数理解析研究所講究録
第 1963 巻 2015 年 170-177

バナッハ空間における firmly nonexpansive-like 写像に対する不動点近似

(Fixed point approximation for firmly nonexpansive-like mappings in Banach spaces)

大分大学工学部 高阪 史明 (Kohsaka, Fumiaki)*
Department of Computer Science and Intelligent Systems,
Oita University

概要

2-一様凸定数を用いた firmly nonexpansive like 写像列の共通不動点近似定理とその応用について解説する.

1 はじめに

本稿では, 2-一様凸定数を用いた firmly nonexpansive like 写像列の共通不動点近似定理と極大単調作用素の零点近似問題への応用について解説する. この成果は, バナッハ空間における距離射影を用いた木村と中條 [15] の射影法に動機付けられ, 文献 [4] において得られたものである. 本研究により, 以下の問題 1.4 に対する部分的ではあるが肯定的な解答が得られたことになる.

Firmly nonexpansive like 写像 [3–5, 7] は, 最初に文献 [7] で P 型の写像として導入されたものであり, ヒルベルト空間における firmly nonexpansive 写像の一般化の一つとして知られる (定義は (2.1) で与える). バナッハ空間における閉凸集合の上への距離射影や極大単調作用素のレゾルベントはその典型例であり, 次の不動点定理が成り立つ.

定理 1.1 (青山-高阪-高橋 [7]). 滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間の空でない有界閉凸集合上の任意の firmly nonexpansive like 写像は不動点を持つ.

---

* 大分大学工学部知能情報システム工学科; 〒870-1192 大分市旦野原 700; f-kohsaka@oita-u.ac.jp

この定理の系として, Browder の非拡大写像の不動点定理が得られる.

系 1.2 (Browder の不動点定理 [11]). ヒルベルト空間の空でない有界閉凸集合上の任意の nonexpansive 写像は不動点を持つ.

Firmly nonexpansive 写像について復習するために, この系を証明する.

証明. T をヒルベルト空間 X の空でない閉凸集合 C 上の nonexpansive 写像とする. つまり, $\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$ $(\forall x, y \in C)$ が成り立つとする. ここで, I を C 上の恒等写像とし, $S = (I + T)/2$ と置く. C は凸であるので, S は C 上の写像である. 明らかに, T と S の不動点集合 $\mathrm{F}(T)$ と $\mathrm{F}(S)$ は一致する. よく知られているように, S は firmly nonexpansive 写像となる. つまり, $\|Sx - Sy\|^2 \le \langle Sx - Sy, x - y\rangle$ $(\forall x, y \in C)$ が成り立つ. 実際, T の nonexpansive 性と $T = 2S - I$ より, 任意の $x, y \in C$ について

$$
\begin{aligned}
0 &\le \|x-y\|^2 - \|Tx - Ty\|^2 \\
&= \|x-y\|^2 - \|2(Sx - Sy) - (x-y)\|^2 = 4\left(\langle Sx - Sy, x - y\rangle - \|Sx - Sy\|^2\right)
\end{aligned}
$$

となるので, S は firmly nonexpansive である. C はヒルベルト空間の空でない閉凸集合であるから, 定理 1.1 より, S は不動点を持つ. よって, $\mathrm{F}(T) = \mathrm{F}(S)$ より結論を得る. □

平面上の回転変換を考えれば分かるように, nonexpansive 写像 T について, 点列 $\{T^n x\}$ が収束するとは限らない. しかし, T が firmly nonexpansive であれば, この点列は T の不動点に弱収束する.

定理 1.3 (Martinet の収束定理 [16]). C をヒルベルト空間 X の空でない有界閉凸集合とし, T を C 上の firmly nonexpansive 写像とするとき, 任意の $x \in C$ について $\{T^n x\}$ は T の不動点の一つに弱収束する.

文献 [3, 5] では, 逐次的に定まる閉凸集合列への射影を利用した firmly nonexpansive like 写像の不動点近似定理が得られたが, 次の問題に対する解答は得られていなかった.

問題 1.4. 定理 1.3 を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間における firmly nonexpansive like 写像に対して一般化することができるか.

最近になり, 木村と中條 [15] は, p-一様凸バナッハ空間における閉凸集合族の共通点近似定理を得た. 彼らの成果は, Bregman [10] や Crombez [13] によるヒルベルト空間における収束定理を, バナッハ空間における距離射影を用いて一般化するものであった.

