数理解析研究所講究録
第1961巻 2015年 1-11

B 型コクセター群に付随するフォック空間

Marek Bożejko, Wiktor Ejsmont, 長谷部高広 *

概要

B 型コクセター群の全フォック空間への作用を定義し，そこから現れる2つのパラメータによって全フォック空間を変形する．それに伴って変形された生成・消滅作用素とその交換関係を定義・計算し，さらに場の作用素を調べる．特に真空ベクトルに関する場の作用素の確率分布は q-マイクスナー・ポラチェック多項式に対応する．本稿は論文 [BEH] の日本語による解説となっており，証明の詳細については省略することが多い．

1 研究に至るまで: 対称群によるフォック空間の q 変形

本稿で現れるヒルベルト空間の無限直和は全て代数的直和とし，内積の入った完備でないノルム空間と考える．

H を可分なヒルベルト空間とする．内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は右線形とする．まず全フォック空間

$$\mathcal{F}(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\otimes n}, \qquad H^{\otimes 0} = \mathbb{C}\Omega \tag{1.1}$$

を導入する．ここで Ω はノルム1のベクトルであり，真空ベクトルと言う．ボソンフォック空間 $\mathcal{F}_B(H)$ とフェルミオンフォック空間 $\mathcal{F}_F(H)$ は全フォック空間の部分空間と見ることができる．すなわち互換 $\pi_i = (i, i+1), i = 1, \ldots, n-1$ に対して $H^{\otimes n}$ 上の作用素を同じ記号 π_i を用いて

$$\pi_i(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i+1} \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_n, \tag{1.2}$$

と定義し，これを拡張して対称群 S_n の $H^{\otimes n}$ への左作用を定義すれば，

$$\mathcal{F}_B(H) = \{f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(H) \mid \forall n \in \mathbb{N}, \forall \sigma \in S_n, \sigma(f_n) = f_n\}, \tag{1.3}$$

$$\mathcal{F}_F(H) = \{f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(H) \mid \forall n \in \mathbb{N}, \forall \sigma \in S_n, \sigma(f_n) = \mathrm{sign}(\sigma) f_n\}, \tag{1.4}$$

と表すことができる．パラメータ $q \in [-1,1]$ を用いたこれらの3つのフォック空間の補間が統計力学の文脈で議論された [FB70] が，具体的な物理現象への応用の有無については筆者は知らない．本稿では述べないが q が絶対値1の複素数の時にもフォック空間が構成されていて [BLW12]，こちらは統計力学においてエニオンと呼ばれる粒子 (あるいは場) と関係している．

*Email アドレス: thasebe@math.sci.hokudai.ac.jp 所属: 〒060-0810 札幌市北区北10西8, 北海道大学大学院理学研究院数学部門

パラメータ $q \in [-1,1]$ による変形として q-フォック空間を初めて数学的に定義したのは Bożejko と Speicher [BS91] であり, その後は物理学よりも作用素環論, 作用素空間論の文脈で多くの研究がある [B97, BKS97, BS94, GS14, N04, R05, S04]. q 変形のアイデアは全フォック空間の内積を変形するというものである. まず全フォック空間上の (変形前の) 内積を以下で定義する:

$$\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_m, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n \rangle = \delta_{m,n} \prod_{i=1}^{n} \langle x_i, y_i \rangle. \tag{1.5}$$

次に (右側) 生成作用素を

$$r^*(x)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes x, \qquad n \geq 1, \tag{1.6}$$

$$r^*(x)\Omega = x \tag{1.7}$$

と定義する. 左側生成作用素を用いるのが慣例だが, 右側にするメリットがある. それは後述の (2.12) が成り立ち, (2.7) がより見やすくなることである. 消滅作用素 $r(x)$ は内積に関する $r^*(x)$ の共役とする. すなわち

$$r(x)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) := \overline{\langle x_n, x \rangle}\, x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1}, \qquad n \geq 2, \tag{1.8}$$

$$r(x)x_1 := \overline{\langle x_1, x \rangle}\, \Omega, \tag{1.9}$$

$$r(x)\Omega = 0. \tag{1.10}$$

生成・消滅作用素は有界作用素であり, $\|r(x)\| = \|r^*(x)\| = \|x\|$ となることが容易に確かめられる. また $r^* : H \to \mathbb{B}(\mathcal{F}(H))$ は線形, $r : H \to \mathbb{B}(\mathcal{F}(H))$ は反線形になっている.

全フォック空間の内積を変形するため, **q-対称化作用素** $P_q^{(n)} : H^{\otimes n} \to H^{\otimes n}$ を定義する:

$$P_q^{(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} q^{\ell(\sigma)}\, \sigma, \qquad n \geq 1, \tag{1.11}$$

$$P_q^{(0)} = I. \tag{1.12}$$

ここで $\ell(\sigma)$ は対称群上の**長さ関数**である. すなわち σ を互換 $\pi_i = (i, i+1)$ $(1 \leq i \leq n-1)$ の積として表すとき, その表示は一意ではないが, 現れる互換の個数が最小になるように表示したとき, その個数を $\ell(\sigma)$ と定義する. そして全フォック空間上の q-対称化作用素

$$P_q = \bigoplus_{n=0}^{\infty} P_q^{(n)} \tag{1.13}$$

を定義する. このときボソンフォック空間 $= \mathrm{Ran}(P_1)$, 全フォック空間 $= \mathrm{Ran}(P_0)$, フェルミオンフォック空間 $= \mathrm{Ran}(P_{-1})$ である.

