数理解析研究所講究録
第 1958 巻 2015 年 179-200

Applications of functional integrations to spectral analysis of QFT

Introduction of functional integrations in QFT

By

Fumio HIROSHIMA*
廣島 文生

§1. 場の量子論

研究集会では様々な Schrödinger 作用素 (相対論的 Schrödinger 作用素やその一般化) の経路積分表示を紹介し, 場の量子論への応用を述べた. しかし, 本稿では有限自由度系 (=Schrödinger 作用素)[Hir19, Hir10, HIL12, HIL13] の話は省略し, 場の量子論における汎関数積分の入門レベルの話題のみ紹介する. 場の量子論では基底状態の存在と非存在は大きな問題である. 歴史的には, はじめに摂動が小さい場合に解析され, 次に非摂動的な場合が解析された. 非摂動的な場合の解析には汎関数積分が重要な役割を果たした. さらに, 基底状態の性質を調べる上で, 汎関数積分はまたも重要な役割を果たした. 特にギブス測度による基底状態の空間減衰性, ボゾン個数の減衰性などの評価は重要である. 興味のある読者は [LHB11, 5,6 章] を参照せよ. また [Hir07, HL08, HHL14, Hir14] には最近の結果がある.

場の量子論の基本的な道具の定義を与える. 状態空間はベクトル空間であるだけではなく, テンソル積で環の構造をもつ巨大なヒルベルト空間である. また, ボゾンはフェルミオンの相互作用を媒介する量子で, ボーズ統計に従う. 例えば, 電子 (フェルミオン)vs 光子 (ボゾン), クォーク vs グルオン, 核子 vs 中間子である. 本稿ではスカラーボゾンと非相対論的なシュレディンガー作用素に従う量子の相互作用を考える. そのために, ボゾンについて基本的なことを述べる.

§1.1. Boson Fock 空間

$\mathscr{W}$ を Hilbert 空間とし, $\otimes_s^n\mathscr{W}$ は $\mathscr{W}$ の n-重対称テンソル積を表す. つまり $\otimes_s^n W = S_n(\otimes^n W)$ でユニタリー作用素 S_n は

$$S_n(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\wp_n} f_{\pi(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\pi(n)},\quad n\geq 1,$$

2010 Mathematics Subject Classification(s): 81T10, 81P16, 46T12
Key Words: ground state, functional integral, $p(\phi)_1$process
*Faculty of Mathematics Kyushu University, Fukuoka, 819-0395.

で定める. ここで $\wp_n$ は n 次置換群を表す. $\mathscr{F}^{(n)} = \mathscr{F}^{(n)}(\mathscr{W}) = \otimes_s^n \mathscr{W}$, $\otimes_s^0 \mathscr{W} = \mathbb{C}$ として, 無限直和空間

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}(\mathscr{W}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}^{(n)}(\mathscr{W})$$

を考える. ここにスカラー積を定めて位相を入れる. そのスカラー積は

$$(\Psi, \Phi)_{\mathscr{F}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\Psi^{(n)}, \Phi^{(n)})_{\mathscr{F}^{(n)}}$$

で与えられる. $(\mathscr{F}(\mathscr{W}), (\cdot,\cdot)_{\mathscr{F}(\mathscr{W})})$ は $\mathscr{W}$ 上の Boson Fock 空間といわれ, これは Hilbert 空間である. Fock 空間 $\mathscr{F}$ は ℓ_2-列 $(\Psi^{(n)})_{n\in\mathrm{N}}$ で $\Psi^{(n)} \in \mathscr{F}^{(n)}$ かつ

$$\|\Psi\|_{\mathscr{F}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\Psi^{(n)}\|_{\mathscr{F}^{(n)}}^2 < \infty$$

となるものと同一視される. $\Omega = (1, 0, 0, \ldots)$ は Fock 真空とよばれる. 生成・消滅作用素という $\mathscr{F}$ 上の 2 つの重要な閉作用素を定義しよう. それは $a^*(f)$, $a(f)$ と表され,

$$(a^*(f)\Psi)^{(n)} = \sqrt{n} S_n(f \otimes \Psi^{(n-1)}), n \geq 1, \quad (a^*(f)\Psi)^{(0)} = 0$$

で定義される. これらは可閉作用素でその閉包も同じ記号で書くことにする. 定義域は

$$D(a^*(f)) = \left\{ (\Psi^{(n)})_{n\geq 0} \in \mathscr{F} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} n \|S_n(f \otimes \Psi^{(n-1)})\|_{\mathscr{F}^{(n)}}^2 < \infty \right\}$$

である. さらに

$$a(f) = (a^*(\bar{f}))^* \tag{1.1}$$

である. $D \subset \mathscr{W}$ を稠密な部分集合とすれば

$$\mathrm{L.H.}\{a^*(f_1)\cdots a^*(f_n)\Omega, \Omega | f_j \in D, j = 1, .., n, n \geq 1\}$$

も稠密になる.

$$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}} = \left\{ (\Psi^{(n)})_{n\geq 0} \in \mathscr{F} \,\middle|\, \exists M \ s.t. \ \Psi^{(m)} = 0 (\forall m \geq M) \right\}$$

は有限粒子部分空間といわれる. a, a^* は $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}$ を不変にし, $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}$ 上で正準交換関係

$$[a(f), a^*(g)] = (\bar{f}, g)\mathbb{1}, \quad [a(f), a(g)] = 0, \quad [a^*(f), a^*(g)] = 0$$

をみたす. T を $\mathscr{W}$ 上の縮小作用素とする. T の第 2 量子化 $\Gamma(T)$ を

$$\Gamma(T) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\otimes^n T)$$

で定義する．ここで $\otimes^0 T = \mathbb{1}$. $\Gamma(T)$ も縮小作用素になる．自己共役作用素 h に対して $\{\Gamma(e^{ith}) : t \in \mathbb{R}\}$ は強連続1径数ユニタリー群になる．Stone の定理 により一意的な自己共役作用素 $d\Gamma(h)$ で $\Gamma(e^{ith}) = e^{itd\Gamma(h)}$, $t \in \mathbb{R}$, となるものが存在する．これも h の第2量子化という．$d\Gamma(h) = -i\frac{d}{dt}\Gamma(e^{ith})\lceil_{t=0}$ だから

$$d\Gamma(h) = 0 \oplus \left[\bigoplus_{n=1}^{\infty}\left(\overline{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \overset{j}{h} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}}\right)\right]$$

となる．よって

$$d\Gamma(h)\Omega = 0, \quad d\Gamma(h)a^*(f_1)\cdots a^*(f_n)\Omega = \sum_{j=1}^{n} a^*(f_1)\cdots a^*(hf_j)\cdots a^*(f_n)\Omega.$$

第2量子化作用素のスペクトルは

$$\sigma(d\Gamma(h)) = \overline{\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \middle| \lambda_j \in \sigma(h), j = 1, ..., n, n \geq 1\right\}} \cup \{0\},$$

$$\sigma_{\rm p}(d\Gamma(h)) = \left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \middle| \lambda_j \in \sigma_{\rm p}(h), j = 1, ..., n, n \geq 1\right\} \cup \{0\}$$

となるので，もし $0 \notin \sigma_{\rm p}(h)$ ならば $d\Gamma(h)$ の固有値0は単純になる．$N = d\Gamma(\mathbb{1})$ は個数作用素といわれ，$\sigma(N) = \sigma_{\rm disc}(N) = \mathbb{N} \cup \{0\}$ である．$a^\sharp(f)$ は非有界作用素である．そこで有用な不等式を紹介する．

命題 1.1. h は正の自己共役作用素，$f \in D(h^{-1/2})$, $\Psi \in D(d\Gamma(h)^{1/2})$ とする．このとき $\Psi \in D(a^\sharp(f))$ かつ

$$\|a(f)\Psi\| \leq \|h^{-1/2}f\|\|d\Gamma(h)^{1/2}\Psi\|, \quad \|a^*(f)\Psi\| \leq \|h^{-1/2}f\|\|d\Gamma(h)^{1/2}\Psi\| + \|f\|\|\Psi\|.$$

特に $f \in D(h^{-1/2})$ のとき $D(d\Gamma(h)^{1/2}) \subset D(a^\sharp(f))$.

最後に第2量子化作用素と生成・消滅作用素の交換関係を与えておく．

$$[d\Gamma(h), a^*(f)]\Psi = a^*(hf)\Psi, \quad [d\Gamma(h), a(f)]\Psi = -a(hf)\Psi.$$

ここで $\Psi \in D(d\Gamma(h)^{3/2}) \cap \mathscr{F}_{\rm fin}$. これは極限操作により $\Psi \in D(d\Gamma(h)^{3/2})$ まで拡張できる．Segal 場 $\Phi(f)$ は

$$\Phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^*(f) + a(\bar{f}))$$

で定義される．またその共役運動量作用素は

$$\Pi(f) = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^*(f) - a(\bar{f}))$$

で定義される．すぐに

$$[\Phi(f),\Pi(g)]=i\mathrm{Re}(f,g),\quad [\Phi(f),\Phi(g)]=i\mathrm{Im}(f,g),\quad [\Pi(f),\Pi(g)]=i\mathrm{Im}(f,g)$$

がわかる．$\mathrm{s-}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{\|\Phi(f)^n\Psi\|t^n}{n!}<\infty$ が $\Psi\in\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}$ と $t\geq 0$ で成り立つので Nelson の解析ベクトル定理から $\Phi(f)$ と $\Pi(g)$ がともに $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}$ 上本質的自己共役作用素であることがわかる．その閉包も同じ記号で表す．Wick 積 : $\prod_{i=1}^n\Phi(f_i)$: は帰納的に

$$\begin{aligned}&:\Phi(f):=\Phi(f),\\ &:\Phi(f)\prod_{i=1}^n\Phi(f_i):=\Phi(f):\prod_{i=1}^n\Phi(f_i):-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n(f,f_j):\prod_{i\neq j}\Phi(f_i):\end{aligned}$$