2 準備

本稿で取り扱うバナッハ空間は全て実バナッハ空間である．バナッハ空間 X の双対空間を X^* で表す．X や X^* のノルムを $\|\cdot\|$ で表す．汎関数 $x^* \in X^*$ の点 $x \in X$ における値 $x^*(x)$ を $\langle x, x^* \rangle$ で表す．また，正の整数全体の集合を $\mathbb{N}$ で表す．Proper な，つまり，少なくとも一点で実数に値をとる関数 $f\colon X \to (-\infty, \infty]$ について，$\operatorname{argmin}_{y \in X} f(y)$ や $\operatorname{argmin}_X f$ により，f の最小点全体の集合を表す．この集合が点 p だけからなる一点集合 $\{p\}$ の場合，$\operatorname{argmin}_X f$ で点 p を表すことがある．

C を滑らかなバナッハ空間 X の空でない部分集合とする．ここで，X が滑らかであるとは，任意の $x \in X$ について $\langle x, Jx \rangle = \|x\|^2$ と $\|x\| = \|Jx\|$ を満たす X^* の要素 Jx が一意的に存在することをいう．このようにして定まる写像 $J\colon X \to X^*$ を X から X^* への双対写像という．特に，X がヒルベルト空間であれば，J は X 上の恒等写像 I と一致する．C から X への写像 T が firmly nonexpansive like であるとは，

$$\langle Tx - Ty, J(x - Tx) - J(y - Ty) \rangle \geq 0 \quad (\forall x, y \in C) \tag{2.1}$$

が成り立つことをいう．特に，X がヒルベルト空間であるとき，これは T が firmly nonexpansive であることと同値である．また，$u \in C$ が写像 T の不動点であるとは $Tu = u$ が成り立つことをいい，T の不動点全体の集合を $\mathrm{F}(T)$ で表す．

バナッハ空間 X の単位球面と閉単位球をそれぞれ S_X と B_X で表す．X が狭義凸であるとは，任意の相異なる $x, y \in S_X$ について，$\|x + y\| < 2$ が成り立つことをいう．X の凸性の modulus $\delta_X\colon [0,2] \to [0,1]$ は

$$\delta_X(\varepsilon) = \left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in B_X,\ \|x - y\| \geq \varepsilon \right\} \quad \bigl(\forall \varepsilon \in [0,2]\bigr)$$

により定まる．X が一様凸であるとは，$\delta_X(\varepsilon) > 0$ $(\forall \varepsilon \in (0,2])$ が成り立つことをいう．また，X が 2-一様凸であるとは，ある定数 $c > 0$ が存在して $\delta_X(\varepsilon) \geq c\varepsilon^2$ $\bigl(\forall \varepsilon \in [0,2]\bigr)$ が成り立つことをいう．さらに，X が一様に滑らかであるとは，X が滑らかで，双対写像 J が X の任意の空でない有界集合上でノルムの意味で一様連続となることをいう．例えば，L^p $(1 < p \leq 2)$ やヒルベルト空間は一様に滑らかな 2-一様凸バナッハ空間である．バナッハ空間の幾何学については，文献 [9, 12, 18] を参照すると良い．次の補題が成り立つ．

補題 2.1 ([8, 9, 19])**.** バナッハ空間 X が 2-一様凸であることは，ある $\mu \geq 1$ が存在して

$$\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2} \geq \|x\|^2 + \left\|\mu^{-1} y\right\|^2 \quad (\forall x, y \in X) \tag{2.2}$$

が成り立つことと同値である.

X を 2-一様凸バナッハ空間とするとき, (2.2) を満たす最小の $\mu \geq 1$ を X の 2-一様凸定数 [8] とよび, これを μ_X で表す. X がヒルベルト空間ならば, 明らかに $\mu_X = 1$ となる. 次が成り立つ.

補題 2.2 ([4]). X を滑らかな 2-一様凸バナッハ空間とし,

$$\phi(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2 \quad (\forall x, y \in X) \tag{2.3}$$

とするとき, $(\|x-y\|/\mu_X)^2 \leq \phi(x,y)$ が任意の $x, y \in X$ について成り立つ.

滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間 X からその空でない閉凸集合 D の上への距離射影 P_D と generalized projection Π_D [1, 14] は, それぞれ

$$P_D(x) = \operatorname*{argmin}_{y \in D} \|y - x\|, \quad \Pi_D(x) = \operatorname*{argmin}_{y \in D} \phi(y, x) \quad (\forall x \in X)$$

により定まる. ここで, ϕ は (2.3) で定まる二変数関数である. 滑らかなバナッハ空間 X からその双対空間 X^* への双対写像 J が点列的に弱連続であるとは, X の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に弱収束するとき, $\{Jx_n\}$ が Jx に汎弱収束することをいう.

X を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とするとき, 次が成り立つ (*cf.* [7]).

- X からその空でない閉凸集合 D の上への距離射影 $P_D \colon X \to X$ は firmly nonexpansive like であり, $\mathrm{F}(P_D) = D$ が成り立つ.
- Proper で下半連続な凸関数 $f \colon X \to (-\infty, \infty]$ について,

  $$\mathrm{Prx}_f(x) = \operatorname*{argmin}_{y \in X} \left\{ f(y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2 \right\} \quad (\forall x \in X)$$

  により定まる f の近接写像 $\mathrm{Prx}_f \colon X \to X$ は firmly nonexpansive like であり, $\mathrm{F}(\mathrm{Prx}_f) = \operatorname{argmin}_X f$ が成り立つ.
- 極大単調作用素 $A \colon X \to 2^{X^*}$ について, $J_A(x) = (I + J^{-1}A)^{-1}(x)$ $(\forall x \in X)$ により定まる A のレゾルベント $J_A \colon X \to X$ は firmly nonexpansive like であり, $\mathrm{F}(J_A) = A^{-1}(0)$ が成り立つ.

次の基本的な補題が成り立つ.

補題 2.3 ([4]). C を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間 X の空でない閉凸集合とし, T を C から X への firmly nonexpansive like 写像とする. また, $\beta > 0$ とし, $S = J^{-1}\big(J - \beta J(I - T)\big)$ とする. このとき, 次が成り立つ.

(i) $\mathrm{F}(S)=\mathrm{F}(T)$ と $\mathrm{F}(\Pi_C S)=\mathrm{F}(P_C T)$ が成り立つ.

(ii) $\mathrm{F}(T)$ が空でないとき, $\mathrm{F}(P_C T)=\mathrm{F}(T)$ となる.

(iii) X が 2-一様凸で $\mathrm{F}(T)$ が空でないとき,

$$\phi(u,Sx)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{(\mu_X)^2}-\beta\right)\|Sx-x\|^2\leq\phi(u,x)\quad(\forall u\in\mathrm{F}(S),\,x\in C).$$

3 Firmly nonexpansive like 写像に対する不動点近似

本節を通して, X を一様に滑らかな 2-一様凸バナッハ空間とし, C を X の空でない閉凸集合とする.

次は, firmly nonexpansive like 写像列の共通不動点への弱収束定理である.

定理 3.1 ([4]). $\{T_n\}$ を C から X への firmly nonexpansive like 写像の列で条件 (Z) を満たし, $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathrm{F}(T_n)$ が空でないものとする. 点列 $\{x_n\}$ を $x_1\in C$ と

$$x_{n+1}=\Pi_C J^{-1}\big(Jx_n-\beta_n J(x_n-T_nx_n)\big)\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

で定める. ここで, $\{\beta_n\}$ は $0<\inf_n\beta_n$ と $\sup_n\beta_n<2\,(\mu_X)^{-2}$ を満たす実数列とする. このとき, J が点列的に弱連続であれば, $\{x_n\}$ は $\{\Pi_F(x_n)\}$ の強極限に弱収束する.

補足 3.2. $\{T_n\}$ が条件 (Z) を満たすとは, $\|T_nz_n-z_n\|\to 0$ を満たす C の任意の有界点列 $\{z_n\}$ について, その任意の弱収束部分列の極限が $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathrm{F}(T_n)$ に属することをいう.

証明の概略. $U_n=\Pi_C J^{-1}\big(J-\beta_n J(I-T_n)\big)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ によって C 上の写像列 $\{U_n\}$ を定める. このとき, 補題 2.2 と補題 2.3 を用いて次を示すことができる.