Bożejko と Speicher の結果 [BS94, Theorem 2.1] から, $q \in [-1,1]$ のとき $P_q^{(n)} \geq 0$ であり, 特に $q \in (-1,1)$ なら $P_q^{(n)} > 0$ (スペクトルが 0 を含まない) である. そこで新しい内積を

$$\langle f, g \rangle_q = \langle f, P_q g \rangle, \qquad f, g \in \mathcal{F}(H) \tag{1.14}$$

と定義する. この内積を考えた全フォック空間を **q-フォック空間**という. 生成作用素を $a_q^*(x) = r^*(x)$, 消滅作用素 $a_q(x)$ を内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$ に関する $a_q^*(x)$ の共役と定義すると, これらは $q \neq 1$ のとき有界作用素になり, 以下の **q-交換関係**が成り立つ:

$$a_q(x)a_q^*(y) - q a_q^*(y) a_q(x) = \langle x, y \rangle I. \tag{1.15}$$

これは CCR, CAR の片方の関係式を拡張したものになっている.

2 (α, q)-フォック空間, 生成・消滅作用素

2.1 定義

q-フォック空間は対称群の全フォック空間への作用をうまく利用して定義した. 対称群は A 型のコクセター群であるから, 次に B 型コクセター群を考えてみよう. 以下では B 型コクセター群の全フォック空間への作用を定義し, それを用いてフォック空間の変形を定義する. まず基本的な概念の準備をする. $2n$ 個の整数の集合 $\{\pm 1, \dots, \pm n\}$ 上の全単射 σ で $\sigma(-k) = -\sigma(k), 1 \le k \le n$ を満たすもの全体を B **型コクセター群**といい, $\Sigma(n)$ と表す. B 型コクセター群 $\Sigma(n)$ は n 個の互換 $\pi_0 = (1, -1), \pi_i = (i, i+1)$, $i = 1, \dots, n-1$ で生成され, 自然に対称群 S_n を部分群として含んでいる.

まず $\Sigma(n)$ の $H^{\otimes n}$ への作用を定義したい. そのためには π_0 の作用を定義する必要がある. そのためにヒルベルト空間 H は自己共役な対合を持つと仮定する. これは恒等写像でも良い. あるいは H が正規直交基底 $(e_i)_{i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ で張られている (有限次元ならば $(e_i)_{i \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}}$ で張られている) ならば, H 上の対合を

$$\overline{e_i} := e_{-i}, \qquad i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

と定義することもできる.

H 上の自己共役な対合 $^-$ に対して,

$$\pi_0(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \overline{x_1} \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n, \qquad n \ge 1 \tag{2.1}$$

と定義する. (1.2) と (2.1) によって $\Sigma(n)$ の $H^{\otimes n}$ への作用が定義される.

次に q-フォック空間の場合のように内積の変形を導入したい. そこで $\Sigma(n)$ の元 σ を

$$\sigma = \pi_{i_1} \cdots \pi_{i_k}, \qquad 0 \le i_1, \dots, i_k \le n-1, \tag{2.2}$$

と表す. このような表示は一通りではないが, このような表示をした時の k が最小になるようにしておく. このとき

$$l_1(\sigma) = (2.2) \text{ の右辺に現れる } \pi_0 \text{ の個数}, \tag{2.3}$$

$$l_2(\sigma) = (2.2) \text{ の右辺に現れる } \pi_i, 1 \le i \le n-1 \text{ の個数} \tag{2.4}$$

と定義する. また k, つまり $l_1(\sigma) + l_2(\sigma)$ のことを σ の**長さ**と言う. $\alpha, q \in [-1, 1]$ に対して $H^{\otimes n}$ 上の (α, q)-**対称化作用素**を

$$\begin{aligned} P_{\alpha,q}^{(n)} &= \sum_{\sigma \in \Sigma(n)} \alpha^{l_1(\sigma)} q^{l_2(\sigma)} \sigma, \qquad n \ge 1, \\ P_{\alpha,q}^{(0)} &= I_{H^{\otimes 0}} \end{aligned} \tag{2.5}$$

と定義する. ここで $0^0 = 1$ という記法を採用しておくと, $P_{0,0}^{(n)} = I_{H^{\otimes n}}$ となる. さらに

$$P_{\alpha,q} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} P_{\alpha,q}^{(n)}$$

を全フォック空間上の (α, q)-対称化作用素という.

q-フォック空間の場合と同様に Bożejko, Speicher の定理 [BS94, Theorem 2.1] が使えて, $P_{\alpha,q} \geq 0$ となる. また $|\alpha|, |q| < 1$ ならば $P_{\alpha,q}^{(n)}$ のスペクトルの下限は 0 より大きい.

