数理解析研究所講究録
第 1965 巻 2015 年 180-190

有限群のブロック・イデアルとコホモロジー環

佐々木 洋城
Sasaki, Hiroki
信州大学 総合人間科学系（全学教育機構）
Shinshu University, School of General Education

1 ブロック・イデアル

k を標数 $p>0$ の代数的閉体とする．G を有限群とし，その位数は p で割り切れるものとする．

群環 kG を直既約両側イデアルの直和

$$kG = B_0 \oplus \cdots \oplus B_n$$

に分解するとき，各直和因子をブロック・イデアルまたは単にブロックとよぶ．添加写像 $kG \to k; \sum_{g\in G} \alpha_g g \mapsto \sum_{g\in G} \alpha_g$ はただ一つのブロック上でのみ自明でない．そのブロックを主ブロックとよび，以後 B_0 で表す．直既約加群 M に対して，ただ一つのブロック B_j について $B_jM \neq 0$ である．このとき，M は B_j に属するという．

自明な加群 k は主ブロックに属し，k の射影分解

$$\cdots \to P_{n+1} \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to k \to 0$$

に現れる射影加群 P_n も主ブロックに属する．kG 加群 M, N に対して $\mathrm{Hom}_{kG}(M,N)$ を単に ${}_{kG}(M,N)$ と書くことにする．双対鎖複体

$$0 \to {}_{kG}(k,M) \to {}_{kG}(P_0,M) \to \cdots \to {}_{kG}(P_{i-1},M) \xrightarrow{\delta_{i-1}} {}_{kG}(P_i,M) \xrightarrow{\delta_i} {}_{kG}(P_{i-1},M) \to \cdots$$

のコホモロジー群を $H^*(G,M)$ と書く：

$$H^i(G,M) = \mathrm{Ext}^i_{kG}(k,M) = \mathrm{Ker}\,\delta_i / \mathrm{Im}\,\delta_{i-1},\ H^*(G,M) = \bigoplus_{i\geqslant 0} H^i(G,M).$$

従って，kG 加群 M が主ブロックに属さなければ $H^*(G,M)=0$ である．ゆえに，$H^*(G,M)$ は主ブロック上の Ext 群であるといってよい：

$$H^*(G,M) = \mathrm{Ext}^i_{kG}(k,M) = \mathrm{Ext}^i_{B_0}(k,M).$$

特に，$M=k$ のとき，$H^*(G,k)$ には cup 積という乗法が定義され，可換次数付き環となる．繰り返すけれども，$H^*(G,k) = \mathrm{Ext}^i_{B_0}(k,k)$ であり，これを「主ブロックのコホモロジー環」

とみなす．それでは，(主ブロックも特別な場合であるとして含めて）どのブロック・イデアル B についてもそのコホモロジー環が考えられないものだろうか．

2 Hochshild コホモロジー環

k 上の有限次元多元環 A に対して $HH^*(A) = \mathrm{Ext}^*_{A\otimes A^{\mathrm{op}}}(A, A)$ を A の Hochshild コホモロジー環とよぶ．

A, B を k 上の有限次元対称多元環とする．

(A, B)-両側加群 X に対して $X^* = \mathrm{Hom}_k(X, k)$ を X の k-dual とする．

(A, B)-両側加群 X が左 A-加群として有限生成射影的であり，右 B-加群としても有限生成射影的であるする．このとき，次が成り立つ:

(1) transfer 写像 $t_X : HH^*(B) \to HH^*(A)$ が定義される．
(2) 相対射影元とよばれる元 $\pi_X \in HH^0(A)(\simeq Z(A)$ が定義される．これは $\pi_X = t_X(1_B)$ でもある．この元が可逆元であるかどうかは crucial である．
(3) $(\zeta, \tau) \in HH^*(A) \times HH^*(B)$ について，これらが"X-stable"であるという概念が定義される．(ζ, τ) が X-stable のとき，単に「ζ が X-stable である」ともいうが，ζ にはいわば相棒の τ があることを忘れてはならない．集合 $HH^*_X(A) = \{\zeta \in HH^*(A) \mid \zeta$ は X-stable$\}$ は $HH^*(A)$ の部分環である．
(4) $\pi_X \in Z(A)$ が可逆のとき，正規化された transfer 写像 $T_X : HH^*(B) \to HH^*(A); \theta \mapsto {\pi_X}^{-1} t_X(\theta)$ が定義され，$HH^*_{X^*}(B)$ に制限すれば全射が得られる：

