

## 有限群の部分群に関するゼータ関数

広中 由美子

(早稲田大学 教育・総合科学学術院)

### アブストラクト

有限群  $G$  の部分群の個数を数え上げるゼータ関数  $\zeta_G(s)$  を考える。まず、アーベル  $p$  群  $G$  と非アーベル  $p$  群  $G'$  で  $\zeta_G(s) = \zeta_{G'}(s)$  となる簡単な例を与える。次に、アーベル群に限れば  $\zeta_G(s)$  が  $G$  の同型類を定めることを示す。この証明は、アーベル  $p$  群の位数ごとの部分群の個数の評価に基づく。最後に、どのようなアーベル  $p$  群のゼータが非アーベル群のゼータと一致するかについて考える。

### §0

部分群の個数を数え上げる次のようなゼータ関数を考えよう。

群  $G$  の部分群の全体のなす集合を  $\mathcal{S}(G)$  とおき、部分群の個数の母関数としてのゼータ関数を、次のように  $s \in \mathbb{C}$  について右辺の和が収束する範囲で定義する：

$$\zeta_G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(G)}{n^s}, \quad a_n(G) = \#\{H \in \mathcal{S}(G) \mid |H| = n\}, \quad (0.1)$$

$$\zeta_G^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^*(G)}{n^s}, \quad a_n^*(G) = \#\{H \in \mathcal{S}(G) \mid (G:H) = n\}. \quad (0.2)$$

$G = \mathbb{Z}$  の場合 (0.2) の右辺は  $\text{Re}(s) > 1$  で絶対収束し、Riemann zeta 関数  $\zeta(s)$  に他ならない。一般に、 $G$  が有限生成 lattice  $\Lambda$  の場合、 $\zeta_\Lambda^*(s)$  は、いわゆる Solomon's zeta 関数と呼ばれる古典的なものになる。多元環のゼータ関数や、行列環のゼータもこの仲間ととらえることができる。代数体  $K$  の Dedekind zeta 関数は、整数環  $\mathcal{O}_K$  のイデアルに和を制限したものだから (0.2) 型の類似と考えることもできる。 $\zeta_G^*(s)$  の方が通

---

この研究は、部分的に科学研究費の補助を受けています (No.24540031).

常のゼータ関数の拡張のように見られ、興味深そうであるが、有限群に限ると、両者とも多項式であり、

$$\zeta_G(s) = \frac{1}{|G|^s} \cdot \zeta_G^*(-s), \quad (\text{if } G \text{ is finite}) \quad (0.3)$$

というきわめて簡単な関係で結ばれていて、どちらで考えても本質的に変わらない。さらに、有限アーベル群については、双対性から  $\zeta_G(s) = \zeta_G^*(s)$  であるから、次が成り立つ：

$$\zeta_G(s) = \frac{1}{|G|^s} \zeta_G(-s), \quad (\text{if } G \text{ is finite abelian}). \quad (0.4)$$

以下では有限群に限定してゼータ関数  $\zeta_G(s)$  を考察する。次のような素朴な疑問が湧いてくる：

[A] ゼータ関数  $\zeta_G(s)$  は  $G$  の同型類を定めるか？

[B] 対称性 (あるいは関数等式) (0.4) はアーベル群に特有のものか？

§1 で、ゼータ関数の基本的性質を見た後に、アーベル群と非アーベル群でゼータ関数の等しい簡単な例を与える。これにより、[A], [B] は一般的には否定的であることが分かる。他方、アーベル群に限れば、[A] は肯定的であることを §2 で示す。冪零群のゼータ関数は、そのシロー  $p$  部分群のゼータ関数の積になる。従って、アーベル群の場合、[A] は、有限アーベル  $p$  群の数え上げの問題に帰着し、組み合わせ論的な量を用いて証明する。この場合には、問題は古典的であるだけでなく、 $GL_n$  の保型形式や表現の密度の問題にも密接な関わりがある、これらについては §2 の末尾に述べる。§3 では、 $p$  群の範囲で、どのようなアーベル群のゼータ関数が非アーベル群のゼータ関数と一致しうるかについて考察する。

## §1

有限群のゼータ関数  $\zeta_G(s)$  は素数  $p$  について  $p^{-s}$  たちの多項式とみなせる、次の事実は容易に分かる。

**Proposition 1.1** (1)  $\zeta_G(s) = \zeta_{G'}(s)$  ならば  $|G| = |G'|$  である、

(2)  $|G|$  と  $|G'|$  が互いに素であれば、 $\zeta_{G \times G'}(s) = \zeta_G(s) \times \zeta_{G'}(s)$  である。

(3)  $\zeta_G(s)$  の係数に 1 しか現れないことと、 $G$  が巡回群であることは同値である。

通常のゼータ関数の場合に習って、 $\zeta_G(s)$  が次のように記述されるとき オイラー積を持つ と言うことにする。

$$\zeta_G(s) = \prod_{p||G} f_p(p^{-s}), \quad f_p(X) \in \mathbb{C}[X]. \quad (1.1)$$

有限群においては、冪零群とはシロー  $p$  部分群の直積であることに他ならないことを注意しておく。次が分かる。

**Proposition 1.2**  $\zeta_G(s)$  がオイラー積をもつことと  $G$  が冪零群であることは同値である。オイラー積表示 (1.1) は、 $|G|$  の各素因子  $p$  について  $f_p(0) = 1$  と定めると一意的である。

*Proof.*  $\zeta_G(s)$  がオイラー積 (1.1) を持つと仮定すると、 $\prod_p f_p(0) = a_1(G) = 1$  であるから、任意の  $p$  について  $f_p(0) = 1$  と仮定できる。そのとき、 $f_p(X)$  の  $X^m$  の係数は  $a_{p^m}(G)$  と一致し、 $f_p(X)$  は非負整数係数の多項式となる。特に最高次係数を  $c_p$  とおくと、 $\prod_p c_p = a_{|G|}(G) = 1$  であるから、 $c_p = 1$  が分かる。よって  $G$  のどのシロー  $p$  部分群もただ一つで、正規部分群となるから  $G$  は冪零群となる。逆と Euler 積の一意的性については明らか。 ■