$\alpha, q \in [-1,1]$ に対して以下のように (半) 内積の変形を定義する:

$$\langle f, g\rangle_{\alpha,q} := \langle f, P_{\alpha,q} g\rangle, \qquad f, g \in \mathcal{F}(H). \tag{2.6}$$

これは少なくとも $q = \pm 1$ の場合には退化している. また $\alpha, q \in (-1,1)$ の場合には非退化である. 退化の問題を避けるために, 以下では主に $\alpha, q \in (-1,1)$ の場合について考えるが, 多くの結果は極限を取ることによって $|\alpha| = 1$ または $|q| = 1$ の場合にも成り立つ.

定義 2.1. $\alpha, q \in (-1,1), x \in H$ とする. 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\alpha,q}$ を備えた全フォック空間 $\mathcal{F}(H)$ を (α,q)-フォック空間という. $b_{\alpha,q}^*(x) := r^*(x)$ を (α,q)-生成作用素といい, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\alpha,q}$ に関する $b_{\alpha,q}^*(x)$ の共役 $b_{\alpha,q}(x)$ を (α,q)-消滅作用素という.

注意 2.2. *[B12]* において定義されている (q,t)-フォック空間と本稿の (α,q)-フォック空間は似ているが, 異なるものである.

以上で定義した (α,q)-対称化作用素, (α,q)-フォック空間, (α,q)-生成・消滅作用素などは $\alpha = 0$ のときには全て q の場合と同じものになる. 次節以降で述べる様々な結果のうちほとんどのものが $\alpha = 0$ の場合には q-フォック空間に関する既知の結果になる. 従って, B 型コクセター群を考えることによって, A 型コクセター群の場合を一般化したと言うことができる.

2.2 生成・消滅作用素の性質

消滅作用素をどのように計算すればよいのかを知りたい. そのために重要になるのが自然な埋め込み $\Sigma(n-1) = \langle\pi_0, \dots, \pi_{n-2}\rangle \subset \Sigma(n) = \langle\pi_0, \dots, \pi_{n-1}\rangle$ に対応する $P_{\alpha,q}^{(n)}$ の分解である.

命題 2.3. 次の分解が $H^{\otimes n}$ 上で成り立つ:

$$P_{\alpha,q}^{(n)} = (P_{\alpha,q}^{(n-1)} \otimes I) R_{\alpha,q}^{(n)}, \qquad n \geq 1. \tag{2.7}$$

ここで

$$R_{\alpha,q}^{(n)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} q^k \pi_{n-1} \cdots \pi_{n-k} + \alpha q^{n-1} \pi_{n-1}\pi_{n-2} \cdots \pi_1 \pi_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} q^k \pi_1 \cdots \pi_k\right). \tag{2.8}$$

証明. 次のことが知られている *[Hum90, Section 1.10, Proposition]:* $\Sigma(n-1)\backslash\Sigma(n)$ の各右コセットの代表元で最小の長さを持つものがただ 1 つ存在する. *Stumbo [S00]* の計算によって, $w(k)$ を $\pi_{n-1} \cdots \pi_1 \pi_0 \pi_1 \cdots \pi_{n-1}$ の左から k 番目までの文字列とすると *(*ただし $w(0) = e$*)*, $\{w(k) \mid 0 \leq k \leq 2n-1\}$ がその代表元の集合になる. よって $\Sigma(n) = \cup_{k=0}^{2n-1} \Sigma(n-1) w(k)$ とコセット分解され, したがって任意の $\sigma \in \Sigma(n)$ は $\sigma = \sigma' w(k)$, $\sigma' \in \Sigma(n-1)$, $0 \leq k \leq 2n-1$ と一意的に表示され, $l_i(\sigma) = l_i(\sigma') + l_i(w(k)), i = 1,2$ が成り立つ. (2.8) は

$$R_{\alpha,q}^{(n)} = \sum_{k=0}^{2n-1} \alpha^{l_1(w(k))} q^{l_2(w(k))} w(k) \tag{2.9}$$

と表されるから, 等式 (2.7) が成り立つ. ■

命題2.3によって消滅作用素を計算することができる.

命題 2.4. $n \geq 1$ に対して次の等式が $H^{\otimes n}$ 上で成り立つ:

$$b_{\alpha,q}(x) = r(x) R^{(n)}_{\alpha,q}. \tag{2.10}$$

証明. $f \in H^{\otimes(n-1)}, g \in H^{\otimes n}$ とすると

$$\begin{aligned} \langle f, b_{\alpha,q}(x) g\rangle_{\alpha,q} &= \langle b^*_{\alpha,q}(x) f, g\rangle_{\alpha,q} = \langle r^*(x) f, g\rangle_{\alpha,q} = \langle r^*(x) f, P^{(n)}_{\alpha,q} g\rangle \\ &= \langle r^*(x) f, (P^{(n-1)}_{\alpha,q} \otimes I) R^{(n)}_{\alpha,q} g\rangle = \langle f, r(x)(P^{(n-1)}_{\alpha,q} \otimes I) R^{(n)}_{\alpha,q} g\rangle. \end{aligned} \tag{2.11}$$