$$R_X : HH^*_{X^*}(B) \twoheadrightarrow HH^*_X(A).$$

もし，さらに，$\pi_{X^*} \in Z(B)$ も可逆ならば，全射 $R_{X^*} : HH^*_X(A) \twoheadrightarrow HH^*_{X^*}(B)$ が得られ，同型

$$R_X : HH^*_{X^*}(B) \xrightarrow{\sim} HH^*_X(A)$$

が得られる．すなわち，制限かつ正規化された transfer 写像により，stable elements 同士は互いに移り合うのである．

有限群の群多元環は特別な対称多元環である．有限群 G に対して diagonal embedding

$$\delta_X : H^*(G, k) \to HH^*(kG)$$

が存在する．これは環の単射準同型である．

$H \leqslant G$ を部分群とする．通常のコホモロジー環における写像 $\mathrm{tr}^G : H^*(H, k) \to H^*(G, k)$, $\mathrm{res}_H : H^*(G, k) \to H^*(H, k)$ は次のように，Hochschild コホモロジー環の transfer 写像から導かれると理解される．すなわち，(kH, kG)-両側加群としての kG を X とおく．$X^* \simeq {}_{kG}kG_{kH}$ である．${}_{kH}kG_{kG}$, ${}_{kG}kG_{kH}$ が導く transfer 写像の通常のコホモロジー環への制限が tr^G, res_H

である：

$$
\begin{tikzcd}
H^*(G,R) \arrow[r, "\delta_G"] \arrow[d, "\mathrm{res}_H"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & HH^*(kG) \arrow[d, "t_{({}_{kH}kG_{kG})}"] \\
H^*(H,R) \arrow[r, "\delta_H"'] & HH^*(kH)
\end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd}
H^*(G,R) \arrow[r, "\delta_G"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & HH^*(kG), \\
H^*(H,R) \arrow[r, "\delta_H"'] \arrow[u, "\mathrm{tr}^G"] & HH^*(kH) \arrow[u, "t_{({}_{kG}kG_{kH})}"']
\end{tikzcd}
$$

さらに

$$\mathrm{Im}(\delta_H \circ \mathrm{res}_H) \subset HH^*(kH) \text{ の } {}_{kH}kG_{kH}\text{-stable 部分環.}$$

3 ブロックのコホモロジー環

B を kG のブロック・イデアルとする．B にはその defect 群とよばれる p-部分群が定められる．主ブロックの defect 群は Sylow p-部分群である．Sylow p-部分群が G で共役であるように，ブロックの defect 群も G で共役である．

さて，主ブロック B_0 のコホモロジー還として $H^*(G,k)$ をとらえると述べたが，一般のブロック・イデアル B については，自明な加群 k に相当する加群が存在しないため，Ext-群を使って，B のコホモロジーを定義することはできない．

そこで，$H^*(G,k)$ のもう一つの性質に注目する．すなわち，P を G の Sylow p-部分群とすると，restriction 写像 $H^*(G,k) \to H^*(P,k)$ は単射であり，いわゆる stable element theorem によって $\mathrm{Im}\,\mathrm{res}_P = \{\zeta \in H^*(P,k) \mid \zeta \text{ は } G \text{ 安定}\}$ である．$\mathscr{F}_P(G)$ を P における Frobenius 圏とすると，$\zeta \in H^*(P,k)$ が G-安定であるということは，$\zeta \in H^*(P,k)$ は $\mathscr{F}_P(G)$-安定であると表現される．さらに，diagonal embedding により，Hochshild コホモロジー還の中で考えると，$\zeta \in H^*(P,k)$ について

$$\zeta \text{ が } \mathscr{F}_P(G)\text{-安定} \Longleftrightarrow \delta_P\zeta \text{ は } {}_{kP}kG_{kP}\text{-安定.}$$

そこで，ブロック・イデアル B に対しては，$\mathscr{F}_P(G)$ に代わる圏を適切に定めて，その圏に関して安定なものを考えた．

B を直既約 $k[G \times G^{\mathrm{op}}]$-加群とみて，$B$ は $\Delta D = \{(a, a^{-1}) \mid a \in D\}$ を vertex としてもつ．B の $k[G \times D^{\mathrm{op}}]$-加群としての直和因子 X で ΔD を vertex にもつものを B の source 加群とよぶ．source 加群は互いに同型であるとは限らないが，それらは $N_G(D)$ で共役である：X と X' がともに B の source 加群ならばある $t \in N_G(D)$ によって $X' \simeq X \otimes t$ である．source 加群 X は source べき等元 $i \in B^D$ を用いて，$X = kGi$ と表される．さらに，$A = X^* \otimes_B X = ikGi$ は B の source 多元環とよばれ，B と多くの環論的性質を共有している．その原理は次の定理である．

