スキーム 2 による解の $t^n = 8$ における立体図． $u^n_{h1}$ (左), $u^n_{h2}$ (右).

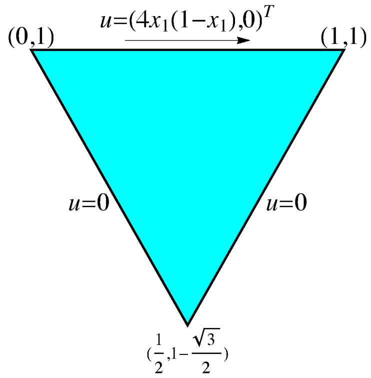


図 11: 三角形領域 $\Omega$ と境界条件.

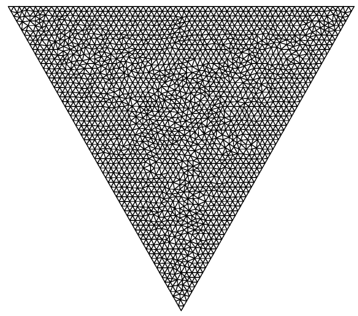

図 12: $\Omega$ の三角形分割.

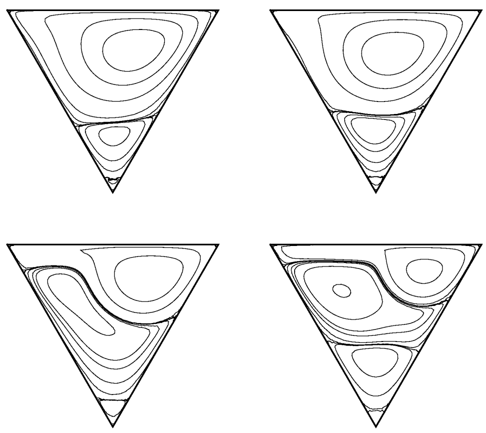

図 13: 例 4 の数値定常解の流線．左上：$Re = 500$, 右上：$Re = 1000$,
左下：$Re = 2000$, 右下：$Re = 4000$.

図 13 はそれぞれのレイノルズ数での数値定常解の流線を示している．$Re = 500$ と $Re = 1000$ を比較すると，$Re = 1000$ の 2 次渦がやや大きくなっている他は大きな変化はない．$Re = 1000$ と $Re = 2000$ を比較すると，$Re = 2000$ の 2 次渦が大きくなっている．これは，四角形キャビティ問題の同レイノルズ数での変化と比較すると大きな変化である．$Re = 2000$ と $Re = 4000$ を比較すると，$Re = 4000$ の 3 次渦が大きくなっている．

# 5 おわりに

$P_2/P_1$ 有限要素に対して，線形化流速場を用い，Navier–Stokes 方程式のための数値積分誤差を伴わない特性曲線有限要素スキームを構成した．その誤差評価と数値例を紹介した．

# 謝辞

本研究を遂行するに際し，学術振興会から，第一著者は特別研究員奨励費 (No. 26・964) の助成を，第二著者は科研費 (基盤研究 (C)No. 25400212, (S)No. 24224004) の助成を受けた．ここに感謝する．

# 参考文献

[1] R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, and H. Van der Vorst. *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, 2nd Edition.* SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

[2] K. Boukir, Y. Maday, B. Métivet, and E. Razafindrakoto. A high-order characteristics/finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 25, No. 12, pp. 1421–1454, 1997.

[3] U. Ghia, K.N. Ghia, and C.T. Shin. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, Vol. 48, No. 3, pp. 387–411, 1982.

[4] P. C. Hammer, O. J. Marlowe, and A. H. Stroud. Numerical integration over simplexes and cones. *Math. Comp.*, Vol. 10, pp. 130–137, 1956.

[5] F. Hecht. New development in FreeFem++. *J. Numer. Math.*, Vol. 20, No. 3-4, pp. 251–265, 2012.

[6] K. W. Morton, A. Priestley, and E. Suli. Stability of the Lagrange-Galerkin method with non-exact integration. *Modélisation mathématique et analyse numérique*, Vol. 22, No. 4, pp. 625–653, 1988.

[7] Endre Süli. Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik*, Vol. 53, No. 4, pp. 459–483, 1988.

[8] M. Tabata and S. Uchiumi. A Lagrange–Galerkin scheme free from numerical quadrature for convection–diffusion equations. (submitted).

[9] Masahisa Tabata. Discrepancy between theory and real computation on the stability of some finite element schemes. *Journal of computational and applied mathematics*, Vol. 199, No. 2, pp. 424–431, 2007.

[10] Masahisa Tabata and Shoichi Fujima. Robustness of a characteristic finite element scheme of second order in time increment. In *Computational Fluid Dynamics 2004*, pp. 177–182. Springer, 2006.

[11] 田中克徳, 鈴木厚, 田端正久. 厳密な積分を用いる特性有限要素法. 九州大学情報基盤センター年報, Vol. 2, pp. 11–18, 2002.

[12] 内海晋弥, 田端正久. 絶対安定な 2 次要素特性曲線有限要素法. 日本応用数理学会 2013 年度年会講演予稿集, pp. 393–394. 日本応用数理学会, 2013.