ここで

$$r(x)(P^{(n-1)}_{\alpha,q} \otimes I) h = P^{(n-1)}_{\alpha,q} r(x) h, \qquad h \in H^{\otimes n} \tag{2.12}$$

が成り立つことに注意すると,

$$\begin{aligned} \langle f, r(x)(P^{(n-1)}_{\alpha,q} \otimes I) R^{(n)}_{\alpha,q} g\rangle &= \langle f, P^{(n-1)}_{\alpha,q} r(x) R^{(n)}_{\alpha,q} g\rangle \\ &= \langle f, r(x) R^{(n)}_{\alpha,q} g\rangle_{\alpha,q}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

■

定理 2.5. N を個数作用素とする, つまり

$$N(f) = nf, \qquad f \in H^{\otimes n}.$$

このとき

$$b_{\alpha,q}(x) = r_q(x) + \alpha \ell_q(\bar{x}) q^{N-1}, \qquad x \in H,$$

ここで

$$r_q(x)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{k=1}^{n} q^{n-k} \overline{\langle x_k, x\rangle}\, x_1 \otimes \cdots \otimes \check{x}_k \otimes \cdots \otimes x_n, \tag{2.14}$$

$$\ell_q(x)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \langle x, x_k\rangle\, x_1 \otimes \cdots \otimes \check{x}_k \otimes \cdots \otimes x_n. \tag{2.15}$$

証明. 命題 *2.3, 2.4* を用いて計算すれば良い. ■

次に交換関係を計算する.

命題 2.6. 以下の交換関係が成り立つ:

$$b_{\alpha,q}(x) b^*_{\alpha,q}(y) - q b^*_{\alpha,q}(y) b_{\alpha,q}(x) = \langle x, y\rangle I + \alpha \langle x, \bar{y}\rangle\, q^{2N}. \tag{2.16}$$

証明. 定理 *2.5* を用いて計算すれば良い. 詳細は省略する. ■

注意 2.7. (1) $\alpha = 0, q = 1$ とする. この場合は (2.16) は *CCR* の一方の交換関係になる. もう一方の交換関係

$$b_{0,1}(x) b_{0,1}(y) - b_{0,1}(y) b_{0,1}(x) = 0 \tag{2.17}$$

は $\mathcal{F}(H)$ 上では成り立たず, 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{0,1}$ の退化した部分空間で $\mathcal{F}(H)$ を割ってボソンフォック空間に縮めたときに現れる. 同様に $\alpha = 0, q = -1$ の場合にはやはり内積の

退化した部分空間 (=$P_{0,-1}$ の核) で $\mathcal{F}(H)$ を割ってフェルミオンフォック空間に縮めたときに CAR のもう一方の関係

$$b_{0,-1}(x)b_{0,-1}(y)+b_{0,-1}(y)b_{0,-1}(x)=0 \tag{2.18}$$

が現れる. $\alpha,q\in(-1,1)$ の場合には内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\alpha,q}$ は非退化だから全フォック空間を割ることができず, おそらく (2.17),(2.18) の代わりになるような関係式は存在しないだろう. ただし $q=\pm1$, $\alpha\in[-1,1]$ の場合に $P_{\alpha,q}^{(n)}$ の核が具体的にどのように書けるか, まだ分かっていない. 多少計算すると $\mathrm{Ker}(P_{\alpha,1})\supset\mathcal{F}_f(H)$, $\mathrm{Ker}(P_{\alpha,-1})\supset\mathcal{F}_b(H)$ が成り立つことは分かる. $q=\pm1$, $\alpha\in[-1,1]$ の場合にはこれらの核で $\mathcal{F}(H)$ を割った空間上で何か新しい交換関係が得られるかもしれない.

(2) *[B12]* において類似の交換関係

$$a_{q,t}(x)a_{q,t}^*(y)-qa_{q,t}^*(y)a_{q,t}(x)=\langle x,y\rangle t^N \tag{2.19}$$

が現れている.

生成・消滅作用素は有界作用素であるから, そのノルムの値が気になるところである. 生成・消滅作用素のノルムに関して次の結果が成り立つが, 証明は省略する.

定理 2.8. $x\in H, x\neq0$ とする.

(1) $-1<q\le0$, $\alpha\langle x,\bar{x}\rangle\ge0$ ならば

$$\|b_{\alpha,q}^*(x)\|_{\alpha,q}=\sqrt{\|x\|^2+\alpha\langle x,\bar{x}\rangle}. \tag{2.20}$$

(2) $-1<q\le0$, $\alpha\langle x,\bar{x}\rangle<0$ ならば

$$\frac{\|x\|}{\sqrt{1-q}}\le\|b_{\alpha,q}^*(x)\|_{\alpha,q}\le\|x\|. \tag{2.21}$$