従って、 $\zeta_G(s)$  が  $G$  の同型類を定めるかどうかの問題は、まず  $p$ -群について考えるべきである。その前に、オイラー積を持たない  $\zeta_G(s)$  の具体例を挙げておこう。

例 1.1.  $n$  を奇数として二面体群

$$D_n = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = 1, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} \rangle$$

を考えると

$$\begin{aligned} \zeta_{D_n}(s) &= 1 + n \cdot 2^{-s} + \sum_{d|n, d \neq 1} (d^{-s} + (2d)^{-s}) \\ &= 1 + n \cdot 2^{-s} + (1 + 2^{-s}) \prod_{p|n} f_p(p^{-s}), \\ &\quad (f_p(X) = X^{m_p} + X^{m_p-1} + \cdots + X + 1, \text{ for } p^{m_p} || n). \end{aligned}$$

[A], [B] の反例を与える簡単な  $p$  群の例を構成する。  $C_n$  で位数  $n$  の巡回群を表す。素数  $p$  と自然数  $m, n$  ( $m > n$ ) について、位数  $p^{m+n}$  の非アーベル群  $G_p(m, n)$  を次のように定める：

$$G_p(m, n) = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^{p^m} = \tau^{p^n} = 1, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{1+p^{m-1}} \rangle. \quad (1.2)$$

**Proposition 1.3**  $G_p(m, n)$  は上で与えた群とし,  $p = 2$  ならば  $m \geq 3$  と仮定する. このとき次が成立する:

- (1) 非アーベル群  $G_p(m, n)$  とアーベル群  $C_{p^m} \times C_{p^n}$  のゼータ関数は一致し, 対称性 (0.4) をみたす.
- (2) 奇素数については位数  $p^2$  以下,  $p = 2$  については位数 8 以下の群はゼータ関数で決定される.

*Proof.* (1)  $G = G_p(m, n)$  とおく.  $G$  の位数  $p^m$  の元  $x$  は  $x = \sigma^i \tau^j$ ,  $p \nmid i$  の形に表せて,  $\langle x \rangle$  は  $G$  の正規部分群であり,  $\langle x \rangle$  を含む部分群は  $G/\langle x \rangle \cong C_{p^n}$  の部分群と一対一に対応する. 一方,  $G$  の部分群  $H$  が位数  $p^m$  の元を含まなければ,  $H \subset \langle \sigma^p, \tau \rangle \cong C_{p^{m-1}} \times C_{p^n}$  である. 以上から,  $G$  の部分群と  $C_{p^m} \times C_{p^n}$  の部分群の間に自然な一対一対応があることが分かり, ゼータ関数が一致することが導かれる.

(2) 良く知られているように, 位数  $p^2$  以下の  $p$  群は  $C_p, C_{p^2}$  または  $C_p \times C_p$  に同型であり, 位数 8 以下の 2 群は次のいずれかの群と同型である:

$$\begin{aligned} & C_8, \quad C_4 \times C_2, \quad C_2 \times C_2 \times C_2, \\ & D_4 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = \tau^2 = 1, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} \rangle (= G_2(2, 1)), \\ & Q_2 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = 1, \sigma^2 = \tau^2, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} \rangle. \end{aligned}$$

それぞれゼータ関数を計算すると, 次のようになり, 結論を得る:

$$\begin{aligned} \zeta_{C_p}(s) &= 1 + p^{-s}, \\ \zeta_{C_{p^2}}(s) &= 1 + p^{-s} + p^{-2s}, \\ \zeta_{C_p \times C_p}(s) &= 1 + (p+1)p^{-s} + p^{-2s}, \\ \zeta_{C_8}(s) &= 1 + 2^{-s} + 2^{-2s} + 2^{-3s}, \\ \zeta_{C_4 \times C_2}(s) &= 1 + 3 \cdot 2^{-s} + 3 \cdot 2^{-2s} + 2^{-3s}, \\ \zeta_{C_2 \times C_2 \times C_2}(s) &= 1 + 7 \cdot 2^{-s} + 7 \cdot 2^{-2s} + 2^{-3s}, \\ \zeta_{D_4}(s) &= 1 + 5 \cdot 2^{-s} + 3 \cdot 2^{-2s} + 2^{-3s}, \\ \zeta_{Q_2}(s) &= 1 + 2^{-s} + 3 \cdot 2^{-2s} + 2^{-3s}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

**Remark 1.4** 一般に  $G_p(m, n)$  の部分群の個数  $a_{p^k}(G_p(m, n)) = a_{p^k}(C_{p^m} \times C_{p^n})$  は, 直接計算も可能だが, 次の節の Lemma 2.3 に当てはめれば容易に得られる. §2 の記号では,  $\lambda = (m, n) \in \Lambda_2^+$  で,  $N_k(\lambda) = a_{p^k}(C_{p^m} \times C_{p^n})$  である.

自然数  $n$  と素数  $p$  について  $v_p(n)$  で  $n$  を割る  $p$  の最高冪指数を表すことにする. Proposition 1.1 と Proposition 1.3 を合わせると, 冪零群について次が分かり, [A], [B]

についての多くの反例が与えられる。(1.3) から分かるように, 群  $D_4$  と  $Q_2$  は共に, 対称でないゼータ関数をもつ非アーベル群であることを注意しておく.

**Theorem 1.5** (1) 自然数  $n$  が, ある奇素数  $p$  について  $v_p(n) \geq 3$  であるか, または  $v_2(n) \geq 4$  であれば, 位数  $n$  のアーベル群と非アーベル冪零群で同じゼータ関数を持つ群が存在する.

(2) 自然数  $n$  が, 任意の奇素数について  $v_p(n) \leq 2$  かつ  $v_2(n) \leq 3$  をみたすと仮定する. 位数  $n$  の冪零群の同型類は, そのゼータ関数で定まり, ゼータ関数が対称であることと群がアーベル群であることは同値である.

## §2

この節では, 「有限アーベル群の範囲では, ゼータ関数が群の同型類を定めること」を示す. Proposition 1.1 により, アーベル  $p$  群について考察すれば十分である.