定理 3.1 (Puig) A と B は森田同値である．

部分群 H のブロック・イデアル C と G のブロック・イデアル B について，B を $H \times H$-加群とみて，C がその重複度 1 の直和因子に同型であるとき，B は C の Brauer 対応であるといって，$C^G = B$ と書く．

一般に，G の p-部分群 Q と $kQC_G(Q)$ のブロック c との組 (Q, c) を subpair とよぶ．c が $kQC_G(Q)$ のブロックならばその対応 c^G は定義される．$B = c^G$ のとき，subpair (Q, c) を B-subpair とよぶ．subpairs は群の構造論における p-部分群と同じような役割をはたす．subpairs には順序関係が定義される．subpairs $(Q, c), (R, c')$ について $(Q, c) \leqslant (R, c')$ ならば，$c^G = c'^G$ である．subpair (Q, c) が極大であることと Q がブロック c^G のディフェクト群であることとは同値である．Sylow の定理と同様の定理が成り立つことから，極大 subpair を Sylow subpair とよぶ．

さて，B の source 加群 $X = kGi$ を指定する．$\mathrm{Br}_D^G(i) \in kC_G(D)$ は原始的である．従って，Brauer construction

$$X(D) = X^D \Big/ \sum_{Q<D} \mathrm{Tr}_Q^D X^Q \simeq kC_G(D)\,\mathrm{Br}_D^G(i)$$

は直既約左 $kC_G(D)$-加群である．よって，$kC_G(D)$ のただひとつのブロック・イデアル $kC_G(D)e_D$ に属する．このとき，$k[DC_G(D)]$ のブロック・イデアル $b_D = k[DC_G(D)]e_D$ をとれば，(D, b_D) は Sylow B-subpair である．(D, b_D) は source 加群 X に associate されるという．ここでは Sylow (B, X)-subpair とよぶことにする．Sylow (B, X)-subpair (D, b_D) から定められる圏

$$\mathscr{F}_{(D,b_D)}(B, X) = \{ (Q, b_Q) \mid (Q, b_Q) \leqslant (D, b_D) \}$$

を考える．(Q, b_Q) から (R, b_R) への morphism は $x \in G$ で ${}^x(Q, b_Q) \leqslant (R, b_R)$ をみたすものが引き起こす共役写像 $c_x : Q \to R; a \mapsto {}^x a$ である．このような $x \in G$ のなす集合を $T_G((Q, b_Q), (R, b_R))$ と書く．圏 $\mathscr{F}_{(D,b_D)}(B, X)$ を Brauer 圏とよぶ．

定義 3.1 (Linckelmann [4]) いままでの記号の下で，ブロック B のコホモロジー環を次のように定義する．$\zeta \in H(D, k)$ が条件

$$\mathrm{res}_Q\, {}^g\zeta = \mathrm{res}_Q\, \zeta \quad \forall (Q, b_Q) \leqslant (D, b_D)\ \forall g \in N_G(Q, b_Q)$$

をみたすとき，ζ は $\mathscr{F}_{(D,b_D)}(B, X)$-stable であるという．$D$ のコホモロジー環 $H(D, k)$ の部分集合

$$H(G, B; X) = \{ \zeta \in H(D, k) \mid \zeta \text{ は } \mathscr{F}_{(D,b_D)}(B, X)\text{-stable} \}$$

を B の (X によって定められる) コホモロジー環とよぶ．

主ブロック B_0 の Linckelemann の定義によるコホモロジー還 $H^*(G, B_0; X_0)$ を考える．ディフェクト群は G の Sylow p-部分群である．その一つを P とする．e_0 を B_0 の block べき等元とする．すなわち，$e \in Z(kG)$ で $B_0 = kGe_0$ である．任意の $Q \leqslant P$ について，$\mathrm{Br}_Q(e_0) \in kC_G(Q)$ は原始的である．(Brauer の第 3 主定理) つまり，$(Q, \mathrm{Br}_Q(e_0))$ は B_0-subpair である．ゆえに，$(Q, b_Q) \leqslant (P, \mathrm{Br}_P(e_0))$ ならば，$(Q, b_Q) = (Q, \mathrm{Br}_P(e_0))$ が成り立つ．よっ