(3) $|\alpha|\le q<1$ ならば

$$\|b_{\alpha,q}^*(x)\|_{\alpha,q}=\frac{\|x\|}{\sqrt{1-q}}. \tag{2.22}$$

(4) $0<q<\alpha\langle x,\bar{x}\rangle/\|x\|^2$ ならば

$$\frac{\|x\|}{\sqrt{1-q}}<\|b_{\alpha,q}^*(x)\|_{\alpha,q}\le\sqrt{\frac{1+|\alpha|}{1-q}}\|x\|. \tag{2.23}$$

(5) それ以外の場合は

$$\frac{\|x\|}{\sqrt{1-q}}\le\|b_{\alpha,q}^*(x)\|_{\alpha,q}\le\sqrt{\frac{1+|\alpha|}{1-q}}\|x\|. \tag{2.24}$$

3 場の作用素

3.1 場の作用素と q-マイクスナー・ポラチェック直交多項式

$\mathcal{F}(H)$ 上の作用素

$$\phi_{\alpha,q}(x) = b_{\alpha,q}(x) + b^*_{\alpha,q}(x), \qquad x \in H \tag{3.1}$$

を**場の作用素**という．以下ではこの $\phi_{\alpha,q}(x)$ について調べていく．

まず直交多項式について簡単にまとめておく．$\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ が全ての次数のモーメントを持つとする．このとき $L^2(\mathbb{R},\mu)$ の点列 $(1,t,t^2,t^3,\dots)$ をグラム-シュミットの方法で直交化し，多項式列 $(P_0(t),P_1(t),P_2(t),\dots)$, $\deg P_n(t)=n$ を得る．ここで $P_n(t)$ の t^n の係数は 1 になるようにしておく．このときある実数 $\beta_n,\gamma_n, n=1,2,3,\dots$ が存在して，三項間漸化式

$$tP_n(t) = P_{n+1}(t) + \beta_n P_n(t) + \gamma_{n-1}P_{n-1}(t), \qquad n=0,1,2,\dots \tag{3.2}$$

が成り立つ．ここで $P_{-1}(t)=0$ とする．係数 β_n,γ_n は**ヤコビパラメータ**といい，$\gamma_n \ge 0$ である．実際，$\gamma_0\cdots\gamma_n = \int_{\mathbb{R}} |P_{n+1}(t)|^2\mu(dt)$, $n\ge 0$ が成り立つことが知られている．

定理 3.1. $\alpha,q\in(-1,1)$, $x\in H$, $\|x\| = \langle x,\bar{x}\rangle = 1$ とする．$\mu_{\alpha,q}$ を $\phi_{\alpha,q}(x)$ の真空ベクトルに関する確率分布とする，すなわち

$$\langle \Omega, \phi_{\alpha,q}(x)^n\Omega\rangle_{\alpha,q} = \int_{\mathbb{R}} t^n\,\mu_{\alpha,q}(\mathrm{d}t), \qquad n=0,1,2,3\dots \tag{3.3}$$

を満たすとする．さらに $(P_n^{(\alpha,q)}(t))_{n=0}^{\infty}$ を $\mu_{\alpha,q}$ に付随する直交多項式とする．このとき三項間漸化式は

$$tP_n^{(\alpha,q)}(t) = P_{n+1}^{(\alpha,q)}(t) + [n]_q(1+\alpha q^{n-1})P_{n-1}^{(\alpha,q)}(t), \qquad n=0,1,2,\dots \tag{3.4}$$

となる．ただし $P_{-1}^{(\alpha,q)}(t)=0, P_0^{(\alpha,q)}(t)=1$ とする．この直交多項式を **q-マイクスナー・ポラチェック多項式**という．確率測度 $\mu_{\alpha,q}$ は $(-2/\sqrt{1-q}, 2/\sqrt{1-q})$ に台を持ちルベーグ測度に関して絶対連続であり，以下の確率密度関数を持つ．

$$\frac{d\mu_{\alpha,q}}{dt}(t) = \frac{(q;q)_\infty(\beta^2;q)_\infty}{2\pi\sqrt{4/(1-q)-t^2}}\cdot\frac{g(t,1;q)g(t,-1;q)g(t,\sqrt{q};q)g(t,-\sqrt{q};q)}{g(t,\mathrm{i}\beta;q)g(t,-\mathrm{i}\beta;q)}. \tag{3.5}$$

ここで

$$g(t,b;q) = \prod_{k=0}^{\infty}(1-4bt(1-q)^{-1/2}q^k + b^2q^{2k}),$$
$$(s;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-sq^k), \qquad s\in\mathbb{R},$$
$$\beta = \begin{cases} \mathrm{i}\sqrt{\alpha}, & \alpha\ge 0,\\ \sqrt{-\alpha}, & \alpha<0.\end{cases}$$