で定義される．すぐに

$$:\Phi(f)^n:=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{n!}{k!(n-2k)!}\Phi(f)^{n-2k}\left(-\frac{1}{4}\|f\|^2\right)^k$$

がわかる．$:\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n):\Omega=2^{-n/2}a^*(f_1)\cdots a^*(f_n)\Omega$ なので

$$\left(:\prod_{i=1}^n\Phi(f_i):\Omega,:\prod_{i=1}^m\Phi(g_i):\Omega\right)=\delta_{nm}2^{-n/2}\sum_{\pi\in\mathscr{P}_n}\prod_{i=1}^n(g_i,f_{\pi(i)})$$

となる．さらに

$$:e^{\alpha\Phi(f)}:\Omega=\mathrm{s-}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^m\frac{\alpha^n}{n!}:\Phi(f)^n:\Omega=e^{-(1/4)\alpha^2\|f\|^2}e^{\alpha\Phi(f)}\Omega.$$

§1.2. $\mathscr{Q}$-空間と Wiener-Itô-Segal 同型

確率空間 $(\mathscr{Q},\Sigma,\mu)$ 上の実ベクトル空間 $\mathscr{E}$ を指数にもつガウス型確率変数について考える．

定義 1.2. (ガウス超過程)$\phi(f)$, $f\in\mathscr{E}$, が確率空間 $(\mathscr{Q},\Sigma,\mu)$ 上の $\mathscr{E}$ を指数に持つガウス超過程であるとは次を満たすことである．

(1) $\phi(f)$ は $(\mathscr{Q},\Sigma,\mu)$ 上のガウス過程で平均ゼロ，共分散が $\mathbb{E}_\mu[\phi(f)\phi(g)]=\frac{1}{2}(f,g)_{\mathscr{E}}$.

(2) $\phi(\alpha f+\beta g)=\alpha\phi(f)+\beta\phi(g)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(3) Σ は $\{\phi(f)\mid f\in\mathscr{E}\}$ を可測にする最小のシグマ代数.

ガウス超過程の存在は知られている．

$$\mathscr{S}_{\mathscr{Q}}=\{F(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))\,|\,F\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n),f_j\in\mathscr{E},j=1,...,n,n\geq 1\}$$

と定義する．このとき次は同値であることが知られている．

(1) $\mathscr{S}_{\mathscr{Q}}$ は $L^2(\mathscr{Q})$ で稠密.

(2) Σ は $\{\phi(f) \mid f \in \mathscr{E}\}$ を可測にする最小のシグマ代数.

$L^2(\mathscr{Q}) = L^2(\mathscr{Q}, \Sigma, \mu)$ とおく. $\mathscr{E}$ を実ヒルベルト空間とする. $L^2(\mathscr{Q})$ と $\mathscr{F}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}})$ はユニタリー同値になることが知られている. ここで $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}$ は複素ヒルベルト空間で $\mathscr{E}$ の複素化であるこれをみてみよう. Fock 空間の Wick 積と同様に $L^2(\mathscr{Q})$ 上の Wick 積を定義する. 部分空間を

$$L^2_n(\mathscr{Q}) = \overline{\mathrm{L.H.}\left\{ :\prod_{i=1}^n \phi(f_i): \middle| f_i \in \mathscr{E}, i = 1, ..., n \right\} \cup \{\mathbb{1}\}}$$

としよう. このとき $L^2_m(\mathscr{Q}) \perp L^2_n(\mathscr{Q})$ $(n \neq m)$ がわかる.

$$L^2(\mathscr{Q}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2_n(\mathscr{Q})$$

は Wiener-Itô 分解として知られている. $U_W : \mathscr{F}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}) \to L^2(\mathscr{Q})$ を

$$U_W : \prod_{i=1}^n \Phi(f_i) : \Omega =: \prod_{i=1}^n \phi(f_i) :, \quad f_1, ..., f_n \in \mathscr{E}, \quad U_W\Omega = \mathbb{1}$$

で定める.

命題 1.3. (**Wiener-Itô-Segal** 同型)$U_W : \mathscr{F}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}) \to L^2(\mathscr{Q})$ は次を満たす: *(1)* $U_W\Omega = \mathbb{1}$, *(2)* $U_W\mathscr{F}^{(n)}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}) = L^2_n(\mathscr{Q})$, *(3)* $U_W\Phi(f)U_W^{-1} = \phi(f)$.

$T : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ を縮小作用素とし, $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}$ 上の縮小作用素に拡張しておく.

$$U_W\Gamma(T)U_W^{-1} : L^2(\mathscr{Q}) \to L^2(\mathscr{Q})$$

も $L^2(\mathscr{Q})$ 上の第 2 量子化作用素とよばれ, 簡単に $\Gamma(T)$ と書くことにする. すぐに

$$\Gamma(T) : \prod_{i=1}^n \Phi(f_i) :=: \prod_{i=1}^n \phi(Tf_i) : \quad \Gamma(T)\mathbb{1} = \mathbb{1}$$

がわかる. さらに自己共役作用素 h に対して $U_W d\Gamma(h)U_W^{-1}$ も混乱しない限りは簡単に $d\Gamma(h)$ とかくことにする. もちろん

$$d\Gamma(h)\mathbb{1} = 0 \quad d\Gamma(h) : \phi(f_1)\cdots\phi(f_n) := \sum_{j=1}^n : \phi(f_1)\cdots\phi(hf_j)\cdots\phi(f_n) :$$

である.

命題 1.4. (正値保存性)T を実 *Hilbert* 空間 $\mathscr{E}$ 上の縮小作用素とする. このとき $\Gamma(T)$ は正値保存作用素になる.

証明: $\Gamma(T):\exp(\alpha\phi(f)):=:\exp(\alpha\phi(Tf)):$ が $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して成立する. よって

$$\Gamma(T)e^{\alpha\phi(f)}=e^{\alpha\phi(Tf)}e^{\frac{1}{4}\alpha^2(f,(1-T^*T)f)}$$

となる. $F(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))\in\mathscr{S}_{\mathscr{Q}}$ に対しては,

$$\begin{aligned}&\Gamma(T)F(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))\\&=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}d\vec{k}\hat{F}(\vec{k})e^{-\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n(f_i,(1-T^*T)f_j)k_ik_j}e^{i\sum_{j=1}^n k_j\phi(Tf_j)}.\end{aligned}$$

$\|T\|\leq 1$ なので, $\{(f_i,(1-T^*T)f_j)\}_{i,j}$ は正定値. よって F とガウス核 D_T のたたみこみで

$$\Gamma(T)F(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))=(2\pi)^{-n/2}(F*D_T)(\phi(Tf_1),\cdots,\phi(Tf_n))$$

と表せる. これから $F\geq 0$ は $\Gamma(T)F\geq 0$ を意味する. $\Psi\in L^2(\mathscr{Q})$ を非負としよう. $F_n\in\mathscr{S}_{\mathscr{Q}}$ で $0\leq F_n\to\Psi$ $(n\to\infty)$ となる列が存在するので極限操作により命題が従う. □

§ 1.3. スカラー場

スカラー場を考える. $\mathscr{W}=L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき $\mathscr{F}^{(n)}$ は $L^2(\mathbb{R}^{dn})$ 上の対称関数の全体 $\{f\in L^2(\mathbb{R}^{dn})|f(k_1,\ldots,k_n)=f(k_{\pi(1)},\ldots,k_{\pi(n)}),\forall\pi\in\wp_n\}$ と同一視できる. 生成・消滅作用素は

$$\begin{aligned}&(a(f)\Psi)^{(n)}(k_1,...,k_n)=\sqrt{n+1}\int_{\mathbb{R}^d}f(k)\Psi^{(n+1)}(k,k_1,...,k_n)dk,\ n\geq 0,\\&(a^*(f)\Psi)^{(n)}(k_1,...,k_n)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^n f(k_j)\Psi^{(n-1)}(k_1,...,\hat{k}_j,...,k_n),\ n\geq 1,\\&(a^*(f)\Psi)^{(0)}=0\end{aligned}$$

となる. $\omega:L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)$ はかけ算作用素で, 次で定義される.

$$\omega(k)=\sqrt{|k|^2+m^2},\quad k\in\mathbb{R}^d. \tag{1.2}$$

ここで $m\geq 0$ はボゾンの質量を表す. その第 2 量子化作用素は

$$(d\Gamma(\omega)\Psi)^{(n)}(k_1,...,k_n)=\left(\sum_{j=1}^n\omega(k_j)\right)\Psi^{(n)}(k_1,...,k_n)$$

となる. $d\Gamma(\omega)$ は自由ハミルトニアンといわれ,

$$H_{\mathrm{f}}=d\Gamma(\omega) \tag{1.3}$$

とおく.

$$\sigma(H_{\mathrm{f}})=[0,\infty),\quad \sigma_{\mathrm{p}}(H_{\mathrm{f}})=\{0\} \tag{1.4}$$

である. 特に $H_{\mathrm{f}}\Omega=0$. 交換関係は

$$[H_{\mathrm{f}},a(f)]=-a(\omega f),\quad [H_{\mathrm{f}},a^*(f)]=a^*(\omega f).$$

もし $f/\sqrt{\omega}\in L^2(\mathbb{R}^d)$ ならば次の有用な不等式

$$\|a(f)\Psi\|\le\|f/\sqrt{\omega}\|\|H_{\mathrm{f}}^{1/2}\Psi\|,\quad \|a^*(f)\Psi\|\le\|f/\sqrt{\omega}\|\|H_{\mathrm{f}}^{1/2}\Psi\|+\|f\|\|\Psi\|$$

が成り立つ. 形式的な表記 $a^\sharp(f)=\int a^*(k)f(k)dk$ を断りなしに使う.