て，任意の $N_G(Q, b_Q) \leqslant (P, b_P)$ に対して $N_G(Q, b_Q) = N_G(Q)$ が成り立つ．すなわち，$\mathscr{F}_P(G) = \mathscr{F}_{(P,b_O)}(B_0, X_0)$ が成り立ち，

$$H^*(G, B_0; X_0) = \mathrm{Im}\left[\mathrm{res}_P : H^*(G, k) \to H^*(P, k)\right] \simeq H^*(G, k).$$

次の定理はブロックのコホモロジー還を考察する上での礎となる事実である．

定理 3.2 今までの記号の下で，π_X は可逆である．

Linckelmann はさらに次を示した．通常のコホモロジー環はいわゆる diagonal embedding により Hochshchild コホモロジー環に埋め込まれるのだが，ブロックのコホモロジー環はこの diagonal embedding によって Hochshchild コホモロジー環の中ではある stable な部分環に含まれる．すなわち

定理 3.3 (Linckelmann) 今までの記号の下で

$$\zeta \in H^*(G, B; X) \Longrightarrow \delta_D\zeta \in HH^*(kD) \text{ は } {}_{kD}ikGi_{kD}\text{-stable である．}$$

この逆も成り立つ．

定理 3.4 ([11]) 今までの記号の下で $\zeta \in H^*(D, k)$ について，$\delta_P\zeta \in HH^*(kD)\ {}_{kD}ikGi_{kD}$-stable であるならば，$\zeta$ は $H^*(G, B; X)$ に属する．

これらをまとめると，$\zeta \in H^*(D, k)$ について

$$\zeta \in H^*(G, B; X) \Longleftrightarrow \delta_D\zeta \in HH^*(kD) \text{ は } {}_{kD}ikGi_{kD}\text{-stable である．}$$

そこで，以下の課題を考察したい．

課題 1 $A = X^* \otimes X$ の (kD, kD)-両側加群としての構造を知ること．

課題 2 $H^*(G, B; X)$ を写像 $t : H^*(D, k) \to H^*(D, k)$ の像としてとらえること．

課題 3 Brauer 対応で対応するブロックのコホモロジー還の間に，"restriction 写像"，"corestriction 写像"を定義すること．

課題 4 $H^*(G, B; X)$ と B の Hochshild コホモロジー環 $HH^*(B)$ はどれだけ近いか?

4 source 加群 の加群構造

$A = X^* \otimes X$ は (kD, kD)-両側加群として，kG の直和因子に同型である．従って，A は $k[DgD]$ $(g \in G)$ の形の直既約 (kD, kD)-両側加群の直和である．どの $k[DgD]$ がどのような重複度で現れるかが問題である．

定理 4.1 (Puig [9]) 今までの記号の下で

(1) (kD, kD)-両側加群として

$$A \simeq \left(\bigoplus_{gDC_G(D) \in N_G(D, b_D)/DC_G(D)} k[Dg] \right) \oplus N. \qquad (*)$$

ここで，N は $x \in G \setminus N_G(D)$ の $k[DxD]$ の直和である．

(2) $k[Dg]$ $(gDC_G(D) \in N_G(D, b_D)/DC_G(D))$ の形の加群のどの二つも同型でない．

この N については，不明である．

ここでは，最近の二つの定理を報告する．

定理 4.2 (Sasaki [12]) $(P, b_P), (Q, b_Q) \leq (D, b_D)$ として，$PC_D(P)$ が b_P のディフェクト群であるか，$QC_D(Q)$ が b_Q のディフェクト群であると仮定する．$g \in G$ により ${}^g(P, b_P) = (Q, b_Q)$ であるとき，写像

$$t_g : H^*(D, k) \to H^*(D, k); \zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_Q {}^g\zeta$$

が 0 写像でなければ，$k[DgD]$ は A の直和因子に同型である．

注意 重複度については不明である．

定理 4.3 (Okuyama–Sasaki [8]) $(Q, b_Q) \leqslant (D, b_D)$ は essential であるとする．このとき，(Q, b_Q) の惰性群 $N_G((Q, b_Q)/QC_G(Q)$ には straongly p-embedded 部分群 $M/QC_G(Q)$ が存在するが，どの $x \in N_G((Q, b_Q) \setminus M$ についても