証明 (概略). P_n を三項間漸化式 (3.4) で定まる多項式, μ を確率密度関数 (3.5) を持つ確率測度とする. このとき μ に付随する直交多項式は P_n であることが *[KLS10]* に載っている. ただし $\alpha > 0$ の場合は *[KLS10]* で取り扱われていないので, 別に議論が必要になる. そこで $\gamma_n := [n+1]_q(1+\alpha q^n)$ と置く. まず命題 *2.3* を使って直接ノルムの計算をして $\|x\|^2_{\alpha,q} = \gamma_0 \cdots \gamma_{n-1}$ が分かる. このことから $(\mathcal{F}(H), \|\cdot\|_{\alpha,q})$ の部分空間 $\mathrm{span}\{x^{\otimes n} \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ から $(L^2(\mathbb{R},\mu), \|\cdot\|_{L^2})$ への写像 $x^{\otimes n} \mapsto P_n(t)$ が等長であることが分かる. さらに命題 *2.4* を用いると

$$
\begin{aligned}
\phi_{\alpha,q}(x)x^{\otimes n} &= b^*_{\alpha,q}(x)x^{\otimes n} + b_{\alpha,q}(x)x^{\otimes n} \\
&= x^{\otimes(n+1)} + r(x)R^{(n)}_{\alpha,q}x^{\otimes n} \\
&= x^{\otimes(n+1)} + [n]_q x^{\otimes(n-1)} + \alpha q^{n-1}[n]_q \langle x, \bar{x}\rangle\, x^{\otimes(n-1)} \\
&= x^{\otimes(n+1)} + [n]_q(1-\beta^2 q^{n-1})x^{\otimes(n-1)}
\end{aligned}
$$

となる. このことと帰納法を用いて $\langle \Omega, \phi_{\alpha,q}(x)^n \Omega\rangle_{\alpha,q} = \int_{\mathbb{R}} t^n\, \mu(\mathrm{d}t), n \in \mathbb{N}$ が分かる. μ はコンパクト台を持つのでモーメント問題は決定的であるから $\mu_{\alpha,q} = \mu$ となり, よって $P_n = P^{(\alpha,q)}_n$ である. ■

以下では (弱) 連続性を用いて $\mu_{\alpha,q}$ のパラメータの範囲をを $\alpha, q \in [-1,1]$ まで拡張しておく.

例 3.2. (1) $\mu_{\alpha,1}$ は正規分布 $\frac{1}{\sqrt{2(1+\alpha)\pi}}e^{-\frac{t^2}{2(1+\alpha)}}1_{\mathbb{R}}(t)\,\mathrm{d}t$ である. 直交多項式 $P^{(0,1)}_n(t)$ はエルミート多項式である.

(2) $\mu_{0,0}$ は標準ウィグナーの半円則 $(1/2\pi)\sqrt{4-t^2}1_{(-2,2)}(t)\,\mathrm{d}t$ である. 直交多項式 $P^{(0,0)}_n(t)$ は第二種チェビシェフ多項式である.

(3) $\mu_{\alpha,-1}$ はベルヌーイ分布 $(1/2)(\delta_{\sqrt{1+\alpha}} + \delta_{-\sqrt{1+\alpha}})$ である.

(4) $\mu_{\alpha,0}$ は自由マイクスナー分布 *(ケステン分布)* である.

(5) $\mu_{-1,1} = \delta_0$ となるが, $(\alpha, q) = (-1, 1)$ の近傍においてうまくスケーリングを取ることで非自明な確率測度を取り出すことができる. $\alpha = -q^{2\tau}$, $\tau \in [0,\infty)$ と置くと (3.4) は

$$tQ^{(\tau,q)}_n(t) = Q^{(\tau,q)}_{n+1}(t) + \frac{1}{4}[n]_q[n+2\tau-1]_q Q^{(\tau,q)}_{n-1}(t), \tag{3.6}$$

$$Q^{(\tau,q)}_n(t) = \frac{P^{(\alpha,q)}_n(\lambda t)}{\lambda^n}, \qquad \lambda = 2\sqrt{1-q} \tag{3.7}$$

となる. さらに極限 $q \uparrow 1$ を取れば

$$tQ^{(\tau)}_n(t) = Q^{(\tau)}_{n+1}(t) + \frac{1}{4}n(n+2\tau-1)Q^{(\tau)}_{n-1}(t), \tag{3.8}$$

となり, これはマイクスナー・ポラチェック多項式の三項間漸化式となる. 対応する確率測度は *(対称)* マイクスナー分布と呼ばれ,

$$\frac{4^\tau}{2\pi\Gamma(2\tau)}|\Gamma(\tau + \mathrm{i}t)|^2\, 1_{\mathbb{R}}(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.9}$$

である.

3.2 集合の分割と n 点相関関数

ここでは場の作用素の n 点相関関数を計算する．計算結果を記述するために集合の分割を用いる．$[n]$ によって集合 $\{1,\dots,n\}$ を表すことにする．$P_i, i=1,\dots,k$ を集合 $[n]$ の空でない部分集合で，互いに共通部分をもたず，かつ $\cup_{i=1}^k P_i=[n]$ を満たすものとする．このとき $\pi=\{P_1,\dots,P_k\}$ を集合 $[n]$ の**分割**と言う．集合 $[n]$ の分割 π に対して π の元のことを**ブロック**と言う．また π の**対**(または**対ブロック**)とは π のブロック P で $|P|=2$ となるものである．π の**シングルトン**とは π のブロック P で $|P|=1$ となるものである．

n が偶数のとき，$[n]$ の分割 π の全てのブロックが対であるとき π を**対分割**といい，対分割全体の集合を $\mathcal{P}_2(n)$ を表す．