§1.4. Euclid 場とマルコフ性

ガウス超過程の作る空間 $L^2(\mathscr{Q},d\mu)$ が $\mathscr{F}(L^2(\mathbb{R}^d))$ と自然に同型となるものを構成しよう. $\mathscr{Q}=\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)'$ として, $\phi(f)=\langle\phi,f\rangle$, $f\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$, とすれば, $\phi(f)$ がガウス型になる測度 μ が $\mathscr{Q}$ 上に存在することが知られている. その結果

$$\mathbb{E}_\mu[|\phi(f)|^2]=\frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

となるから, $\phi(f)$ は $f\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ まで拡大することが出来る. 実際 $f\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ に対して $f_n\to f$ となる列 $f_n\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ が存在するので $\phi(f)=s-\lim_{n\to\infty}\phi(f_n)$ として定義できる. さて, $\phi(f)$ を確率空間 $(\mathscr{Q},\Sigma,\mu)$ 上の $f\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ を指数に持つガウス超過程としよう. さらに $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して $\phi(f)=\phi(\Re f)+i\phi(\Im f)$ として $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ まで拡張しておく. $L^2(\mathscr{Q})\cong\mathscr{F}(L^2(\mathbb{R}^d))$ が Wiener-Itô-Segal 同型から従い, 同様に

$$U_W\phi(f)U_W^{-1}=\Phi(\hat{f}),\quad f\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$$

となる. ここで, 細かな注意をあたえる. 一般の $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対しては $\phi(f)$ と $\Phi(\hat{f})$ は同型にならない. なぜならば, $\phi(f)$ は f について複素線形だが, $\Phi(\hat{f})$ は実線形なため. そこで,

$$\phi_b(f)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\left(a^*(k)\hat{f}(k)+a(k)\hat{f}(-k)\right)dk$$

とすれば, $\phi(f)$ と $\phi_b(f)$ は同型になる. もちろん $f\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ のとき $\Phi(\hat{f})=\phi_b(f)$ である. さて, $\phi_{\mathrm{E}}(F)$ は確率空間 $(\mathscr{Q}_{\mathrm{E}},\Sigma_{\mathrm{E}},\mu_{\mathrm{E}})$ 上の $F\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{d+1})$ を指数に持つガウス超過程とする. 構成の仕方は $\phi(f)$ と全く同じである. 違うのは次元が $d+1$ 次元に変ったところだけである. いまから

$$\mathrm{J}_t:L^2(\mathscr{Q})\to L^2(\mathscr{Q}_{\mathrm{E}}) \tag{1.5}$$

を

$$\mathrm{j}_t:L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)\to L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{d+1}) \tag{1.6}$$

の第2量子化作用素で定義しよう. ここで

$$\widehat{\mathrm{j}_s f}(k_0, k) = \frac{e^{-itk_0}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\omega(k)}}{\sqrt{\omega(k)^2 + |k_0|^2}} \hat{f}(k). \tag{1.7}$$

$f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\overline{\mathrm{j}_t f} = \mathrm{j}_t f$ だから j_t は実を実にうつす.

$$\hat{\omega} = \omega(-i\nabla) = \sqrt{-\Delta + \nu^2} \tag{1.8}$$

とする.

命題 1.5. $t, s \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathrm{j}_s^* \mathrm{j}_t = e^{-|t-s|\hat{\omega}}$. 特に j_t は等長作用素である.

証明: 簡単なので省略する. □

$\mathrm{J}_t : L^2(\mathscr{Q}) \to L^2(\mathscr{Q}_{\mathrm{E}})$ を

$$\mathrm{J}_t \mathbb{1}_{\mathrm{M}} = \mathbb{1}_{\mathrm{E}}, \quad \mathrm{J}_t : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) :=: \phi_{\mathrm{E}}(\mathrm{j}_t f_1) \cdots \phi_{\mathrm{E}}(\mathrm{j}_t f_n) : \tag{1.9}$$

で定義する. 恒等式 $\mathrm{j}_s^* \mathrm{j}_t = e^{-|t-s|\hat{\omega}}$ から

$$\mathrm{J}_t^* \mathrm{J}_s = e^{-|t-s| U_W^{-1} H_{\mathrm{f}} U_W} \tag{1.10}$$

が従う. ここで $U_W^{-1} H_{\mathrm{f}} U_W$ は $L^2(\mathscr{Q})$ の自由ハミルトニアン で, 以降 H_{f} と書くことにする.

命題 1.6. (自由ハミルトニアン の汎関数積分表示)$F, G \in L^2(\mathscr{Q})$ とし $t \geq 0$ とする. このとき $(F, e^{-tH_{\mathrm{f}}} G)_{L^2(\mathscr{Q})} = (\mathrm{J}_0 F, \mathrm{J}_t G)_{L^2(\mathscr{Q}_{\mathrm{E}})}$.

証明: (1.10) から従う. □ユークリッド場のマルコフ性について説明する. $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}$ に対して

$$U(\mathscr{O}) = \overline{\{f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{d+1}) | f \in \mathrm{Ran}(\mathrm{j}_t), t \in \mathscr{O}\}}$$

とおき, 射影作用素 $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{d+1}) \to U(\mathscr{O})$ を $e_{\mathscr{O}}$ で表す. $\Sigma_{\mathscr{O}}$ は

$$\Sigma_{\mathscr{O}} = \sigma(\{\phi_{\mathrm{E}}(f) \in L^2(\mathscr{Q}_{\mathrm{E}}) | f \in U(\mathscr{O})\}) \subset \Sigma.$$

一方

$$\mathscr{E}_{\mathscr{O}} = \{\Phi \in L^2(\mathscr{Q}_{\mathrm{E}}) | \Phi は \Sigma_{\mathscr{O}} 可測\}$$

とする. $e_t = \mathrm{j}_t \mathrm{j}_t^* : L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{d+1}) \to \mathrm{Ran}(\mathrm{j}_t)$, $t \in \mathbb{R}$, とすれば $\{e_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ は射影作用素の族になる. $\Sigma_t = \Sigma_{\{t\}}$, $\mathscr{E}_t = \mathscr{E}_{\{t\}}$ としよう.

補題 1.7. $a \leq b \leq t \leq c \leq d$ とする. 次の (a)-(d) が成立する. (a) $e_a e_b e_c = e_a e_c$, (b) $e_{[a,b]} e_t e_{[c,d]} = e_{[a,b]} e_{[c,d]}$, (c) $e_c e_b e_a = e_c e_a$, (d) $e_{[c,d]} e_t e_{[a,b]} = e_{[c,d]} e_{[a,b]}$.

$\mathrm{E}_t = \mathrm{J}_t \mathrm{J}_t^* = \Gamma_{\mathrm{E}}(e_t)$, $\mathrm{E}_{\mathscr{O}} = \Gamma_{\mathrm{E}}(e_{\mathscr{O}})$, $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}$, としよう.

命題 1.8. *(1)* $\mathrm{Ran}(\mathrm{E}_{[a,b]}) = \mathscr{E}_{[a,b]}$.

(2) $\mathrm{E}_{[a,b]}\mathrm{E}_t\mathrm{E}_{[c,d]} = \mathrm{E}_{[a,b]}\mathrm{E}_{[c,d]}$, $\mathrm{E}_{[c,d]}\mathrm{E}_t\mathrm{E}_{[a,b]} = \mathrm{E}_{[c,d]}\mathrm{E}_{[a,b]}$ が $a \le b \le t \le c \le d$ に対して成り立つ.

(3) もし $[a,b] \subset [c,d]$ ならば $\mathrm{E}_{[a,b]}\mathrm{E}_{[c,d]} = \mathrm{E}_{[c,d]}\mathrm{E}_{[a,b]} = \mathrm{E}_{[a,b]}$.

注意 1. 命題 1.8 (1) から $\mathrm{E}_{[a,b]}$ は $\Sigma_{[a,b]}$-可測な $L^2(\mathscr{Q}_\mathrm{E})$ 関数全体への射影である. $\mathrm{E}_{[a,b]}F$ は $\mathbb{E}_{\mu_\mathrm{E}}[F|\Sigma_{[a,b]}]$ と一致する. また $\mathrm{E}_tF = \mathbb{E}_{\mu_\mathrm{E}}[F|\Sigma_t]$. 命題 1.8 (2) は E_s, $s \in \mathbb{R}$, のマルコフ性とよばれる.

命題 1.9. $F \in \mathscr{E}_{s+t}$ とするとき $\mathbb{E}_{\mu_\mathrm{E}}[F|\Sigma_{(-\infty,s]}] = \mathbb{E}_{\mu_\mathrm{E}}[F|\Sigma_s]$ が成り立つ.