- $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathrm{F}(U_n)=F$ と $\phi(u,U_nx)\leq\phi(u,x)$ $(\forall n\in\mathbb{N},\,u\in\mathrm{F}(U_n),\,x\in C)$ が成り立つ.
- $\phi(p,z_n)-\phi(p,U_nz_n)\to 0$ $(\exists p\in F)$ を満たす C の任意の有界点列 $\{z_n\}$ について, $\phi(U_nz_n,z_n)\to 0$ となる. さらに, $\{U_n\}$ は条件 (Z) を満たす.

したがって, 青山-高阪-高橋による結果 [6, Theorem 4.1] を用いて結論が得られる. □

定理 3.1 の系として, 次を得ることができる.

系 3.3 ([4]). T を C から X への firmly nonexpansive like 写像で $\mathrm{F}(T)$ が空でないもの

とする. 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$ と

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}\left(Jx_n - \frac{1}{(\mu_X)^2}J(x_n - Tx_n)\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

で定める. このとき, J が点列的に弱連続であれば, $\{x_n\}$ は $\{\Pi_{\mathrm{F}(T)}(x_n)\}$ の強極限に弱収束する.

補足 3.4. X がヒルベルト空間で $T(C) \subset C$ のとき, $J = I$, $\mu_X = 1$, $\Pi_C = P_C$ より,

$$x_{n+1} = P_C\big(x_n - (x_n - Tx_n)\big) = P_C Tx_n = Tx_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

となる. よって, この系はバナッハ空間における firmly nonexpansive like 写像に対して定理 1.3 を一般化するものである.

青山-木村-高阪による結果 [2, Theorem 4.1] を用いると, 次の強収束定理が得られる.

定理 3.5 ([4]). $\{T_n\}$, F, $\{\beta_n\}$ を定理 3.1 と同じものとし, $u \in X$ とする. 点列 $\{y_n\}$ を $y_1 \in C$ と

$$y_{n+1} = \Pi_C J^{-1}\Big(\alpha_n Ju + (1-\alpha_n)\big(Jy_n - \beta_n J(y_n - T_n y_n)\big)\Big) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

で定める. ここで, $\{\alpha_n\}$ は $(0,1]$ の数列で $\alpha_n \to 0$ と $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を満たすものとする. このとき, $\{y_n\}$ は $\Pi_F(u)$ に強収束する.

定理 3.5 の系として, 次を得ることができる.

系 3.6 ([4]). T を C から X への firmly nonexpansive like 写像で $\mathrm{F}(T)$ が空でないものとし, $u \in X$ とする. 点列 $\{y_n\}$ を $y_1 \in C$ と

$$y_{n+1} = \Pi_C J^{-1}\left(\alpha_n Ju + (1-\alpha_n)\left(Jy_n - \frac{1}{(\mu_X)^2}J(y_n - Ty_n)\right)\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

で定める. ここで, $\{\alpha_n\}$ は $(0,1]$ の数列で $\alpha_n \to 0$ と $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を満たすものとする. このとき, $\{y_n\}$ は $\Pi_{\mathrm{F}(T)}(u)$ に強収束する.

4 極大単調作用素への応用

本節では, 定理 3.1 と定理 3.5 を用いることにより得られる極大単調作用素の零点近似定理を紹介する.

X をバナッハ空間とし, $A\colon X \to 2^{X^*}$ とする. 作用素 A が単調であるとは, $x^* \in Ax$ かつ $y^* \in Ay$ ならば $\langle x-y, x^*-y^* \rangle \geq 0$ が成り立つことをいう. さらに, A が極大単調であるとは, A が単調であり, さらに, 単調作用素 $B\colon X \to 2^{X^*}$ で, そのグラフが A のグラフを真に含むものが存在しないことをいう.

極大単調作用素 A に対する零点問題とは, $0 \in Au$ を満たす $u \in X$ を求める問題のことをいい, そのような点全体の集合を $A^{-1}0$ で表す. この集合の閉凸性は, A の極大単調性から従う. 特に, A が proper で下半連続な凸関数 $f\colon X \to (-\infty, \infty]$ の劣微分 ∂f であるとき, $A^{-1}0 = \operatorname{argmin}_X f$ となる.

定理 3.1 を用いると, 次の弱収束定理が得られる. これは, ヒルベルト空間における近接点法に関する Rockafellar の弱収束定理 [17] をバナッハ空間に一般化するものである.