良く知られているように, 有限アーベル  $p$  群は, 次の形のただ一つの群  $G_\lambda$  と同型である:

$$G_\lambda = \mathbb{Z}/p^{\lambda_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p^{\lambda_n}\mathbb{Z}, \quad (\lambda \in \Lambda_n^+), \quad (2.1)$$

$$\Lambda_n^+ = \bigsqcup_{n \geq 1} \Lambda_n^+, \quad \Lambda_n^+ = \{\lambda \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0\}.$$

以下では,  $G_\lambda$  のゼータ関数を  $\zeta_\lambda(s)$ ,  $G_\lambda$  の位数  $p^k$  の部分群の個数を  $N_k(\lambda)$  と表すことにする.  $0 \leq k \leq |\lambda|$  以外では  $N_k(\lambda) = 0$  である.

$\lambda \in \Lambda_n^+$  について, 次は容易に分かる:

$$|G_\lambda| = p^{|\lambda|}, \quad |\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad (2.2)$$

$$\zeta_\lambda(s) = \sum_{k=0}^{|\lambda|} N_k(\lambda) p^{-ks}, \quad (2.3)$$

$$N_1(\lambda) = (p^n - 1)/(p - 1) = p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p + 1, \quad (2.4)$$

$$N_k(\lambda) = N_{|\lambda|-k}(\lambda), \quad 0 \leq k \leq |\lambda|, \quad (2.5)$$

ここで, (2.5) はアーベル群の双対性の言い換えである (cf. (0.4)). また,  $N_k(\lambda)$  は  $p$  の整数係数の多項式で unimodal であることが知られている. ここで unimodal とは,

$N_k(\lambda) - N_{k-1}(\lambda)$  が  $1 \leq k \leq |\lambda|/2$  について  $p$  の非負係数の多項式であることを意味する (cf. [Bul], Remark 2.7).

$\lambda \in \Lambda_n^+$  に関する記号をいくつか準備する.

$$c_\ell(\lambda) = \lambda_{\ell+1} + \lambda_{\ell+3} + \cdots + \begin{pmatrix} \lambda_n & \text{if } n \not\equiv \ell \pmod{2} \\ \lambda_{n-1} & \text{if } n \equiv \ell \pmod{2} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq \ell \leq n-1,$$

$$c_n(\lambda) = 0, \quad c_{-\ell}(\lambda) = |\lambda| - c_\ell(\lambda), \quad (2.6)$$

特に

$$ev_\lambda = c_1(\lambda) = \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \lambda_{2i}, \quad od_\lambda = c_{-1}(\lambda) = \sum_{i=0}^{\lfloor n-1/2 \rfloor} \lambda_{2i+1}, \quad (2.7)$$

とし, 区間  $[0, |\lambda|]$  を  $(2n-1)$  個の小区間  $J_\ell(\lambda)$  に次のように分割する.

$$J_0(\lambda) = [ev_\lambda, od_\lambda], \quad (2.8)$$

$$J_\ell(\lambda) = [c_{\ell+1}(\lambda), c_\ell(\lambda)], \quad J_{-\ell}(\lambda) = [c_{-\ell}(\lambda), c_{-(\ell+1)}(\lambda)], \quad (1 \leq \ell \leq n-1).$$

さらに

$$a_\ell(\lambda) = \sum_{i=\ell+2}^n \left\lfloor \frac{i-\ell}{2} \right\rfloor \lambda_i, \quad (0 \leq \ell \leq n-1), \quad (2.9)$$

とし,  $a_{n-1}(\lambda) = 0$  と解釈する.

また,  $n \geq 2$  である  $\lambda \in \Lambda_n^+$  について,

$$\lambda^{(\ell)} = (\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \in \Lambda_{n-\ell}^+, \quad 1 \leq \ell \leq n-1, \quad (2.10)$$

とし, 簡便さのため  $\lambda' = \lambda^{(1)}$  とおく. このとき, 次が容易に分かる:

$$J_\ell(\lambda) = J_0(\lambda^{(\ell)}), \quad \ell \geq 1. \quad (2.11)$$

一般に,  $t$  の多項式  $g(t)$  について, その最高次の項を  $\text{hterm}(g(t))$ , 最高次数を  $\text{hdeg}(g(t))$  と表すことにし,  $N_k(\lambda)$  を  $p$  の多項式とみなしてこれらの記号を用いる. また,  $k$  を動かしての最高次数を  $H_n(\lambda) = \max \{ \text{hdeg}(N_k(\lambda)) \mid 0 \leq k \leq |\lambda| \}$  とおく.

**Theorem 2.1**  $p$  の多項式としての  $N_k(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda_n^+$  の最高次の項は次のように与えられる:

$$\text{hterm}(N_k(\lambda)) = C(n, \lambda; k) p^{\ell k + a_\ell(\lambda)}, \quad \text{if } k \in J_\ell(\lambda), \quad 0 \leq \ell \leq n-1,$$

$$\text{hterm}(N_k(\lambda)) = \text{hterm}(N_{|\lambda|-k}(\lambda)), \quad \text{if } |\lambda|/2 \leq k \leq |\lambda|$$

$$(\quad = C(n, \lambda; |\lambda| - k) p^{-\ell k + \ell |\lambda| + a_\ell(\lambda)}, \quad \text{if } k \in J_{-\ell}(\lambda), \quad \ell \geq 1).$$

ここで,  $n \leq 2$  のときは  $C(n, \lambda; k) = 1$  であり, 一般には

$$C(n, \lambda; k) = \begin{cases} C(n - \ell, \lambda^{(\ell)}; k) & \text{if } k \in J_\ell(\lambda) = J_0(\lambda^{(\ell)}), \ell \geq 1, \\ \sum_{i=\max\{ev_\lambda, k-\lambda_1+\lambda_2\}}^{\min\{k, od_\lambda-\lambda_1+\lambda_2\}} C(n-1, \lambda'; i) & \text{if } k \in J_0(\lambda). \end{cases} \quad (2.12)$$

さらに, 各  $\ell \geq 0$  について,  $C(n, \lambda; k), k \in J_\ell(\lambda)$  は  $|\lambda^{(\ell)}|/2$  に関して対称かつ *unimodal* であり, 端点においては  $C(n, \lambda; c_\ell(\lambda)) = 1$  である. 特に,  $k$  を動かしたときの  $N_k(\lambda)$  たちの最高次数は  $H_n(\lambda) = a_0(\lambda) = \sum_{i=2}^n \lfloor \frac{i}{2} \rfloor \lambda_i$  である.