証明: $\mathbb{E}_{\mu_\mathrm{E}}[F|\Sigma_{(-\infty,s]}] = \mathrm{E}_{(-\infty,s]}F = \mathrm{E}_{(-\infty,s]}\mathrm{E}_{s+t}F = \mathrm{E}_{(-\infty,s]}\mathrm{E}_s\mathrm{E}_{s+t}F$ がマルコフ性から従う. $\mathrm{E}_{(-\infty,s]}\mathrm{E}_s = \mathrm{E}_{(-\infty,s]}\mathrm{E}_{\{s\}} = \mathrm{E}_{\{s\}} = \mathrm{E}_s$ なので $\mathrm{E}_{(-\infty,s]}\mathrm{E}_s\mathrm{E}_{s+t}F = \mathrm{E}_s\mathrm{E}_{s+t}F = \mathrm{E}_sF = \mathbb{E}_{\mu_\mathrm{E}}[F|\Sigma_s]$ がわかる. □

このマルコフ性を使って Feynman-Kac 型汎関数積分表示を構成できる. 簡単な例を紹介しよう. 多項式 $P(X) = a_{2n}X^{2n} + a_{2n-1}X^{2n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ で $a_{2n} > 0$ とする. $f \in L^2_\mathbb{R}(\mathbb{R}^d)$ に対して $H_\mathrm{I} =: P(\phi(f))$:, $H_P = H_\mathrm{f} \dot{+} H_\mathrm{I}$ としよう. e^{-tH_P} の Feynman-Kac 型汎関数積分表示を形式的に求める. トロッタ積公式から $e^{-tH_P} = \mathrm{s}-\lim_{n\to\infty}\left(e^{-(t/n)H_\mathrm{f}}e^{-(t/n)H_\mathrm{I}}\right)^n$. ここに $e^{-|t-s|H_\mathrm{f}} = \mathrm{J}_t^*\mathrm{J}_s$ を代入すると

$$e^{-tH_P} = \mathrm{s}-\lim_{n\to\infty}\mathrm{J}_0^*\left(\prod_{j=1}^n \mathrm{J}_{tj/n}e^{-(tj/n)H_\mathrm{I}}\mathrm{J}_{tj/n}^*\right)\mathrm{J}_t.$$

よって

$$e^{-tH_P} = \mathrm{s}-\lim_{n\to\infty}\mathrm{J}_0^*\left(\prod_{j=1}^n \mathrm{E}_{tj/n}e^{-(tj/n)H_\mathrm{I}(tj/n)}\mathrm{E}_{tj/n}\right)\mathrm{J}_t.$$

$H_\mathrm{I}(t/n)$ は $L^2(\mathscr{Q}_\mathrm{E})$ に作用する作用素. E_s のマルコフ性からすべての E_s を消し去ることができて

$$(F, e^{-tH_P}G) = \lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{J}_0F, \left(\prod_{j=1}^n e^{-(tj/n)H_\mathrm{I}(tj/n)}\right)\mathrm{J}_tG\right) = (\mathrm{J}_0, e^{-\int_0^t H_\mathrm{I}(s)ds}\mathrm{J}_tG,)$$

となる. 厳密に証明すれば以下のようになる.

定理 1.10. (FK-Nelson 公式)$F, G \in L^2(\mathscr{Q})$ とする. このとき

$$(F, e^{-tH_P}G) = (\mathrm{J}_0F, e^{-\int_0^t H_\mathrm{I}(s)ds}\mathrm{J}_tG)_{L^2(\mathscr{Q}_\mathrm{E})}.$$

証明: $F_0 = \mathrm{J}_t F$, $G_t = \mathrm{J}_t G$ とおく. トロッタ 積公式と $e^{-|t-s|H_{\mathrm{f}}} = \mathrm{J}_t^* \mathrm{J}_s$ によって,

$$(F, e^{-tH_P}G) = \lim_{n\to\infty}(F, (e^{-(t/n)H_{\mathrm{f}}}e^{-(t/n)H_{\mathrm{I}}})^n G) = \lim_{n\to\infty}\left(F_0, \prod_{i=1}^n (\mathrm{E}_{ti/n}R_i\mathrm{E}_{ti/n})G_t\right).$$

ここで $R_j = e^{-(t/n):P(\phi_{\mathrm{E}}(\delta_{jt/n}f)):}$, 等式 $\mathrm{J}_s\exp(-tH_{\mathrm{I}})\mathrm{J}_s^* = \mathrm{E}_s\exp(-t:P(\phi_{\mathrm{E}}(\mathrm{j}_s f)):)\mathrm{E}_s$ をつかった. よって

$$\left(F_0, \prod_{i=1}^n (\mathrm{E}_{ti/n}R_i\mathrm{E}_{ti/n})G_t\right) = \left(\underbrace{F_0}_{\in\mathscr{E}_{\{0\}}}, \mathrm{E}_{t/n}\underbrace{R_1\mathrm{E}_{t/n}(\mathrm{E}_{2t/n}R_2\mathrm{E}_{2t/n})\cdots(\mathrm{E}_tR_n\mathrm{E}_t)G_t}_{\in\mathscr{E}_{[t/n,t]}}\right).$$

マルコフ性から $\mathrm{E}_{t/n}$ を消してもいいから

$$\left(F_0, \prod_{i=1}^n (\mathrm{E}_{ti/n}R_1\mathrm{E}_{ti/n})G_t\right) = \left(\underbrace{R_1F_0}_{\in\mathscr{E}_{[0,t/n]}}, \mathrm{E}_{t/n}\underbrace{(\mathrm{E}_{2t/n}R_2\mathrm{E}_{2t/n})\cdots(\mathrm{E}_tR_n\mathrm{E}_t)G_t}_{\in\mathscr{E}_{[2t/n,t]}}\right).$$

同様に $\mathrm{E}_{t/n}$ も消していいので

$$\left(F_0, \prod_{i=1}^n (\mathrm{E}_{ti/n}R_1\mathrm{E}_{ti/n})G_t\right) = \left(\underbrace{R_1F_0}_{\in\mathscr{E}_{[0,t/n]}}, \mathrm{E}_{2t/n}\underbrace{R_2\mathrm{E}_{2t/n}\cdots(\mathrm{E}_tR_n\mathrm{E}_t)G_t}_{\in\mathscr{E}_{[2t/n,t]}}\right).$$

帰納的に全ての E_s を消していいから

$$(F, e^{-tH_P}G) = \lim_{n\to\infty}(F_0, R_1\cdots R_nG_t) = (F_0, e^{-\int_0^t H_{\mathrm{I}}(s)ds}G_t)_{L^2(\mathscr{Q})}.$$

□

$e^{\phi_{\mathrm{E}}(h)}$ はもちろん有界作用素ではない. しかし, $\mathrm{J}_t\Phi\mathrm{J}_s$, $t\neq s$, は有界作用素でその作用素ノルムは $\|\mathrm{J}_t\Phi\mathrm{J}_s\| \le \|\Phi\|_{L^1(\mathscr{Q})}$ となる. 特に $\mathrm{J}_0^* e^{\phi_{\mathrm{E}}(h)}\mathrm{J}_t$ は有界作用素で $\|\mathrm{J}_0^* e^{\phi_{\mathrm{E}}(h)}\mathrm{J}_t\| \le e^{\|h\|^2/4}$ となる.

§ 2. Nelson 模型

Nelson 模型はスカラー場とシュレディンガー 方程式に従う非相対論的な粒子が線形の相互作用をする模型である. E. Nelson は 1964 年に今日 Nelson 模型といわれるものを厳密に定義し [Nel64], UV くりこみを行って厳密に紫外切断のない自己共役作用素を定義した.

§ 2.1. Fock 空間上の Nelson 模型

空間次元を d とする. $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の Fock 空間を簡単に $\mathscr{F}$ とおき, Nelson 模型の状態ベクトルのなす Hilbert 空間は $\mathscr{H}_{\mathrm{N}} = L^2(\mathbb{R}^d)\otimes\mathscr{F}$ で与えられる.

仮定 2.1. Dispersion relation: $\omega = \omega(k) = \sqrt{|k|^2+\nu^2}$, $\nu \geq 0$.

荷電分布: $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\overline{\hat{\varphi}(k)} = \hat{\varphi}(-k) = \hat{\varphi}(k)$, $\hat{\varphi}/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\hat{\varphi}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

ポテンシャル: $H_{\mathrm{p}} = -\Delta/2 + V$ で $V = V_+ - V_-$ は Kato 分解可能.

以降, 断らない限りは仮定 2.1 を仮定する. $\mathscr{H}_{\mathrm{N}}$ を $\mathscr{F}$ 値 L^2 関数の空間と同一視する.

$$\mathscr{H}_{\mathrm{N}} \cong \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} \mathscr{F} dx = \left\{ F : \mathbb{R}^d \to \mathscr{F} \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^d} \|F(x)\|_{\mathscr{F}}^2 dx < \infty \right\}.$$

$H_{\mathrm{I}}(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, を

$$H_{\mathrm{I}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ a^*(\hat{\varphi} e^{-ikx}/\sqrt{\omega}) + a(\widetilde{\hat{\varphi}} e^{ikx}/\sqrt{\omega}) \right\}$$

で定める. ここで $\widetilde{\hat{\varphi}}(k) = \hat{\varphi}(-k)$, $\overline{\hat{\varphi}(k)} = \hat{\varphi}(-k)$ なので $H_{\mathrm{I}}(x)$ は対称作用素で $\mathscr{F}$ の有限粒子部分空間上で本質的に自己共役になる. $H_{\mathrm{I}}(x)$ の自己共役拡大を $\overline{H_{\mathrm{I}}(x)}$ とかく. 相互作用項 H_{I} は $H_{\mathrm{I}} = \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} \overline{H_{\mathrm{I}}(x)} dx$ で定める. これは $(H_{\mathrm{I}}\Psi)(x) = \overline{H_{\mathrm{I}}(x)}\Psi(x)$ のように作用し,

$$D(H_{\mathrm{I}}) = \left\{ \Psi \in \mathscr{H}_{\mathrm{N}} \,\middle|\, \Psi(x) \in D(\overline{H_{\mathrm{I}}(x)}), x \in \mathbb{R}^d \right\}$$

となる. 自由ハミルトニアン は $H_{\mathrm{f}} = d\Gamma(\omega)$ で与えられる.

定義 2.2. (**Fock 空間上の Nelson** ハミルトニアン)

$$H = H_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}} + H_{\mathrm{I}}$$

を Nelson ハミルトニアン という.

自己共役性に関しては次のことが容易に示せる.

命題 2.3. (自己共役性)$\hat{\varphi}, \hat{\varphi}/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき

(1) $H_0 = H_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}}$ は $D(H_0) = D(H_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1}) \cap D(\mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}})$ 上非負自己共役である.