定理 4.1 ([4]). X を一様に滑らかな 2-一様凸バナッハ空間とし, $A\colon X \to 2^{X^*}$ を極大単

のとし, $J_{\lambda_n} = (I + \lambda_n J^{-1} A)^{-1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ とする. 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in X$ と

$$x_{n+1} = J^{-1}\big(Jx_n - \beta_n J(x_n - J_{\lambda_n} x_n)\big) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

で定める. ここで, $\{\beta_n\}$ は $0 < \inf_n \beta_n$ と $\sup_n \beta_n < 2\,(\mu_X)^{-2}$ を満たす実数列とする. このとき, J が点列的に弱連続であれば, $\{x_n\}$ は $\{\Pi_{A^{-1}0}(x_n)\}$ の強極限に弱収束する.

X をヒルベルト空間であるとすれば, 次の系が得られる.

系 4.2. X をヒルベルト空間とし, $A\colon X \to 2^X$ を極大単調作用素で $A^{-1}0$ が空でないものとする. また, $\{\lambda_n\}$ を実数列で $\inf_n \lambda_n > 0$ を満たすものとし, $J_{\lambda_n} = (I + \lambda_n A)^{-1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ とする. 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in X$ と

$$x_{n+1} = (1-\beta_n)x_n + \beta_n J_{\lambda_n} x_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

で定める. ここで, $\{\beta_n\}$ は $0 < \inf_n \beta_n$ と $\sup_n \beta_n < 2$ を満たす実数列とする. このとき, $\{x_n\}$ は $\{P_{A^{-1}0}(x_n)\}$ の強極限に弱収束する.

定理 3.5 を用いると, 次の強収束定理が得られる.

定理 4.3 ([4]). X, A, $\{\lambda_n\}$, $\{J_{\lambda_n}\}$, $\{\beta_n\}$ を定理 4.1 と同じものとし, $u \in X$ とする. 点列 $\{y_n\}$ を $y_1 \in X$ と

$$y_{n+1} = J^{-1}\Big(\alpha_n Ju + (1-\alpha_n)\big(Jy_n - \beta_n J(y_n - J_{\lambda_n} y_n)\big)\Big) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

で定める．ここで，$\{\alpha_n\}$ は $(0,1]$ の数列で $\alpha_n \to 0$ と $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を満たすものとする．このとき，$\{y_n\}$ は $\Pi_{A^{-1}0}(u)$ に強収束する．

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.

[2] K. Aoyama, Y. Kimura, and F. Kohsaka, *Strong convergence theorems for strongly relatively nonexpansive sequences and applications*, J. Nonlinear Anal. Optim. **3** (2012), 67–77.

[3] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Existence of fixed points of firmly nonexpansive-like mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2010), Art. ID 512751, 1–15.

[4] ———, *Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:95, 1–13.

[5] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a family of mappings of type (P) and applications*, Nonlinear analysis and optimization, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009, pp. 1–17.

[6] ———, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–224.

[7] ———, *Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: their relations and continuity properties*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 131–147.

[8] K. Ball, E. A. Carlen, and E. H. Lieb, *Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms*, Invent. Math. **115** (1994), 463–482.

[9] B. Beauzamy, *Introduction to Banach spaces and their geometry*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.

[10] L. M. Brègman, *The method of successive projection for finding a common point of convex sets*, Soviet Math. Dokl. **6** (1965), 688–692.

[11] F. E. Browder, *Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **53** (1965), 1272–1276.

[12] I. Cioranescu, *Geometry of Banach spaces, duality mappings and nonlinear problems*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990.

[13] G. Crombez, *Image recovery by convex combinations of projections*, J. Math. Anal. Appl. **155** (1991), 413–419.

[14] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[15] Y. Kimura and K. Nakajo, *The problem of image recovery by the metric projections in Banach spaces*, Abstr. Appl. Anal. (2013), Art. ID 817392, 1–6.

[16] B. Martinet, *Détermination approchée d'un point fixe d'une application pseudo-contractante. Cas de l'application prox*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **274** (1972), A163–A165 (French).

[17] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim. **14** (1976), 877–898.

[18] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[19] Y. Takahashi, K. Hashimoto, and M. Kato, *On sharp uniform convexity, smoothness, and strong type, cotype inequalities*, J. Nonlinear Convex Anal. **3** (2002), 267–281.