定理の証明の前に例を記しておく.

例 2.1.  $\mu \in \Lambda_3^+$  とする. 最高次数の項  $\text{hterm}(N_k(\mu))$  は次式で与えられる:

$$\begin{aligned} p^{2k} & \quad \text{if } k \in J_2(\mu) = [0, \mu_3] = J_0(\mu^{(2)}), \\ p^{\mu_3+k} & \quad \text{if } k \in J_1(\mu) = [\mu_3, \mu_2] = J_0(\mu'), \\ C(3, \mu; k) p^{\mu_2+\mu_3} & \quad \text{if } k \in J_0(\mu) = [\mu_2, \mu_1 + \mu_3], \\ p^{|\mu|+\mu_3-k} & \quad \text{if } k \in J_{-1}(\mu) = [\mu_1 + \mu_3, \mu_1 + \mu_2], \\ p^{2(|\mu|-k)} & \quad \text{if } k \in J_{-2}(\mu) = [\mu_1 + \mu_2, |\mu|]. \end{aligned}$$

ここで,  $C(3, \mu; k), k \in J_0(\mu)$  は

$$\begin{aligned} \mu_1 \leq \mu_2 + \mu_3 \quad \text{ならば,} & \quad k - \mu_2 + 1 & \quad \text{if } \mu_2 \leq k \leq \mu_1, \\ & \quad \mu_1 - \mu_2 + 1 & \quad \text{if } \mu_1 \leq k \leq \mu_2 + \mu_3, \\ & \quad \mu_1 + \mu_3 - k + 1 & \quad \text{if } \mu_2 + \mu_3 \leq k \leq \mu_1 + \mu_3; \\ \mu_1 > \mu_2 + \mu_3 \quad \text{ならば,} & \quad k - \mu_2 + 1 & \quad \text{if } \mu_2 \leq k \leq \mu_2 + \mu_3, \\ & \quad \mu_3 + 1 & \quad \text{if } \mu_2 + \mu_3 \leq k \leq \mu_1, \\ & \quad \mu_1 + \mu_3 - k + 1 & \quad \text{if } \mu_1 \leq k \leq \mu_1 + \mu_3. \end{aligned}$$

例 2.2.  $\lambda \in \Lambda_4$  とする. 最高次数の項  $\text{hterm}(N_k(\lambda))$  は次式で与えられる:

$$\begin{aligned} p^{3k} & \quad \text{if } k \in J_3(\lambda) = [0, \lambda_4] = J_0(\lambda^{(3)}), \\ p^{2k+\lambda_4} & \quad \text{if } k \in J_2(\lambda) = [\lambda_4, \lambda_3] = J_0(\lambda^{(2)}), \\ C(3, \lambda'; k) p^{k+\lambda_3+\lambda_4} & \quad \text{if } k \in J_1(\lambda) = [\lambda_3, \lambda_2 + \lambda_4] = J_0(\lambda'), \\ C(4, \lambda; k) p^{\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_4} & \quad \text{if } k \in J_0(\lambda) = [\lambda_2 + \lambda_4, \lambda_1 + \lambda_3], \\ C(3, \lambda'; |\lambda| - k) p^{-k+|\lambda|+\lambda_3+\lambda_4} & \quad \text{if } k \in J_{-1}(\lambda) = [\lambda_1 + \lambda_3, |\lambda| - \lambda_3], \\ p^{-2k+2|\lambda|+\lambda_4} & \quad \text{if } k \in J_{-2}(\lambda) = [|\lambda| - \lambda_3, |\lambda| - \lambda_4], \\ p^{-3k+3|\lambda|} & \quad \text{if } k \in J_{-3}(\lambda) = [|\lambda| - \lambda_4, |\lambda|]. \end{aligned}$$

ここで,  $C(3, \lambda'; k)$  は例 2.1 で与えられていて,  $C(4, \lambda; k)$ ,  $k \in J_0(\lambda)$  は

$$\begin{aligned} \lambda_2 + \lambda_3 \leq \lambda_1 + \lambda_4 \text{ ならば, } & k - \lambda_2 - \lambda_4 + 1 && \text{if } \lambda_2 + \lambda_4 \leq k \leq \lambda_2 + \lambda_3, \\ & \lambda_3 - \lambda_4 + 1 && \text{if } \lambda_2 + \lambda_3 \leq k \leq \lambda_1 + \lambda_4, \\ & \lambda_1 + \lambda_3 + 1 - k && \text{if } \lambda_1 + \lambda_4 \leq k \leq \lambda_1 + \lambda_3; \\ \lambda_1 + \lambda_4 \leq \lambda_2 + \lambda_3 \text{ ならば, } & k - \lambda_2 - \lambda_4 + 1 && \text{if } \lambda_2 + \lambda_4 \leq k \leq \lambda_1 + \lambda_4, \\ & \lambda_1 - \lambda_2 + 1 && \text{if } \lambda_1 + \lambda_4 \leq k \leq \lambda_2 + \lambda_3, \\ & \lambda_1 + \lambda_3 + 1 - k && \text{if } \lambda_2 + \lambda_3 \leq k \leq \lambda_1 + \lambda_3. \end{aligned}$$