(2) H は $D(H_0)$ 上自己共役である. さらに H_0 の任意の芯で本質的自己共役である.

証明: この証明は基本的である.

$$\|\overline{H_{\mathrm{I}}(x)}\Psi\|_{\mathscr{F}} \leq (2\|\hat{\varphi}/\sqrt{\omega}\| + \|\hat{\varphi}\|)\|(H_{\mathrm{f}}+1)^{1/2}\Psi\|_{\mathscr{F}}, \quad \Psi \in D(H_{\mathrm{f}}),$$

が $x \in \mathbb{R}^d$ ごとに成り立つ. よって $\Phi \in D(\mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}})$ に対して,

$$\|H_{\mathrm{I}}\Phi\|_{\mathscr{H}_{\mathrm{N}}} \leq (2\|\hat{\varphi}/\sqrt{\omega}\| + \|\hat{\varphi}\|)\|\mathbb{1} \otimes (H_{\mathrm{f}} + \mathbb{1})^{1/2}\Phi\|_{\mathscr{H}_{\mathrm{N}}}.$$

さらに

$$\|(\mathbb{1}\otimes H_{\rm f}+\mathbb{1})^{1/2}\Psi\|\leq\epsilon\|H_0\Psi\|+(1+\frac{1}{4\epsilon})\|\Psi\|$$

なので, Kato-Rellich の定理から H が $D(H_0)$ 上自己共役で, H_0 の任意の芯上本質的自己共役になることがわかる. □

§ 2.2. 汎関数空間上の Nelson 模型

ガウス超過程 (Q,Σ,μ), $(\phi(f),f\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d))$ を固定する. Feynman-Kac 型汎関数積分表示をもちいて Nelson ハミルトニアン を解析するときは確率空間上にハミルトニアンを定義すると便利である. すぐに $U_W H_{\rm I}(x)U_W^{-1}=\phi(\tilde{\varphi}(\cdot-x))$ がわかる. ここで

$$\tilde{\varphi}=(\hat{\varphi}/\sqrt{\omega})^\vee.$$

$\tilde{H}_{\rm I}=\int_{\mathbb{R}^d}^\oplus\phi(\tilde{\varphi}(\cdot-x))dx$ とする. つまり $\tilde{H}_{\rm I}:F(x,\phi)\mapsto\phi(\tilde{\varphi}(\cdot-x))F(x,\phi)$ となるかけ算作用素. また $L^2(Q)$ 上の自由ハミルトニアンは $H_{\rm f}=\theta_W H_{\rm f}\theta_W^{-1}$ だった.

定義 2.4. (**Nelson** ハミルトニアン)$L^2(\mathbb{R}^d)\otimes L^2(Q)$ 上の Nelson ハミルトニアンは

$$H=H_{\rm p}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_{\rm f}+\tilde{H}_{\rm I}$$

で定義する.

$H_{\rm p}$ の作用する Hilbert 空間も基底状態変換で変換する. 基底状態変換は

$$U_{\varphi_{\rm p}}:L^2(\mathbb{R}^d,d{\rm N}_0)\to{\rm L}^2(\mathbb{R}^{\rm d},{\rm dx}),\quad {\rm f}\mapsto\varphi_{\rm p}{\rm f},$$

だった. ${\rm P}_0={\rm N}_0\otimes\mu$ とおけば, これは $\mathbb{R}^d\otimes\mathscr{Q}$ 上の確率測度になる. $L^2(\mathbb{R}^d\otimes\mathscr{Q},d{\rm P}_0)$ と $\mathscr{H}_{\rm N}$ は

$$U_{\varphi_{\rm p}}\otimes U_W:\mathscr{H}_{\rm N}\to L^2(\mathbb{R}^d\otimes\mathscr{Q},d{\rm P}_0)$$

によってユニタリー同値になる. 簡単のために $L^2(\mathbb{R}^d\otimes\mathscr{Q},d{\rm P}_0)$ を $L^2({\rm P}_0)$, $L^2(\mathbb{R}^d,d{\rm N}_0)$ を $L^2({\rm N}_0)$ で表す.

定義 2.5. (**Nelson** ハミルトニアン)$L^2({\rm P}_0)$ 上の Nelson ハミルトニアンを

$$L=L_{\rm p}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_{\rm f}+\tilde{H}_{\rm I}$$

で定義する.

もちろん, H と L はユニタリー同値である. 以降 $\tilde{H}_{\rm I}$ を簡単に $H_{\rm I}$ と書くことにする.

§ 2.3. Feynman-Kac 型汎関数積分表示

e^{-tH} の Feynman-Kac 型汎関数積分表示を求めよう. ここではブラウン運動 $(B_t)_{t\geq0}$ による構成と, $H_{\rm p}$ に付随した $P(\phi)_1$ 過程 $(X_t)_{t\geq0}$ による構成を紹介する.

定理 2.6. (ブラウン運動による構成) $F, G \in \mathscr{H}_{\mathrm{N}}$ とする．このとき，

$$(F, e^{-tH}G)_{\mathscr{H}_{\mathrm{N}}} = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[e^{-\int_0^t V(B_s)ds} \left(\mathrm{J}_0 F(B_0), e^{-\phi_{\mathrm{E}}\left(\int_0^t \mathrm{j}_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s)ds\right)} \mathrm{J}_t G(B_t) \right) \right].$$

ここで $F, G \in \mathscr{H}_{\mathrm{N}}$ は $L^2(\mathscr{Q}_{\mathrm{E}})$ 値 L^2 関数とみなされている．

証明: $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ と仮定する．トロッタ積公式と $e^{-|t-s|H_{\mathrm{f}}} = \mathrm{J}_t^* \mathrm{J}_s$ から

$$\begin{aligned}(F, e^{-tH}G) &= \lim_{n\to\infty} (F, (e^{-(t/n)H_{\mathrm{p}}} e^{-(t/n)H_{\mathrm{I}}} e^{-(t/n)H_{\mathrm{f}}})^n G) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[e^{-\sum_{j=0}^n \frac{t}{n} V(B_{\frac{tj}{n}})} \left(\mathrm{J}_0 F(B_0), e^{-\sum_{j=0}^n \frac{t}{n} \phi_{\mathrm{E}}(\mathrm{j}_{\frac{tj}{n}} \tilde{\varphi}(\cdot - B_{\frac{tj}{n}}))} \mathrm{J}_t G(B_t) \right) \right].\end{aligned}$$

$s \mapsto \mathrm{j}_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s)$ は $\mathbb{R} \to L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{d+1})$ の写像として殆ど至るところ強連続であることを注意しておく．その結果，$s \mapsto \phi_{\mathrm{E}}(\mathrm{j}_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s))$ も写像 $\mathbb{R} \to L^2(\mathscr{Q}_E)$ として強連続になる．よって定理 が従う．V が Kato 分解できるときは簡単な極限操作によって証明できる． □

定理 2.7. ($P(\phi)_1$ 過程による構成) $F, G \in L^2(\mathrm{P}_0)$ とする．このとき，

$$(F, e^{-tL}G)_{L^2(\mathrm{P}_0)} = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[\left(\mathrm{J}_0 F(X_0), e^{-\phi_{\mathrm{E}}\left(\int_0^t \mathrm{j}_s \tilde{\varphi}(\cdot - X_s)ds\right)} \mathrm{J}_t G(X_t) \right) \right].$$

証明: 証明は定理 2.6 と同じである． □

定理 2.6, 2.7 の Feynman-Kac 型汎関数積分表示は目的にあわせて使い分けられる．例えば Nelson ハミルトニアン の基底状態の存在・非存在の証明には $P(\phi)_1$ 過程を用いた表示を使い，基底状態の空間的指数減衰性の評価にはブラウン運動を用いた表示が有用である．

§ 2.4. 赤外発散，紫外発散，基底状態の存在・非存在

量子論では電子は点と考えられるので，電荷の分布を表す $\varphi(x)$ は $\varphi(x) = \delta(x)$ とみなされる．これは

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)} dk = \infty \quad (\hat{\varphi}(k) = (2\pi)^{-d/2})$$

を意味する． これを紫外発散という． 数学的に厳密に H を定義するためには $\hat{\varphi}$ に $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)} dk < \infty$ なる条件を取りあえず仮定する必要がある． その結果 H_{I} が $\mathscr{F}$ 上の作用素として意味をもつ．もう一つの発散が赤外発散である．$\hat{\varphi}(k) = (2\pi)^{-d/2}$ $(|k| < \epsilon)$ としよう．この場合

$$\int_{|k|<\epsilon} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3} dk = \infty \quad (d \le 3)$$

となる．これを赤外発散という．物理的な理解では H の基底状態 Ψ_{g} のボゾン数の期待値は有限，$(\Psi_{\mathrm{g}}, N\Psi_{\mathrm{g}}) < \infty$，で

$$(\Psi_{\mathrm{g}}, N\Psi_{\mathrm{g}}) \approx \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3} dk$$

のように予想され, $\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3}dk=\infty$ のときは H の 基底状態が存在しないと期待されている. 記号

$$I_{\mathrm{IR}}=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3}dk \tag{2.1}$$

を導入する.

定義 2.8. (赤外正則条件と赤外特異条件)$I_{\mathrm{IR}}<\infty$ を赤外正則条件といい, $I_{\mathrm{IR}}=\infty$ を赤外特異条件という.

(1) $\omega(k)=|k|$, $\hat{\varphi}(k)=\mathbb{1}_{\{\kappa<|k|<\Lambda\}}$, $d=3$ とする. κ と Λ は夫々赤外切断パラメター, 紫外切断パラメターといわれる. $\kappa=0$ のとき赤外特異条件をみたし, $\kappa>0$ のとき赤外正則条件をみたす.