(1) $D \cap {}^xD = Q$ であり，

(2) $k[DxD]$ は A のの直和因子に同型である．

(3) その重複度は p を法として 1 に合同である．

5 Trace 写像

source 多元環 $A = X^* \otimes X = ikGi$ が定義する Hochschild コホモロジー環 $HH^*(kD)$ の transfer 写像 t_A は $H^*(D, k)$ の transfer 写像 t を導く：

$$\begin{array}{ccc} H^*(D,k) & \xrightarrow{\delta_D} & HH^*(kD) \\ t \Big\downarrow & \circlearrowright & \Big\downarrow t_A \\ H^*(D,k) & \xrightarrow[\delta_D]{} & HH^*(kD) \end{array} .$$

次が成り立つと信じているが．

予想

$$H^*(G, B; X) = t(H^*(D, k)).$$

例 5.1 $N_G(D, b_D)$ が $\mathscr{F}_{(D,b_D)}(B, X)$ における subpairs の融合を統制するならば，上の予想は正しい．例えば，D が G で正規であるとか D が可換群である場合である．

例 5.2 B がテイム表現型の場合は $p=2$ でディフェクト群は巡回群，二面体群，準二面体群，(一般) 四元数群に同型である．Kawai–Sasaki [1] で写像 $\mathrm{Tr}_D^B : H^*(D,k) \to H^*(D,k)$ で $\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}_D^B = H^*(G,B;X)$ となるものを構成していたのだが，この写像が source 多元環 A が導く transfer 写像に一致することが，定理 4.3 と subpairs の融合をつぶさに調べることによって確かめられる．

例 5.3 $p=2$ とし，ブロック B のディフェクト群 D は wreathed 2-群 $(\mathbf{Z}/2^n \times \mathbf{Z}/2^n) \rtimes \mathbf{Z}/2$ に同型であるとする：

$$D = \langle a,b,t \mid a^{2^n} = b^{2^n} = 1, ab = ba, t^2 = 1, tat = b \rangle.$$

Kawai–Sasaki [1] ではこのブロック多元環のコホモロジー環についても計算し，写像 Tr_D^B : $H^*(D,k) \to H^*(D,k)$ で $\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}_D^B = H^*(G,B;X)$ であるものを構成した．

$U = \langle a,b \rangle$, $V = \langle a^{2^{n-1}}, ab, t \rangle \leqslant D$ とおき，$(U,b_U) \leqslant (D,b_D)$，$(V,b_V) \leqslant (D,b_D)$ とする．集合 $\{(D,b_D),(U,b_U),(V,b_V)\}$ は共役族であり，(D,b_D) に含まれる B-subpair の融合は $N_G(D,b_D), N_G(U,b_U), N_G(V,b_V)$ に属する元による共役の合成として記述される．wreathed 2-群の自己同型群は 2-群であることから，$N_G(D,b_D)/DC_G(D)$ は単位群である．従って，$N_G(U,b_U), N_G(V,b_V)$ のありようによって subpair の融合のありかたが決まる．

$N_G(U,b_U)/C_G(U) \leqslant \mathrm{Aut}\,U \simeq \mathrm{GL}(2,2)$，$N_G(V,b_V)/VC_G(V) \leqslant \mathrm{Aut}\,V \simeq \mathrm{GL}(2,2)$ であるが，ここでは，ともに GL(2,2) に同型であると仮定しよう．

このとき，$(U,b_U),(V,b_V)$ は essential な subpair であり，元 $g_0 \in N_G(U,b_U)$，$g_1 \in N_G(V,b_V)$ でそれぞれ (U,b_U)，(V,b_V) の位数 3 の自己同型を引き起こすものをとる．

写像 $\mathrm{Tr}_D^B : H^*(D,k) \to H^*(D,k)$ を次のようにつくる：

$$\mathrm{Tr}_D^B : \zeta \mapsto \zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_U {}^{g_0}\zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_V {}^{g_1}\zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_T {}^{g_1 g_0}\zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_W {}^{g_0 g_1}\zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_F {}^{g_1 g_0 g_1}\zeta.$$

ここで，$T = \langle a, b^{2^{n-1}} \rangle$，$W = \langle ab, a^{2^{n-1}}t \rangle$，$F = \langle t, (ab)^{2^{n-1}} \rangle$ である．この写像は B のコホモロジー環をつくる：