例 2.3.  $\lambda \in \Lambda_5$  とする. 最高次数の項  $\text{hterm}(N_k(\lambda))$  は次式で与えられる:

$$\begin{aligned} p^{4k} & \text{if } k \in J_4(\lambda) = [0, \lambda_5] = J_0(\lambda^{(4)}), \\ p^{3k+\lambda_5} & \text{if } k \in J_3(\lambda) = [\lambda_5, \lambda_4] = J_0(\lambda^{(3)}), \\ C(3, \lambda^{(2)}; k) p^{2k+\lambda_4+\lambda_5} & \text{if } k \in J_2(\lambda) = [\lambda_4, \lambda_3 + \lambda_5] = J_0(\lambda^{(2)}), \\ C(4, \lambda^{(1)}; k) p^{k+\lambda_3+\lambda_4+2\lambda_5} & \text{if } k \in J_1(\lambda) = [\lambda_3 + \lambda_5, \lambda_2 + \lambda_4] = J_0(\lambda'), \\ C(5, \lambda; k) p^{|\lambda|+\lambda_4+\lambda_5} & \text{if } k \in J_0(\lambda) = [\lambda_2 + \lambda_4, \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_5], \\ C(4, \lambda^{(1)}; |\lambda| - k) p^{-k+|\lambda|+\lambda_3+\lambda_4+2\lambda_5} & \text{if } k \in J_{-1}(\lambda) = [\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_5, |\lambda| - (\lambda_3 + \lambda_5)], \\ C(3, \lambda^{(2)}; |\lambda| - k) p^{-2k+2|\lambda|+\lambda_4+\lambda_5} & \text{if } k \in J_{-2}(\lambda) = [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4, |\lambda| - \lambda_4], \\ p^{-3k+3|\lambda|+\lambda_5} & \text{if } k \in J_{-3}(\lambda) = [|\lambda| - \lambda_4, |\lambda| - \lambda_5], \\ p^{-4k+4|\lambda|} & \text{if } k \in J_{-4}(\lambda) = [|\lambda| - \lambda_5, |\lambda|]. \end{aligned}$$

ここで,  $C(3, \lambda^{(2)}; k)$ ,  $C(4, \lambda^{(1)}; k)$  は, 例 2.1 と 例 2.2 で与えたものであり, 新しく登場する  $C(5, \lambda; k)$ ,  $k \in J_0(\lambda)$  も似たような形に (より複雑だが) 具体的に書き下せる.

**Remark 2.2**  $\lambda \in \Lambda_n^+$  に対応する  $N_k(\lambda)$  の最高次係数は,  $k \in J_0(\lambda)$  で新しく  $C(n, \lambda; k)$  たちが現れる. 一方,  $\ell \geq 1$  について,  $k \in J_\ell(\lambda)$  の係数は, 小さいランクの  $\lambda^{(\ell)} \in \Lambda_{n-\ell}^+$  に対応する最高次数の係数  $C(n-\ell, \lambda^{(\ell)}; k)$ ,  $k \in J_0(\lambda^{(\ell)})$  が, そのまま係数として現れている. 一種のフラクタル性をもって係数が現れるのは面白い現象だと思う.

上の構成では,  $J_\ell(\lambda)$  が 1 点のこともあるが,  $J_{n-1}(\lambda) = [0, \lambda_n]$  は必ず 2 個以上の整数点を含み,  $c_{\ell+1}(\lambda) < c_{\ell-1}(\lambda)$ ,  $2 \leq \ell \leq n-2$ , であるから, 一点だけの区間は高々ひとつおきである.

**Lemma 2.3**  $\lambda \in \Lambda_n^+$  に対し,  $\lambda' = (\lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \Lambda_{n-1}^+$  とすると,

$$N_k(\lambda) = \sum_{i=0}^k p^i N_i(\lambda') - \sum_{i=|\lambda|+1-k}^{|\lambda|} p^i N_i(\lambda'), \quad 0 \leq k \leq |\lambda|, \quad (2.13)$$

但し, 2 つ目の和は  $\lambda_1 + 1 \leq k \leq |\lambda|$  のときだけ現れる.



*Proof.*  $\mu \in \Lambda_n^+$  が  $\mu_1 = \cdots = \mu_i > \mu_{i+1}$  ( $i \geq 1$ ) をみたすとき, Stehling は次の等式を示した ([St, Theorem 1]) :

$$N_k(\mu) = N_k(\mu^*) + p^{|\mu|-k} N_{k-\mu_i}(\mu^\vee), \quad (2.14)$$

但し,  $\mu^* \in \Lambda_n^+$  は  $\mu_i^* = \mu_i - 1$  かつ  $\mu_j^* = \mu_j$  ( $j \neq i$ ) で定義し,  $\mu^\vee = (\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n) \in \Lambda_{n-1}^+$  とする. 任意の  $\lambda \in \Lambda_n^+$  に対して,  $\tilde{\lambda} = (\lambda_1 + 1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \Lambda_n^+$  をおき,  $\lambda' = (\lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \Lambda_{n-1}^+$  とする. このとき  $\tilde{\lambda}^* = \lambda$  かつ  $\tilde{\lambda}^\vee = \lambda'$  であるから, (2.14) を適用すると

$$N_j(\tilde{\lambda}) = N_j(\lambda) + p^{|\lambda|+1-j} N_{j-\lambda_1-1}(\lambda'). \quad (2.15)$$

$N_j(\tilde{\lambda}) = N_{|\lambda|+1-j}(\tilde{\lambda})$  に再び (2.14) を適用して

$$N_j(\tilde{\lambda}) = N_{|\lambda|+1-j}(\lambda) + p^j N_{|\lambda|-j}(\lambda') = N_{j-1}(\lambda) + p^j N_j(\lambda'). \quad (2.16)$$

(2.15) と (2.16) の右辺を  $j = 1$  から  $k$  まで加えると,  $N_j(k)$ ,  $1 \leq j \leq k-1$  は打ち消されて

$$N_k(\lambda) + \sum_{j=1}^k p^{|\lambda|+1-j} N_{j-\lambda_1-1}(\lambda') = N_0(\lambda) + \sum_{j=1}^k p^j N_j(\lambda') \left( = \sum_{j=0}^k p^j N_j(\lambda') \right),$$

この左辺の和を  $|\lambda| + 1 - j = i$  と変えて移項し, 整理すると, 求める式が得られる. ■

Theorem 2.1 は Lemma 2.3 を用いて帰納法で示す.  $n = 1, 2$  については, まず,  $r \in \Lambda_1^+$  について,  $G_r$  は位数  $p^r$  の巡回群であるから,

$$N_k(r) = 1, \quad \text{for } k \in J_0(r) = [0, r]. \quad (2.17)$$

次に,  $\mu \in \Lambda_2^+$  については, Lemma 2.3 から

$$\text{hterm}(N_k(\mu)) = \begin{cases} p^k & \text{for } k \in J_1(\mu) = [0, \mu_2] \\ p^{\mu_2} & \text{for } k \in J_0(\mu) = [ev_\mu, od_\mu] = [\mu_2, \mu_1] \\ p^{|\mu|-k} & \text{for } k \in J_{-1}(\mu) = [\mu_1, |\mu|]. \end{cases} \quad (2.18)$$

$n \geq 3$  について, 次の補題を準備しておく.