(2) $\varphi>0$ かつ $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^d)$ とする. $d\le 3$ のとき $I_{\mathrm{IR}}=\infty$ になる.

(3) $\omega(k)=\sqrt{|k|^2+\nu^2}$, $\hat{\varphi}(k)=g\mathbb{1}_{\{|k|<\Lambda\}}$ のときは赤外正則条件をみたす.

(1),(2) は massless 模型, (3) は massive 模型とよばれる.

§ 2.5. ペアポテンシャル

H の固有ベクトルを解析するために, Feynman-Kac 型汎関数積分表示を使う. H が至る所正な基底状態 Ψ_{g} を一意的にもつと仮定する. このとき

$$\|e^{-T(H-E)}F\|^{-1}e^{-T(H-E)}F\to\Psi_{\mathrm{g}}(T\to\infty).$$

ここで $F\in\mathscr{H}_{\mathrm{N}}$ は $F>0$ なるベクトル.

系 2.9. ($(P(\phi)_1$ 過程による真空期待値) $f,g\in L^2(\mathrm{N}_0)$ とする. このとき $T>0$ に対して

$$\left(f\otimes\mathbb{1},e^{-TL}g\otimes\mathbb{1}\right)_{L^2(\mathrm{P}_0)}=\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[\overline{f(X_0)}g(X_T)e^{\frac12\int_0^T ds\int_0^T dtW(X_s-X_t,s-t)}\right].$$

ここで

$$W(x,t)=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)}e^{-ik\cdot x}e^{-\omega(k)|t|}dk. \tag{2.2}$$

証明: $I_T=\int_0^T \mathrm{j}_s\tilde{\varphi}(\cdot-X_s)ds$ とおく. このとき

$$\left(f\otimes\mathbb{1},e^{-TL}g\otimes\mathbb{1}\right)_{L^2(\mathrm{P}_0)}=\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[\overline{f(X_0)}g(X_t)\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\left[e^{-I_T}\right]\right].$$

I_T の分散が

$$\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}[I_T^2]=\int_0^T ds\int_0^T dtW(X_t-X_s,t-s)$$

なので

$$\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\left[e^{-I_T}\right] = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T ds \int_0^T dt W(X_s - X_t, s-t)\right).$$

よって, Fubini の定理から系が従う. □

定義 2.10. (ペアポテンシャル)$W(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)} e^{-ik\cdot x} e^{-\omega(k)|t|} dk$ は Nelson 模型に付随するペアポテンシャルといわれる.

系 2.11. (ブラウン運動による真空期待値) $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき $T>0$ に対して

$$\left(f\otimes \mathbb{1}, e^{-TH} g\otimes\mathbb{1}\right)_{\mathscr{H}_{\mathrm{N}}} = \int dx \mathbb{E}_W^x\left[e^{-\int_0^T V(B_s)ds}\overline{f(B_0)}g(B_T)e^{\frac{1}{2}\int_0^T ds\int_0^T dt W(B_s-B_t, s-t)}\right].$$

証明: 証明は系 2.9 と全く同じである. □

§3. 基底状態の存在

§3.1. 埋蔵固有値の摂動問題

g を結合定数として, $H_g = H_0 + gH_{\mathrm{I}}$ とおこう. Nelson 模型を例に埋蔵固有値について説明する. $V(x) = -1/|x|$ としよう. このとき,

$$(H_{\mathrm{p}}) = \{E_j\}_{j=0}^{\infty} \cup [0,\infty), \quad E_0 \le E_1 \le \cdots < 0,$$

となる. $\sigma(H_{\mathrm{f}}) = \{0\}\cup[\nu,\infty)$, $\sigma_{\mathrm{p}}(H_{\mathrm{f}}) = \{0\}$ であるから, 非結合ハミルトニアン $H_{\mathrm{p}} + H_{\mathrm{f}}$ のスペクトルは

$$\sigma(H_{\mathrm{p}} + H_{\mathrm{f}}) = [E_0+\nu, \infty) \cup \{E_j\}_{j=0}^{\infty}$$

となる. $0<\nu$ が十分小さければ図 1 のように点スペクトル $\{E_j\}_{j=0}^{\infty}$ の一部は連続スペクトルに埋め込まれ, 埋蔵固有値になる. $\nu>0$ とすれば E_0 は多重度 1 の離散固有値である. E_0 の摂動について考えよう.

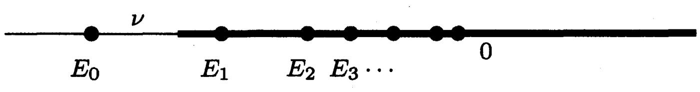

Figure 1. H_g $(\nu>0)$

定義 3.1. (解析族)R を $\mathbb{C}$ の開集合とする. $\{H_g, g\in R\}$ は閉作用素の族 (自己共役作用素とは限らない) で $\rho(H_g) \ne \emptyset$ とする. 次の (1), (2) をみたすとき $\{H_g, g\in R\}$ を A 型の解析族という. (1) ある稠密な $\mathcal{D}$ が存在して $D(H_g) = \mathcal{D}$, $g\in R$, をみたす. (2) $H_g u$, $u\in\mathcal{D}$, が g について強解析的である

命題 3.2. H_g を $g=0$ の近傍で A 型の解析族とする. E を 多重度 m の H_0 の離散固有値とする. このとき H_g の離散固有値 $E^{(1)}(g),...,E^{(r)}(g)$ で次をみたすものが存在する. (1) $E=E^{(k)}(0)$, $k=1,...,r$. (2) $E^{(1)}(g),...,E^{(r)}(g)$ の多重度の和は m. (3) 各 $E^{(r)}(g)$ に対してある $p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ が存在して $E^{(r)}(g)$ は $g^{1/p}$ の解析関数. (4) H_g が $g\in\mathbb{R}$ で自己共役作用素ならば $E^{(r)}(g)$ は g の解析関数.

$\nu>0$ のとき, 命題 3.2 より $|g|\ll 1$ で $E_0(g)$ は離散固有値であり g について解析的であることがわかる. 特に $E_0(g)$ は H の基底状態である. しかし $\nu=0$ のときは様相が一変する. このときは図 2 のように E_0 が埋蔵固有値になる. そのため $|g|\ll 1$ でも $E_0(g)$ が固有値として存在するのかどうかすぐにはわからない. また g に関する微分可能性も一般にはよくわからない. これが埋蔵固有値の摂動問題である.

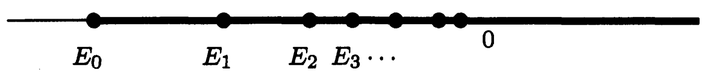

Figure 2. H_g $(\nu=0)$

§3.2. 存在

この章では H の基底状態の存在を $P(\phi)_1$ 過程による Feynman-Kac 型汎関数積分表示を応用して示す. 基底状態が存在すればその一意性はすぐに分かる.

系 3.3. (一意性) H が基底状態をもつと仮定する. このとき基底状態は一意的である.

証明: 恒等的にゼロではない $F\geq 0$, $G\geq 0$ に対して Feynman-Kac 型汎関数積分表示と J_t の正値保存性から $(F, e^{-tL}G)>0$ が正値改良型作用素であることが分かる. よって Perron-Frobenius 定理から題意が従う. □

$\Sigma_{\rm p}$ を $H_{\rm p}$ の本質的スペクトルの下限とする.

定理 3.4. (基底状態の存在) 赤外正則条件 $I_{\rm IR}<\infty$ を仮定し,

$$\Sigma_{\rm p}-E_{\rm p}>\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)^2}\frac{|k|^2}{2\omega(k)+|k|^2}dk \tag{3.1}$$

とする. このとき H の基底状態が存在する.

この定理 の証明の最大のポイントはパスに一様な評価

$$\int_{-\infty}^0 ds\int_0^\infty |W(X_s-X_t,s-t)|dt\leq\frac{1}{2}I_{\rm IR}<\infty \tag{3.2}$$

が成立することである.

補題 3.5. $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ は連続で $f(x) > 0$ としよう．このとき

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\left(f\otimes 1\!\!1, e^{-(T+t)H} f\otimes 1\!\!1\right)}{\left(f\otimes 1\!\!1, e^{-TH} f\otimes 1\!\!1\right)} = e^{-tE}.$$

証明: もし Q が $\mathbb{R}$ 上の測度で $\inf \mathrm{supp}(\mathrm{Q}) = \mathrm{E}(\mathrm{Q})$ ならば,

$$E(Q) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln\left(\int e^{-Tx} Q(dx)\right),$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\int e^{-(T+t)x} Q(dx)}{\int e^{-Tx} Q(dx)} = e^{-tE(Q)}$$

が成り立つ．H の $f\otimes 1\!\!1$ に関するスペクトル測度を $\mu_{f\otimes 1}$ とする．スペクトル測度 $\mu_{f\otimes 1}$ に応用すると $\inf \mathrm{supp}(\mu_{\mathrm{f}\otimes 1}) = \mathrm{E}(\mu_{\mathrm{f}\otimes 1}) = \mathrm{E}$ を示せばいい．

$$\mathscr{G} = \left\{ F \in \mathscr{H}_{\mathrm{N}} \,\middle|\, \mathrm{suppF} \subset \bigcup_{\mathrm{N,M}>0} \mathrm{B_N}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}) \times \mathrm{B_M}(\mathscr{Q}) \right\}$$

とする．ここで $B_N(\mathbb{R}^d)$ と $B_M(\mathscr{Q})$ は $\mathbb{R}^d$ と $\mathscr{Q}$ の原点を中心にした半径 N と M のボールを表す．$\mathscr{G}$ は $\mathscr{H}_{\mathrm{N}}$ で稠密．$g \in \mathscr{G}$ とする．e^{-tH} は正値保存作用素なので

$$\left(g, e^{-TH} g\right) \le \left(|g|, e^{-TH}|g|\right) \le C^2 \left(f\otimes 1\!\!1, e^{-TH} f\otimes 1\!\!1\right).$$