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}_D^B = H^*(G,B;X).$$

この写像について次がわかる．

(1) Tr_D^B の第 1 項の写像 $\zeta \mapsto \zeta$ は $N_G(D,b_D)/DC_G(D)$ から引き起こされる．

$(U,b_U),(V,b_V)$ は essential な subpair であるから，写像 Tr_D^B の第 2 項，第 3 項については定理4.3により，Puig の定理における N の直和因子から得られるものであることがわかる．すなわち

(2) 直既約 (kD,kD)-両側加群 $k[Dg_0D]$，$k[Dg_1D]$ は $A = X^* \otimes_B X$ の直和因子に同型である．その重複度はそれぞれ奇数である．
(3) (kD,kD)-両側加群 $k[Dg_0D]$，$k[Dg_1D]$ が引き起こす $HH^*(kD)$ の transfer 写像の $H^*(D,k)$ への制限 $\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_{D\cap {}^{g_0}D} {}^{g_0}\zeta$，$\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_{D\cap {}^{g_1}D} {}^{g_1}\zeta$ はそれぞれ，$\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_U {}^{g_0}\zeta$，$\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_V {}^{g_1}\zeta$ となる．

第4，第5項の写像については定理 4.2 が適用できて，次がわかる．

(4) 直既約 (kD, kD)-両側加群 $k[Dg_1g_0D]$，$k[Dg_0g_1D]$ は $A = X^* \otimes_B X$ の直和因子に同型である．しかしながら $k[Dg_1g_0D]$，$k[Dg_0g_1D]$ の重複度は不明である．
(5) (kD, kD)-両側加群 $k[Dg_1g_0D]$，$k[Dg_0g_1D]$ が引き起こす $HH^*(kD)$ の transfer 写像の $H^*(D, k)$ への制限 $\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_{D\cap {}^{g_1g_0}D}\, {}^{g_1g_0}\zeta$，$\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_{D\cap {}^{g_0g_1}D}\, {}^{g_0g_1}\zeta$ はそれぞれ，$\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_T\, {}^{g_1g_0}\zeta$，$\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_W\, {}^{g_0g_1}\zeta$ となる．

第6項については

(6) 最後の項の写像 $\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_F\, {}^{g_1g_0g_1}\zeta$ と A の直和因子との関わりについては全く不明である．

一方，A が導く transfer 写像 $t : H^*(D, k) \to H^*(D.k)$ は $(D.b_D)$ における subpair の融合をつぶさに調べることにより，ある整数 $m_1, m_2, m_3 \geqq 0$ により

$$t : \zeta \mapsto \zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_U\, {}^{g_0}\zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_V\, {}^{g_1}\zeta + m_1 \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_T\, {}^{g_1g_0}\zeta + m_2 \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_W\, {}^{g_0g_1}\zeta + m_3 \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_F\, {}^{g_1g_0g_1}\zeta$$

と記述されることがわかる．係数の m_1, m_2 は上で述べた (4)，(5) により 1 以上であるが，偶数か奇数かはまだ不明である．係数 m_3 については全く不明である．

ところで，写像 $\mathrm{Tr}_D^B : H^*(D, k) \to H^*(D, k)$ は実際は次のように構成した．

写像 Γ, $\Delta : H^*(D, k) \to H^*(D, k)$ を

$$\Gamma : \zeta \longmapsto \zeta + \mathrm{tr}^S \mathrm{res}_U\, {}^{g_0}\zeta,$$
$$\Delta : \zeta \longmapsto \zeta + \mathrm{tr}^S \mathrm{res}_V\, {}^{g_1}\zeta$$

によって定義する．このとき，$\zeta \in H^*(D, k)$ について，$\Delta\circ\Gamma\circ\Delta\circ\Gamma(\zeta) \in H^*(G, B; X)$ が成り立ち，特に，

$$\Delta\circ\Gamma\circ\Delta\circ\Gamma : H^*(S, k) \longrightarrow H^*(G, B; X)$$

が成り立つのである．上の合成写像を展開して，この例の最初に述べた形が得られる．今となっては，なぜ，上の合成を思いついたのかは定かではないのであるが，実は，B-subpairs の融合は，g_0, g_1 が引き起こす共役写像 c_0, c_1 の合成として記述されるのであるが，もっと詳しく，最も長くても $c_1\circ c_0\circ c_1\circ c_0$ であることが分かる．ここに，上の合成の意味があると思う．