$\varepsilon=(\varepsilon(1),\dots,\varepsilon(n))\in\{1,*\}^n$ に対して $\mathcal{P}_{1,2;\varepsilon}(n)$ を分割 $\pi\in\mathcal{P}_{1,2}(n)$ で以下を満たすもの全体とする: π を

$$\pi=\{\{a_1,b_1\},\dots,\{a_k,b_k\},\{c_1\},\dots,\{c_m\}\},\qquad k,m\in\mathbb{N}\cup\{0\}, a_i<b_i, i\in[k],$$

と表したとき，$\varepsilon(a_i)=*$，$\varepsilon(b_i)=1$，$1\le i\le k$ となり，かつ $\varepsilon(c_i)=*$，$1\le i\le m$ となる．

さらに $\mathcal{P}_{2;\varepsilon}(n):=\mathcal{P}_{1,2;\varepsilon}(n)\cap\mathcal{P}_2(n)$ と定義する．

集合の分割に関わる量をいくつか導入する．$\mathrm{Pair}(\pi)$ によって分割 π の対全体の集合を表し，$\mathrm{Sing}(\pi)$ によってシングルトン全体の集合を表す．$\mathrm{Cr}(\pi)$ によって π の**交差数**を表す，つまり

$$\mathrm{Cr}(\pi)=\#\{\{V,W\}\subset\pi \mid \text{ある } i,j\in V,k,l\in W \text{ が存在して } i<k<j<l\}.$$

π のブロック V,W に対して，W が V を**覆う**とは，ある $i,j\in W$ が存在して $i<k<j$ が任意の $k\in V$ に対して成り立つことをいう．π のブロック V に対して V を覆う π のブロックの個数を $\mathrm{Cov}(V)$ と表す．また $\mathrm{SL}(V)$ によって V より左側にある π のシングルトンの個数を表す．より正確には $\mathrm{Cov}(V;\pi),\mathrm{SL}(V;\pi)$ などと書くべきであるが簡単のため π を省略する．さらにシングルトンとそれを覆っているブロックの組の個数

$$\mathrm{CS}(\pi)=\#\{(V,W)\in\pi\times\pi \mid V \text{ はシングルトン}, W \text{ は } V \text{ を覆う}\}$$

を定義する．

記号として，$x_1,\dots x_n\in H, V\subset[n]$ のとき，V を $V=\{v_1,\dots,v_m\}$，$v_1<\dots<v_m$ と表して

$$x_V:=x_{v_1}\otimes\cdots\otimes x_{v_m}$$

と定義する．もし $V=\emptyset$ ならば $x_V:=\Omega$ と定義する．

以下では $H_\mathbb{R}$ を実ヒルベルト空間とし，H は $H_\mathbb{R}$ の複素化とする．$H_\mathbb{R}$ の元に対しては $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$ が成り立つ．

定理 3.3. $x_1,\dots,x_n\in H_\mathbb{R}, \varepsilon=(\varepsilon(1),\dots,\varepsilon(n))\in\{1,*\}^n$ とする．このとき

$$\begin{aligned}&b_{\alpha,q}^{\varepsilon(n)}(x_n)\cdots b_{\alpha,q}^{\varepsilon(1)}(x_1)\Omega\\&=\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{1,2;\varepsilon}(n)}q^{\mathrm{Cr}(\pi)+\mathrm{CS}(\pi)}\left(\prod_{\{i,j\}\in\mathrm{Pair}(\pi)}\left(\langle x_i,x_j\rangle+\alpha q^{2\mathrm{Cov}(\{i,j\})+2\mathrm{SL}(\{i,j\})}\langle x_i,\overline{x_j}\rangle\right)\right)x_{\mathrm{Sing}(\pi)}.\end{aligned}$$

証明は n に関する帰納法による.

定理 3.3 によって場の作用素の n 点相関関数は次のように計算される.

系 3.4. $x_1, \dots, x_n \in H_{\mathbb{R}}$ に対して

$$\begin{aligned}&\langle \Omega, \phi_{\alpha,q}(x_1)\cdots\phi_{\alpha,q}(x_n)\Omega\rangle_{\alpha,q}\\&= \begin{cases}\sum_{\pi\in\mathcal{P}_2(n)} q^{\mathrm{Cr}(\pi)} \prod_{\{i,j\}\in\pi}\left(\langle x_i, x_j\rangle + \alpha q^{2\mathrm{Cov}(\{i,j\})}\langle x_i, \overline{x_j}\rangle\right), & n\in 2\mathbb{N},\\ 0, & n \in 2\mathbb{N}-1.\end{cases}\end{aligned}$$