ここで $C = \frac{\text{ess sup}_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^d\times\mathscr{Q}} |g(x,\xi)|}{\text{ess inf}_{(x,\xi)\in\mathrm{supp}|g|} f(x)}$．これから $E(\mu_{f\otimes 1}) \le E(\mu_g)$ が全ての $g \in \mathscr{G}$ でわかる．$\mathscr{G}$ は $D(H)$ の稠密な部分空間なので $E(\mu_{f\otimes 1}) \ge E = \inf\{E(\mu_g) | g \in \mathscr{G}\} \ge E(\mu_{f\otimes 1})$. よって $E = E(\mu_{f\otimes 1})$. □

φ_{p} を H_{p} の正規化された正の基底状態として

$$\Psi_{\mathrm{g}}^T = \frac{e^{-TH}(\varphi_{\mathrm{p}} \otimes 1\!\!1)}{\|e^{-TH}(\varphi_{\mathrm{p}} \otimes 1\!\!1)\|}$$

とする．$\|\Psi_{\mathrm{g}}^T\| = 1$ なので, Ψ_{g}^T は部分列 $\Psi_{\mathrm{g}}^{T'}$ で $\Psi_{\mathrm{g}}^{T'}$ があるベクトル $\Psi_{\mathrm{g}}^{\infty}$ に弱収束するものが存在する．T' を改めて T と書くことにする．心の中では Ψ_{g}^T が基底状態の近似列だと思っている．

$$\gamma(T) = (\varphi_{\mathrm{p}} \otimes 1\!\!1, \Psi_{\mathrm{g}}^T)^2 = \frac{(\varphi_{\mathrm{p}} \otimes 1\!\!1, e^{-TH}\varphi_{\mathrm{p}} \otimes 1\!\!1)^2}{(\varphi_{\mathrm{p}} \otimes 1\!\!1, e^{-2TH}\varphi_{\mathrm{p}} \otimes 1\!\!1)},$$

とおく．次の命題は基底状態の存在・非存在を示すときに有用なものである．

命題 3.6. (基底状態の存在・非存在の必要十分条件) $\lim_{T\to\infty} \gamma(T) = a$ とする．$a > 0$ ならば H の基底状態は存在し, $a = 0$ なら基底状態は存在しない．

証明: $\inf\sigma(H)=0$ と仮定する. $a=0$ とする. 基底状態 $\Psi_{\rm g}$ が存在すると仮定する. そうすると強収束の意味で $\lim_{T\to\infty} e^{-TH}=\mathbb{1}_{\{0\}}(H)$ となる. $\Psi_{\rm g}$ は正なので, $a=(\varphi_{\rm p}\otimes\mathbb{1},\Psi_{\rm g})>0$ となるから, $a=0$ に矛盾する. よって基底状態は存在しない.

次に $a>0$ と仮定する. このとき十分大きな全ての N に対して $\epsilon\le\sqrt{\gamma(T)}$ が成り立つ. H のスペクトル測度 dE を用いれば $\sqrt{\gamma(T)}$ は以下のように評価できる.

$$\sqrt{\gamma(T)}=\frac{\int_0^\infty e^{-T\lambda}dE}{(\int_0^\infty e^{-2T\lambda}dE)^{1/2}}\le\frac{\int_0^\delta e^{-T\lambda}dE+\int_\delta^\infty e^{-T\lambda}dE}{(\int_0^\delta e^{-2T\lambda}dE)^{1/2}}.$$

分子の左辺に Schwartz の不等式, 右辺は被積分関数最大値をとれば

$$\sqrt{\gamma(T)}\le\frac{(\int_0^\delta e^{-2T\lambda}dE)^{1/2}(E([0,\delta])^{1/2}+e^{-T\delta}}{(\int_0^\delta e^{-2T\lambda}dE)^{1/2}}=(E([0,\delta])^{1/2}+\frac{1}{(\int_0^\delta e^{-2T(\lambda-\delta)}dE)^{1/2}}.$$

ここで, 両辺で $T\to\infty$ とすれば, 右辺の第 2 項が消えるから, $\sqrt{\epsilon}\le(E([0,\delta])^{1/2}$. さらに $\delta\downarrow 0$ とすれば

$$\sqrt{\epsilon}\le E(\{0\})^{1/2}.$$

よって $\{0\}$ は重みを持つから基底状態が存在する. □

系 3.7. $\Psi_{\rm g}^\infty\ne 0$ は H が基底状態をもつための必要十分条件である.

証明: $\Psi_{\rm g}^T$ は非負なので, 弱収束の極限 $\Psi_{\rm g}^\infty$ も非負. その結果, もし $\Psi_{\rm g}^\infty\not\equiv 0$ ならば $\lim_{T\to\infty}\gamma(T)=(\mathbb{1},\Psi_{\rm g}^\infty)^2>0$. よって 命題 3.6 から系が従う. □

定理 *3.4* の証明: $\varphi_{\rm p}\otimes\mathbb{1}$ を簡単に $\varphi_{\rm p}$ とかこう. 系 3.7 から $\Psi_{\rm g}^T$ の弱極限が非ゼロであることをいえばいい.

$$S_{[a,b]}=\frac{1}{2}\int_a^b ds\int_a^b W(X_s-X_t,s-t)dt \tag{3.3}$$

とする. $f(T,t)=\left(\Psi_{\rm g}^T,(e^{-tH_{\rm p}}\otimes P_0)\Psi_{\rm g}^T\right)$ とおく. ここで P_0 は $\mathbb{1}\in L^2(\mathscr{Q})$ への射影である. 次が成立することを示す:

$$\liminf_{T\to\infty} f(T,t)\ge\exp\left(-t\left(E+\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat\varphi(k)|^2}{2\omega(k)^2}dk\right)-\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat\varphi(k)|^2(1+e^{-t\omega(k)})}{2\omega(k)^3}dk\right). \tag{3.4}$$

これを示すために次のように書き換える:

$$f(T,t)=\frac{(\varphi_{\rm p},e^{-TH}(e^{-tH_{\rm p}}\otimes P_0)e^{-TH}\varphi_{\rm p})}{(\varphi_{\rm p},e^{-(2T+t)H}\varphi_{\rm p})}\frac{(\varphi_{\rm p},e^{-(2T+t)H}\varphi_{\rm p})}{(\varphi_{\rm p},e^{-2TH}\varphi_{\rm p})}.$$

第 2 項の比は e^{-Et} に収束する (Lemma3.5). 第 1 項の比を $g(T,t)$ とおく. これを $P(\phi)_1$ 過程で汎関数積分表示する. 分母は $\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,T+t]}\right]e^{-(2T+t)E_{\rm p}}$. ここで $(X_t)_{t\ge 0}$ のシフト不変性をつかった. 分子は $h_T(x)=\left(\mathbb{1},e^{-TH}\varphi_{\rm p}\right)_{L^2(\mathscr{Q})}(x)$ とすれば

$$(\varphi_{\rm p},e^{-TH}(e^{-tH_{\rm p}}\otimes P_0)e^{-TH}\varphi_{\rm p})=(h_T,e^{-tH_{\rm p}}h_T)_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

に注意する．また

$$\int_{\mathbb{R}^d} h_T(x)f(x)\varphi_{\rm p}(x)dx = (f\varphi_{\rm p}, e^{-TH}\varphi_{\rm p})$$
$$= \mathbb{E}_{\P_0}\left[f(X_0)e^{-\int_0^T {\rm j}_s\tilde{\varphi}(\cdot - X_s)ds}\right]e^{-TE_{\rm p}} = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[f(X_0)\mathbb{E}_{\mu_{\rm E}}\left[e^{-\int_0^t {\rm j}_s\tilde{\varphi}(\cdot - X_s)ds}\right]\right]e^{-TE_{\rm p}}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[0,T]}\right]e^{-TE_{\rm p}}\varphi_{\rm p}(x)^2dx.$$

これから $h_T(x) = \varphi_{\rm p}(x)F(x)e^{-TE_{\rm p}}$．ここで $F(x) = \mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[0,T]}\right]$．よって

$$(h_T, e^{-tH_{\rm p}}h_T)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (F, e^{-tL_{\rm p}}F)_{L^2({\rm N}_0)}e^{-(2T+t)E_{\rm p}} = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}[F(X_0)F(X_t)]e^{-(2T+t)E_{\rm p}}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[0,T]}\right]\mathbb{E}^{X_t}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[0,T]}\right]\right]e^{-(2T+t)E_{\rm p}}d{\rm N}_0.$$

鏡映対称性により

$$(h_T, e^{-tH_{\rm p}}h_T) = \int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,0]}\right]\mathbb{E}^{X_t}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[0,T]}\right]\right]e^{-(2T+t)E_{\rm p}}d{\rm N}_0$$

またマルコフ性により

$$(h_T, e^{-tH_{\rm p}}h_T) = \int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,0]}\right]\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[t,T+t]}\middle|\sigma(X_t)\right]\right]e^{-(2T+t)E_{\rm p}}d{\rm N}_0.$$

さらに X_{-t}, $t \geq 0$, と X_s, $s \geq 0$, の独立性から

$$(h_T, e^{-tH_{\rm p}}h_T) = \int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,0]+S[t,T+t]}\right]e^{-(2T+t)E_{\rm p}}d{\rm N}_0$$
$$= \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,0]+S[t,T+t]}\right]e^{-(2T+t)E_{\rm p}}.$$

最後に

$$g(T,t) = \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,0]+S[t,T+t]}\right]}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,T+t]}\right]} = \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S_\Delta + S[-T,T+t]}\right]}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,T+t]}\right]}.$$