**Lemma 2.4**  $n \geq 3$  とし, Theorem 2.1 は  $\Lambda_{n-1}^+$  の元については確立していると仮定し, 任意の  $\lambda \in \Lambda_n^+$  をとる. このとき  $p^i N_i(\lambda')$  の最高次数  $\text{hdeg}(p^i N_i(\lambda'))$  は,  $i \in [0, ev_\lambda]$  について狭義の単調増加,  $i \in [ev_\lambda, od_\lambda - \lambda_1 + \lambda_2]$  について一定の値  $a_0(\lambda)$  をとり,  $i \in [od_\lambda - \lambda_1 + \lambda_2, |\lambda']]$  について狭義の単調減少である.

*Proof.* 仮定から,  $\lambda' \in \Lambda_{n-1}^+$  について Theorem 2.1 を適用できる.

$i \in [0, c_{-1}(\lambda')]$  について, 最高次数  $\text{hdeg}(p^i N_i(\lambda'))$  は狭義の単調増加で, それらの最高値は  $c_{-1}(\lambda') = ev_\lambda$  において,

$$c_{-1}(\lambda') + a_0(\lambda') = c_1(\lambda) + a_1(\lambda) = a_0(\lambda) \quad (2.19)$$

である (cf. (2.23), (2.25)).

$i \in J_{-1}(\lambda') = [c_{-1}(\lambda'), c_{-2}(\lambda')]$  について, 最高次数  $\text{hdeg}(p^i N_i(\lambda'))$  は一定値

$$\text{hdeg}(p^i N_i(\lambda')) = |\lambda'| + a_1(\lambda') = a_0(\lambda) \quad (2.20)$$

であり (cf. (2.24)),

$$c_{-2}(\lambda') = |\lambda'| - c_2(\lambda') = od_\lambda - \lambda_1 + \lambda_2. \quad (2.21)$$

$i \in [c_{-2}(\lambda'), |\lambda'|]$  について, 最高次数  $\text{hdeg}(p^i N_i(\lambda'))$  は狭義の単調減少で, それらの最高値は  $i = c_{-2}(\lambda')$  において

$$-c_{-2}(\lambda') + 2|\lambda'| + a_2(\lambda') = |\lambda'| + c_2(\lambda') + a_2(\lambda') = a_0(\lambda)$$

である (cf. (2.24), (2.25)). ■

上の証明で, 以下のような関係式を使った. これらは Theorem 2.1 の証明でも使われる.

$$c_{-1}(\lambda') = |\lambda'| - c_1(\lambda') = ev_\lambda, \quad c_{\ell-1}(\lambda') = c_\ell(\lambda), \quad (\ell \geq 1) \quad (2.22)$$

$$a_{\ell-1}(\lambda') = a_\ell(\lambda), \quad (\ell \geq 1), \quad (2.23)$$

$$a_0(\lambda) = \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5 + 3\lambda_6 + 3\lambda_7 + \cdots = |\lambda'| + a_1(\lambda') \quad (2.24)$$

$$a_\ell(\lambda) + c_\ell(\lambda) = a_{\ell-1}(\lambda). \quad (2.25)$$

*Proof of Theorem 2.1.* 定理は  $n-1$  まで成立していると仮定し, 任意の  $\lambda \in \Lambda_n^+$  をとっておく. Lemma 2.3 の式に合わせて

$$(pos)_k = \sum_{i=0}^k p^i N_i(\lambda'), \quad (neg)_k = \sum_{i=|\lambda|+1-k}^{|\lambda'|} p^i N_i(\lambda') \quad (2.26)$$

とおく. ここで  $(neg)_k$  は  $k > \lambda_1$  のときだけ現れる. Lemma 2.4 から, 最高次数について

$$\text{hdeg}((pos)_k) = a_0(\lambda) \iff k \geq ev_\lambda, \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \text{hdeg}((neg)_k) = a_0(\lambda) &\iff k > \lambda_1 \text{ and } |\lambda| - k + 1 \leq od_\lambda - \lambda_1 + \lambda_2 \\ &\iff k \geq ev_\lambda + \lambda_1 - \lambda_2 + 1. \end{aligned} \quad (2.28)$$

が分かり、条件 (2.28) は  $k > \lambda_1$  かつ  $k > ev_\lambda$  を与える。

Case 1 :  $[k \leq ev_\lambda]$  の場合

$k \in J_{\ell-1}(\lambda') = J_\ell(\lambda)$  となる  $\ell \geq 1$  がとれて、

$$\begin{aligned} \text{hterm}((pos)_k) &= \text{hterm}(p^k N_k(\lambda')) = C(n-1, \lambda'; k) p^{\ell k + a_{\ell-1}(\lambda')} \\ &= C(n-1, \lambda'; k) p^{\ell k + a_\ell(\lambda)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

もし  $k \leq \lambda_1$  ならば、(2.29) が  $\text{hterm}(N_k(\lambda))$  を与える。  $k > \lambda_1$  と仮定する。  $c_{\ell-1}(\lambda') \geq k$  であるから、

$$|\lambda| - k + 1 \geq |\lambda| - c_{\ell-1}(\lambda') + 1 = |\lambda'| - (c_{(\ell-1)}(\lambda') - \lambda_1 - 1) \geq c_{-(\ell+1)}(\lambda')$$