特に $\alpha = 0$ の場合は q-フォック空間の場合に知られている公式が得られる:

$$\langle \Omega, \phi_{0,q}(x_1)\cdots\phi_{0,q}(x_n)\Omega\rangle_{0,q} = \begin{cases}\sum_{\pi\in\mathcal{P}_2(n)} q^{\mathrm{Cr}(\pi)} \prod_{\{i,j\}\in\pi}\langle x_i, x_j\rangle, & n\in 2\mathbb{N},\\ 0, & n \in 2\mathbb{N}-1.\end{cases}$$

3.3 真空ベクトルのトレース性

最後に真空ベクトルのトレース性について調べる. $\alpha, q \in (-1,1)$ とする. このとき $\mathcal{F}(H)$ を内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\alpha,q}$ に関して完備化したヒルベルト空間を $\mathcal{F}_{\alpha,q}(H)$ と表し, $\mathfrak{A}_{\alpha,q} \subset \mathbb{B}(\mathcal{F}_{\alpha,q}(H))$ を $\{\phi_{\alpha,q}(x) \mid x \in H_{\mathbb{R}}\}$ によって生成されるフォンノイマン環とする. q-フォック空間の場合は真空ベクトルが正規かつ忠実なトレースになることが知られているが, 実は q-フォック空間以外の場合にはトレースにならないことが分かる.

命題 3.5. $\alpha, q \in (-1,1)$ とする. このとき真空ベクトル Ω によって定まる状態が $\mathfrak{A}_{\alpha,q}$ 上のトレースになるための必要十分条件は $\alpha = 0$ である.

証明 (概略). $\alpha = 0$ の場合は真空状態がトレースになることが *[BS94, Theorem 4.4]* で示されている. $\alpha \neq 0$ の場合は 4 点相関関数を計算することによって真空状態がトレースでないことを示すことができる. ■

$\mathfrak{A}_{0,q}$ は II_1 型因子環であり単射的でないことが分かっている [BKS97, R05, N04]. 特に $\alpha = q = 0$ の場合は $\dim(H_{\mathbb{R}})$ 個の生成元から成る自由群因子環 $L(\mathbb{F}_{\dim(H_{\mathbb{R}})})$ に同型である [VDN92]. さらに $H_{\mathbb{R}}$ が有限次元ならば, $\dim(H_{\mathbb{R}})$ に依存した正の数 q_0 が存在して $|q| < q_0$ ならば $\mathfrak{A}_{0,q}$ は自由群因子環 $L(\mathbb{F}_{\dim(H_{\mathbb{R}})})$ に同型であることが分かっている [GS14]. $\alpha \in (-1,1)\setminus\{0\}, q \in (-1,1)$ の場合にフォンノイマン環 $\mathfrak{A}_{\alpha,q}$ が何型になるか, そして因子環になるかどうかはまだ分かっていない.

参考文献

[B97] P. Biane, Free Hypercontractivity, Comm. Math. Phys. 184 (1997), 457–474.

[B12] N. Blitvić, The (q,t)-Gaussian process, J. Funct. Anal. 263 (2012), No. 10, 3270–3305.

[BEH] M. Bożejko, W. Ejsmont and T. Hasebe, Fock space associated to Coxeter group of type B. arXiv:1411.7997

[BKS97] M. Bożejko, B. Kümmerer and R. Speicher, q-Gaussian processes: non-commutative and classical aspects, Comm. Math. Phys. 185, No. 1 (1997), 129–154.

[BLW12] M. Bożejko, E. Lytvynov and J. Wysoczański, Noncommutative Lévy processes for generalized (particularly anyon) statistics, Comm. Math. Phys. 313, Issue 2 (2012), 535–569.

[BS91] M. Bożejko and R. Speicher, An example of a generalized Brownian motion, Comm. Math. Phys. 137 (1991), 519–531.

[BS94] M. Bożejko and R. Speicher, Completely positive maps on Coxeter groups, deformed commutation relations, and operator spaces, Math. Ann. 300 (1994), 97–120.

[FB70] U. Frisch and R. Bourret, Parastochastics, J. Math. Phys. 11, No. 2 (1970), 364–390.

[GS14] A. Guionnet and D. Shlyakhtenko, Free monotone transport, Invent. Math. 196 (2014), 613–661.

[Hum90] J.E. Humphreys, Reflection Groups and Coxeter Groups, Cambridge studies in advances math. 29, Cambridge University Press, 1990.

[KLS10] R. Koekoek, P.A. Lesky and R.F. Swarttouw, *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[N04] A. Nou, Non injectivity of the q-deformed von Neumann algebra, Math. Ann. 330 (2004), 17–38.

[R05] É. Ricard, Factoriality of q-Gaussian von Neumann Algebras, Comm. Math. Phys. 257 (2005),659–665.

[S04] P. Śniady, Factoriality of Bożejko-Speicher von Neumann algebras, Comm. Math. Phys. 246 (2004), 561–567.

[S00] F. Stumbo, Minimal length coset representatives for quotients of parabolic subgroups in Coxeter groups, Bul. Un. Math. Ital. Serie 8, 3-B (2000), No. 3, 699–715.

[VDN92] D.V. Voiculescu, K.J. Dykema and A. Nica, *Free random variables*, CRM Monograph Series, 1. AMS, Providence, RI, 1992. vi+70 pp.