6 Brauer 対応

ここでは，Brauer 対応で対応するブロック・イデアルのコホモロジー環を考察する．H を G の部分群で

$$DC_G(D) \leqslant H$$

であるものと仮定する．このとき kH のブロック・イデアルの Brauer 対応はつねに定義される．C を kH のブロック・イデアルとし

$$C^G = B, \quad D \text{ は } C \text{ の defect 群である}$$

と仮定する．次は基本定理である．

定理 6.1 (Kawai–Sasaki [2]) (B, C)-両側加群 $M = BC$ が定める相対射影元 $\pi_M \in HH^0(B)(\simeq Z(B))$ は可逆である．

しかし，この M は"大きすぎ"て，もっと精密に考察する必要がある．

B の source 加群 X と C の source 加群 Y は $(G\times D^{\mathrm{op}}, \Delta D, H\times D^{\mathrm{op}})$ に関する Green 対応で対応していると仮定する．

直既約 $k[H\times H^{\mathrm{op}}]$-加群 C の $G\times H^{\mathrm{op}}$ への Green 対応を $L = L(B, C)$ とおく．

$$\begin{tikzcd}
 & & G\times G^{\mathrm{op}} \arrow[d, dash] & B \\
 & & G\times H^{\mathrm{op}} \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] & L = L(B, C) \arrow[dd, leftrightarrow, "\text{Green 対応}"] \\
X \arrow[dd, leftrightarrow, "\text{Green 対応}"'] & G\times D^{\mathrm{op}} \arrow[dd, dash] & & \\
 & & H\times H^{\mathrm{op}} \arrow[dl, dash] & C \\
Y & H\times D^{\mathrm{op}} \arrow[d, dash] & & \\
 & \Delta D & &
\end{tikzcd}$$

このとき

定理 6.2 (Sasaki [10]) (1) L が定める相対射影元 $\pi_L \in Z(B)$ および L^* が定める相対射影元 $\pi_{L^*} \in Z(C)$ は可逆である．

(2)
$$L^*\otimes_B X \simeq Y \oplus O(\mathscr{Y}(G\times D^{\mathrm{op}}, \Delta D, H\times D^{\mathrm{op}})).$$

(3)
$$L\otimes_{kH} Y \simeq X \oplus Z$$

と直和分解され, Z の直既約直和因子は $\mathscr{X}(G\times D^{\mathrm{op}}, \Delta D, H\times D^{\mathrm{op}})$-射影的で, trivial source をもつ．

(4) $D \lhd H$ ならば, $L\otimes_{kH} Y \simeq X$.

(5) $L \mid X\otimes_{kD} Y^*$ である．

(6) Sylow C-subpair (D, b_D) を $b_D Y(D) \neq 0$ ととる．(D, b_D) は Sylow B-subpair でもあり，さらに, $b_D X(D) \neq 0$ である．この Sylow subpair によって定められるコホモロジー環に

ついて, 次は可換である：

$$
\begin{tikzcd}
H^*(G,B;X) \arrow[r, tail, "\delta_D"] & HH^*_{X^*}(kD) \arrow[r, shift left, tail, two heads, "R_X"] & HH^*_X(B) \arrow[l, shift left, tail, two heads, "R_{X^*}"] & \\
& HH^*_{X^*\otimes_B L\otimes_C Y}(kD) \arrow[u, hook] \arrow[r, shift left, tail, two heads, "R_X"] \arrow[d, equal] & HH^*_{L\otimes_C Y}(B) \arrow[u, hook] \arrow[l, shift left, tail, two heads, "R_{X^*}"] \arrow[r, hook] \arrow[d, shift left, tail, two heads, "R_{L^*}"] & HH^*_L(B) \arrow[d, shift left, tail, two heads, "R_{L^*}"] \\
& HH^*_{Y^*\otimes_C L^*\otimes_B X}(kD) \arrow[r, shift left, tail, two heads, "R_Y"] \arrow[d, hook] & HH^*_{L^*}(C)\cap HH^*_Y(C) \arrow[l, shift left, tail, two heads, "R_{Y^*}"] \arrow[u, shift left, tail, two heads, "R_L"] \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & HH^*_{L^*}(C) \arrow[u, shift left, tail, two heads, "R_L"] \\
H^*(H,C;Y) \arrow[r, tail, "\delta_D"'] & HH^*_{Y^*}(kD) \arrow[r, shift left, tail, two heads, "R_Y"] & HH^*_Y(C) \arrow[l, shift left, tail, two heads, "R_{Y^*}"] &
\end{tikzcd}
$$