ここで

$$S_\Delta = S[-T,0] + S[t,T+t] - S[-T,T+t].$$

図 3.2 からわかるように S_Δ は $A \sim F$ の領域の積分に分けられる．夫々

$$A+B = 2\int_{-T}^0\int_0^T, \quad C = \int_0^t\int_0^t, \quad D+E = 2\int_0^t\int_t^{T+t}, \quad F = \int_T^{T+t}\int_{-T}^0$$

となるから，$T \to \infty$ にすれば F の積分は消えて，パスに関する一様評価から

$$|S_\Delta| \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)}dk\left(2\int_{-\infty}^0\int_0^\infty + 2\int_0^t\int_t^\infty + \int_0^t\int_0^t\right)e^{-\omega(k)|t-s|}dsdt$$
$$\leq t\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)^2}dk + \int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2(1+2e^{-t\omega(k)})}{2\omega(k)^3}dk$$

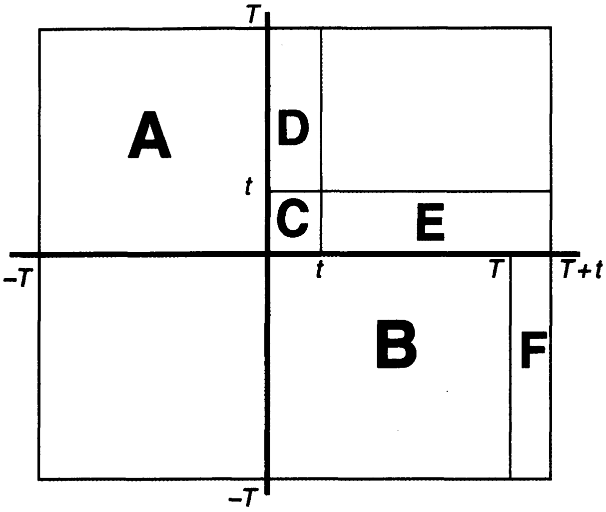

Figure 3. S_Δ の積分領域

となる. $g(T,t)$ の分母と分子を比べて

$$g(T,t) \geq \exp\left(-t\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)^2}dk - \int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2(1+2e^{-t\omega(k)})}{2\omega(k)^3}dk\right).$$

これで (3.4) が示せて, $\liminf_{T\to\infty}\|e^{-tH_\mathrm{p}/2}\otimes P_0\Psi_\mathrm{g}^T\|$ が非ゼロであることがわかった. あともう一息. Ψ_g^T がゼロに収束しないことをいうために $e^{-tH_\mathrm{p}/2}\otimes P_0$ をコンパクト作用素におきかえればいい. $\mathbb{1}_{[a,b]}(H_\mathrm{p})$ は H_p のスペクトル射影. Σ_p の定義から H_p は $\Sigma_\mathrm{p}-\delta$ 以下では離散固有値しか持たないので $\mathbb{1}_{[E_\mathrm{p},\Sigma_\mathrm{p}-\delta]}(H_\mathrm{p})\otimes P_0$ は有限ランク作用素になる. よって

$$(\mathbb{1}_{[E_\mathrm{p},\Sigma_\mathrm{p}-\delta]}(H_\mathrm{p})\otimes P_0)\Psi_\mathrm{g}^T \to (\mathbb{1}_{[E_\mathrm{p},\Sigma_\mathrm{p}-\delta]}(H_\mathrm{p})\otimes P_0)\Psi_\mathrm{g}^\infty$$

が強収束する. 一方 $e^{-tH_\mathrm{p}}\mathbb{1}_{(\Sigma_\mathrm{p}-\delta,\infty)}(H_\mathrm{p})$ のノルムは有界で $e^{-tH_\mathrm{p}}\mathbb{1}_{(\Sigma_\mathrm{p}-\delta,\infty)} \leq e^{-t(\Sigma_\mathrm{p}-\delta)}$. その結果

$$\begin{aligned}&\left(\Psi_\mathrm{g}^\infty, (e^{-tH_\mathrm{p}}\mathbb{1}_{[E_\mathrm{p},\Sigma_\mathrm{p}-\delta]}(H_\mathrm{p})\otimes P_0)\Psi_\mathrm{g}^\infty\right)\\ &= \lim_{T\to\infty}\left\{\left(\Psi_\mathrm{g}^T, (e^{-tH_\mathrm{p}}\otimes P_0)\Psi_\mathrm{g}^T\right) - \left(\Psi_\mathrm{g}^T, (e^{-tH_\mathrm{p}}\mathbb{1}_{(\Sigma_\mathrm{p}-\delta,\infty)}(H_\mathrm{p})\otimes P_0)\Psi_\mathrm{g}^T\right)\right\}\end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned}\left(\Psi_\mathrm{g}^\infty, (e^{-tH_\mathrm{p}}\mathbb{1}_{[E_\mathrm{p},\Sigma_\mathrm{p}-\delta]}(H_\mathrm{p})\otimes P_0)\Psi_\mathrm{g}^\infty\right) &\geq e^{-t(E+C)-C(t)} - e^{-t(\Sigma_\mathrm{p}-\delta)}\\ &= e^{-t(E+C)}\left(e^{-C(t)} - e^{-t(\Sigma_\mathrm{p}-\delta-E-C)}\right).\end{aligned}$$

ここで $C=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)^2}dk$, $C(t)=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2(1+e^{-t\omega(k)})}{2\omega(k)^3}dk$. δ を十分小さくして t を十分大きくすれば,

$$E < \Sigma_\mathrm{p} - \int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)^2}dk \tag{3.5}$$

のとき $\Psi_{\rm g}^{\infty}$ が非ゼロであることがわかる．最後に (3.5) を $E_{\rm p}$ を含む形に変える．これは不等式

$$E \le E_{\rm p} - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)(\omega(k)+|k|^2/2)} dk \tag{3.6}$$

から得られる．この不等式は Lemma 3.8 で示す．(3.6) と (3.5) から証明が完了する． □

補題 3.8. *(3.5) が成り立つ.*

証明: $P_{\rm f} = d\Gamma(k)$ は $\mathscr{F}$ の運動量作用素で $\psi_f = e^{ix\otimes P_{\rm f}}\varphi_{\rm p}(x) \otimes e^{-i\Pi(f)}\Omega$ と定義する．ここで $\Pi(f) = i(a^*(f) - a(\bar{f}))$, そして f はあとで決める．直接計算して

(3.7)

$$\begin{aligned} E &\le (\psi_f, H\psi_f) \\ &= E_{\rm p} + \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} k|f(k)|^2 dk\right)^2 + \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \left(\omega(k) + \frac{1}{2}|k|^2\right)|f(k)|^2 + \frac{\hat{\varphi}(k)(\overline{f(k)} + f(k))}{\sqrt{2\omega(k)}} \right\} dk. \end{aligned}$$

f は $f(-k) = f(k)$ とする．このとき (3.7) の右辺第 2 項は $\left(\int k|f(k)|^2 dk\right)^2 = 0$, そして最後の項は $\int_{\mathbb{R}^d} \left(\omega(k) + \frac{1}{2}|k|^2\right)\left(|f(k) + \Phi(k)|^2 - \Phi^2(k)\right) dk$. ここで

$$\Phi(k) = -\frac{\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{2\omega(k)}(\omega(k)+|k|^2/2)},$$

$f(k) = \Phi(k)$ とおけば (3.5) をえる． □

系 3.9. $\omega(k) = |k|$ とし, $\hat{\varphi}(k) = g\mathbb{1}_{\{\kappa<|k|<\Lambda\}}$ で $g \in \mathbb{R}$ と仮定する．さらに赤外正則条件 $I_{\rm IR} < \infty$ を仮定し $\sigma(H_{\rm p})$ は離散固有値だけからなるとする．このとき任意の $0 < \kappa < \Lambda$ と $g \in \mathbb{R}$ に対して, H は一意的な基底状態をもつ.

証明: $\Sigma_{\rm p} - E_{\rm p} = \infty$ なので定理 3.4 から系が従う． □

References

[HHL14] M. Hirokawa, F. Hiroshima and J. Lorinczi, Spin-boson model through a Poisson-driven stochastic process, *Math. Zeitschrift* **277** (2014),1165-1198.

[Hir07] F. Hiroshima, Fiber Hamiltonians in nonrelativistic quantum electrodynamics, *J. Funct. Anal.* **252** (2007), 314-355.

[Hir19] 廣島文生 Path integrations of relativistic Schrödinger operators and Bernstein functions, RIMS 講究録 1658 非可換解析とミクロ・マクロ双対性 (2009), 18–34.

[Hir10] 廣島文生 Feynman-Kac type formulas for Schrödinger semigroup with Bernstein functions of Laplacian, RIMS 講究録 1696, スペクトル散乱理論とその周辺 (2010), 119–143.

[Hir14] F. Hiroshima, Functional integral approach to semi-relativistic Pauli-Fierz models, *Adv. in Math.* **259** (2014), 784-840.

[HIL12] F. Hiroshima, T. Ichinose and J. Lőrinczi, Path integral representation for Schrödinger operators with Bernstein functions of the Laplacian, *Rev. Math. Phys.* **24** (2012), 1250013 (40 pages)

[HIL13] F. Hiroshima, T. Ichinose and J. Lőrinczi, Probabilistic representation and fall-off of bound states of relativistic Schrödinger operators with Spin 1/2, *Publ RIMS Kyoto* **49** (2013), 189–214.

[HL08] F. Hiroshima and J. Lőrinczi, Functional integral representations of the Pauli-Fierz model with spin 1/2, *J. Funct. Anal.* **254** (2008), 2127-2185.

[LHB11] J. Lőrinczi, F. Hiroshima and V. Betz, *Feynman-Kac type theorems and Gibbs measures on path space*, Studies in Mathematics **34**, DeGruyter 2011.

[Nel64] E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 1190–1197.