であり、

$$\begin{aligned} \text{hdeg}((neg)_k) &= \text{hdeg}(p^{|\lambda|-k+1} N_{|\lambda|-k+1}(\lambda')) \\ &\leq -\ell(|\lambda| - k + 1) + (\ell + 1)|\lambda'| + a_{\ell+1}(\lambda') = -\ell\lambda_1 + |\lambda'| + \ell(k-1) + a_{\ell+2}(\lambda) \end{aligned} \quad (2.30)$$

と評価される。(2.29) と (2.30) を比べて

$$\begin{aligned} \text{hdeg}((pos)_k) - \text{hdeg}((neg)_k) &\geq a_\ell(\lambda) - a_{\ell+2}(\lambda) - |\lambda'| + \ell\lambda_1 + \ell \\ &= -(\lambda_2 + \cdots + \lambda_{\ell+1}) + \ell\lambda_1 + \ell > 0 \end{aligned}$$

を得る。よって  $k > \lambda_1$  か否かに依らず、  $k \leq ev_\lambda$  においては、

$$\begin{aligned} \text{hterm}(N_k(\lambda)) &= \text{hterm}(p^k N_k(\lambda')) \\ &= C(n-1, \lambda'; k) p^{\ell k + a_\ell(\lambda)} \quad (k \in J_\ell(\lambda), \ell \geq 1). \end{aligned}$$

さらに、  $\ell \geq 2$  について  $k \in J_\ell(\lambda)$  の場合は、

$$\begin{aligned} C(n, \lambda; k) &= C(n-1, \lambda'; k) = C(n-1-(\ell-1), \lambda'^{(\ell-1)}; k) \\ &= C(n-\ell, \lambda^{(\ell)}; k), \end{aligned}$$

であり、特に端点において

$$C(n, \lambda; c_\ell(\lambda)) = C(n-1, \lambda'; c_{\ell-1}(\lambda')) = 1, \quad \ell \geq 2.$$

Case 2 :  $[k \geq od_\lambda]$  の場合

$N_k(\lambda) = N_{|\lambda|-k}(\lambda)$  かつ  $|\lambda| - k \leq ev_\lambda$  であるから、Case1 に帰着する。ある  $\ell \geq 1$  について  $k \in J_{-\ell}(\lambda)$ ,  $|\lambda| - k \in J_\ell(\lambda)$  であり、

$$\begin{aligned} \text{hterm}(N_k(\lambda)) &= C(n, \lambda; |\lambda| - k) p^{\ell(|\lambda|-k) + a_\ell(\lambda)} \\ &= C(n-\ell, \lambda^{(\ell)}; |\lambda| - k) p^{\ell(|\lambda|-k) + a_\ell(\lambda)}. \end{aligned}$$

Case 3 :  $[ev_\lambda \leq k \leq ev_\lambda + \lambda_1 - \lambda_2]$  の場合  
(2.27) と (2.28) から次を得る.

$$\begin{aligned} \text{hdeg}(N_k(\lambda)) &= \text{hdeg}((pos)_k) = a_0(\lambda), \\ \text{htermcoeff}(N_k(\lambda)) &= \sum_{i=ev_\lambda}^{\min\{k, od_\lambda - \lambda_1 + \lambda_2\}} C(n-1, \lambda'; i). \end{aligned}$$

Case 4 :  $[ev_\lambda + \lambda_1 - \lambda_2 + 1 \leq k \leq od_\lambda]$  の場合

$\text{hdeg}((pos)_k) = \text{hdeg}((neg)_k) = a_0(\lambda)$  であり,  $|\lambda| - k + 1 \geq ev_\lambda + 1$  である. そこで (形式的) 最高次項の係数は

$$\begin{aligned} &\text{htermcoeff}((pos)_k) - \text{htermcoeff}((neg)_k) \\ &= \sum_{i=ev_\lambda}^{\min\{k, od_\lambda - \lambda_1 + \lambda_2\}} C(n-1, \lambda'; i) - \sum_{i=|\lambda| - k + 1}^{od_\lambda - \lambda_1 + \lambda_2} C(n-1, \lambda'; i). \end{aligned} \quad (2.31)$$

$C(n-1, \lambda'; i)$  は  $i \in J_{-1}(\lambda') = [ev_\lambda, od_\lambda - \lambda_1 + \lambda_2]$  において対称であり,

$$\begin{aligned} [(neg)_k \text{の項数}] &= od_\lambda - \lambda_1 + \lambda_2 - |\lambda| + k = k - ev_\lambda - \lambda_1 + \lambda_2 \\ &< \min\{k, od_\lambda - \lambda_1 + \lambda_2\} - ev_\lambda + 1 = [(pos)_k \text{の項数}] \end{aligned}$$

であるから, (2.31) において  $(pos)_k$  の一部が残る. よって  $\text{hdeg}(N_k(\lambda)) = a_0(\lambda)$  でその係数は

$$\sum_{i=k - \lambda_1 + \lambda_2}^{\min\{k, od_\lambda - \lambda_1 + \lambda_2\}} C(n-1, \lambda'; i) > 0.$$

Case 3 と Case 4 から,  $k \in J_0(\lambda) = [ev_\lambda, od_\lambda]$  について

$$\begin{aligned} \text{hterm}(N_k(\lambda)) &= C(n, \lambda; k)p^{a_0(\lambda)}, \\ C(n, \lambda; k) &= \sum_{\max\{ev_\lambda, k - \lambda_1 + \lambda_2\}}^{\min\{k, od_\lambda - \lambda_1 + \lambda_2\}} C(n-1, \lambda'; k). \end{aligned} \quad (2.32)$$

(2.32) と帰納法の仮定から  $C(n, \lambda; k)$  の  $k \in J_0(\lambda)$  における unimodal 性と対称性が分り, 端点  $c_1(\lambda) = ev_\lambda = c_{-1}(\lambda')$  において

$$C(n, \lambda; c_1(\lambda)) = C(n-1, \lambda'; c_1(\lambda)) = C(n-1, \lambda', c_{-1}(\lambda')) = 1.$$

以上より, Theorem 2.1 が証明された. ■

最高次係数の考察は, 帰納法を成立させるために必要である. アーベル  $p$  群のゼータ関数が群を定めることの証明には, 次数だけ観察すれば十分であり, 次の結果を得る.