この記号の下で

定理 6.3

$$H^*(G,B;X) \subseteq H^*(H,C;Y) \Longleftrightarrow \delta_D H^*(G,B;X) \subseteq HH^*_{Y^*\otimes_C L^*\otimes_B X}(kD).$$

この条件が成り立つとき, 次の可換図式を得る:

$$
\begin{tikzcd}
H^*(G,B) \arrow[r, tail, "\delta_D"] \arrow[d, hook] & HH^*_{X^*\otimes_B L\otimes_C Y}(kD) \arrow[r, shift left, tail, two heads, "R_X"] \arrow[d, hook] & HH^*_{L\otimes_C Y}(B) \arrow[l, shift left, tail, two heads, "R_{X^*}"] \arrow[d, tail, "R_{L^*}"] \\
H^*(H,C) \arrow[r, tail, "\delta_D"'] & HH^*_{Y^*}(kD) \arrow[r, shift left, tail, two heads, "R_Y"] & HH^*_Y(C) \arrow[l, shift left, tail, two heads, "R_{Y^*}"]
\end{tikzcd}
\quad .
$$

7 Varieties

ブロックのコホモロジー論の創始者の M. Linckelmann はによるブロックのコホモロジー環における support variety に関する仕事 [3], [5], [6] は特筆に値する. 近年の Hochschild コホモロジー環における support variety の研究の端緒になっている. ここでは, 彼の定理を紹介する.

群環の Hochschild コホモロジー環の特徴は群のコホモロジー環からの diagonal embedding があるということである. S. Siegel と S. Witherspoon は [13] において

(1) $\delta_G : H^*(G,k) \to HH^*(kG)$ はべき零根基を法として同型をひきおこすか？

(2) B_0 を主ブロックとして, 合成 $\delta_G : H^*(G,k) \to HH^*(kG) \to HH^*(B_0)$ はべき零根基を法として同型をひきおこすか？

という課題を提起した.

次の自然な写像

$$\tau : H^*(G, B; X) \xrightarrow{\delta_D} HH^*_{X^* \otimes_B X}(kD) \xrightarrow{R_X} HH^*_X(B)$$

を考える．Linckelmann は次の定理を示し，上の課題をさらに精密な形で解決した．

定理 7.1 (Linckelmann [6]) 上の写像は同型

$$H^*(G, B; X)/\{\text{べき零元}\} \simeq HH^*(B)/\{\text{べき零元}\}$$

を引き起こす．特に

$$H^*(G, B; X) \text{の極大イデアル・スペクトラム} \simeq HH^*(B) \text{の極大イデアル・スペクトラム}.$$

この定理から，有限生成 B-加群 M の $H^*(G, B; X)$ における support variety と $HH^*(B)$ における support variety が同型であることも導かれる．

参考文献

[1] H. Kawai and H. Sasaki, Cohomology algebras of 2-blocks of finite groups with defect groups of rank two, J. Algebra **306** (2006), no. 2, 301–321.

[2] ———, Cohomology algebras of blocks of finite groups and Brauer correspondence, Algebr. Represent. Theory **9** (2006), no. 5, 497–511.

[3] M. Linckelmann, On derived equivalences and local structure of blocks of finite groups, Turkish J. Math. **22** (1988), 93–107.

[4] ———, Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups, Algebr. Represent. Theory **2** (1999), 107–135.

[5] ———, Varieties in block theory, J. Algebra **215** (1999), 460–480.

[6] ———, Hochschild and block cohomology varieties are isomorphic, J. London Math. Soc. (2) **81** (2010), 389–411.

[7] H. Nagao and Y. Tsushima, Representations of finite groups, Academic Press, New York, London, 1989.

[8] T. Okuyama and H.Sasaki, A note on source algebras of blocks, unpublished note.

[9] L. Puig, Pointed groups and construction of modules, J. Algebra **116** (1988), 7–129.

[10] H. Sasaki, Cohomology algebras of blocks of finite groups and Brauer correspondence II, Algebr. Represent. Theory **13** (2010), 445–465.

[11] ———, Cohomology of block ideals of finite group algebras and stable elements, Algebr. Represent. Theory **16** (2013), 1039–1049.

[12] ———, Source algebras and cohomology of block ideals of fintie group algebras, Proc. 46 Symp. Ring Theory and Representation Theory (I. Kikumasa, ed.), 2014, pp. 209–215.

[13] S. Siegel and S. Witherspoon, The Hochschild cohomology ring of a group algebra, Proc. London Math. Soc. (3) **79** (1999), no. 1, 131–157.