**Theorem 2.5** ゼータ関数  $\zeta_\lambda(s)$  は  $\lambda \in \Lambda^+$  を決定する.

*Proof.*  $\zeta_\lambda(s) = \zeta_\mu(s)$  と仮定すると, ある  $n$  について  $\Lambda_n^+$  が  $\lambda$  と  $\mu$  を共に含み,  $|\lambda| = |\mu|$  である.  $n \leq 2$  のときは, (2.17), (2.18) により OK.  $n \geq 3$  として  $\lambda_n < \mu_n$  と仮定する.  $k = \lambda_n + 1 \in J_{n-2}(\lambda) \cap J_{n-1}(\mu)$  について  $N_k(\lambda) = N_k(\mu)$  の最高次の次数は Theorem 2.1 によつて  $(n-2)(\lambda+1) + \lambda_n = (n-1)(\Lambda_n+1)$  となるが, この式は不合理. よつて  $\lambda_n = \mu_n$ . 以下順に添え字の大きい方から, 見ていくと  $\lambda = \mu$  を得る. ■

任意の有限アーベル群は, シロー  $p$  部分群の直積になるので, オイラー積分解することと上の定理から目的の主張が得られる.

**Theorem 2.6** 有限アーベル群の範囲で, ゼータ関数は群の同値類を定める.

**Remark 2.7** 有限アーベル群の数え上げの問題は古典的な問題であり, 対称関数との関連も例えば L. M. Butler (Memoire AMS, [Bu2]) に詳しい.  $G_\lambda$  の部分群  $H$  で  $H \cong G_\nu$ ,  $G_\lambda/H \cong G_\mu$  なるものの個数  $g_{\mu\nu}^\lambda(p)$  については, G. Hall により 1950 年代に研究され,  $p$  の非負整数多項式になることが知られていた. これらの数  $g_{\mu\nu}^\lambda(p)$  は Hall-Littlewood 対称多項式  $P_\lambda(x; t)$  の積の係数として現れる. この多項式たちは,  $A_n$  型ルート系に付随する直交多項式系と考えられ, その後, さまざまなルート系に対応して一般的直交多項式系が研究されている (例えば [Mac1], [Mac2] など). これらはまた,  $p$  進代数群や等質空間上の球関数の主要部分として登場する.  $N_k(\lambda)$  の unimodality は Hall-Littlewood 多項式に関する結果を用いて L. M. Butler が示している ([Bu1]).

**Remark 2.8**  $\lambda \in \Lambda_n^+$  に対して, 対角行列  $D_\lambda = \text{Diag}(p^{\lambda_1}, \dots, p^{\lambda_n}) \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$  を定めておく.

$T \in M_n(\mathbb{Z}_p)$  に対する局所特異級数  $b_p(T; s)$  (Siegel 特異級数の類似. A. Terras), 局所密度  $\alpha_p(I_m, T)$  ( ${}^tAB = T$  となる  $(A, B) \in M_{mn}(\mathbb{Z}_p)^2$  の密度,  $I_m$  は単位行列,  $m \geq n$ ) について次が知られている ([BB] で特別な場合, 一般には [Sa]).

$$b_p(D_\lambda; s) = \zeta_\lambda(s-n) \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (1 - p^{-(s-i)}), \quad b_p(D_\lambda; m) = \alpha_p(I_m, D_\lambda).$$

定理 2.5 から  $\lambda$  が異なれば,  $b_p(D_\lambda; s)$  が異なることが帰結される. ここで  $b_p(T; s)$  や  $\alpha_p(I_m, T)$  は, その定義から  $T$  の  $GL_n(\mathbb{Z}_p) \backslash M_n(\mathbb{Z}) / GL_n(\mathbb{Z}_p)$  における類で値が決まるので, 上のような対角型だけ考えれば十分である. これらの量について詳しくは [Sa] を参照のこと.

## §3

§2 の記号を踏襲する. 特に,  $\lambda \in \Lambda^+$  について  $G_\lambda$  は (2.1) で定義された位数  $p^{|\lambda|}$  のアーベル  $p$  群とする. この節では,  $G_\lambda$  と非同型だが同じゼータ関数をもつ群がどのような  $\lambda \in \Lambda^+$  に対して存在し得るかを考える.

**Proposition 3.1** (1)  $\lambda \in \Lambda_n^+$  とし,  $n = 1$  または  $\lambda_1 = 1$  と仮定する. このとき, 群  $G$  のゼータ関数が  $\zeta_\lambda(s)$  に一致すれば,  $G$  は  $G_\lambda$  と同型である.

(2)  $n \geq 2$  で  $\lambda \in \Lambda_n^+$  とする.  $\lambda_1 > \lambda_2$  かつ  $p = 2$  ならば  $\lambda_1 \geq 3$  を仮定し, 以下の群を定義する:

$$\widetilde{G}_\lambda = \langle a_1, \dots, a_n \mid \begin{array}{l} a_i^{p^{\lambda_i}} = 1 \ (1 \leq i \leq n), \ a_n a_1 a_n^{-1} = a_1^{1+p^{\lambda_1-1}} \\ a_i a_j = a_j a_i \text{ unless } \{i, j\} = \{1, n\} \end{array} \rangle. \quad (3.1)$$

このとき, 非アーベル群  $\widetilde{G}_\lambda$  は  $G_\lambda$  と同じゼータ関数  $\zeta_\lambda(s)$  を持つ.

*Proof.* (1)  $n = 1$  の場合の結果は Proposition 1.1 から従う. 次に  $\lambda = (1^n)$ ,  $n \geq 2$  とし, ある群  $G$  について  $\zeta_G(s) = \zeta_\lambda(s)$  と仮定する. まず

$$a_p(G) = N_1(\lambda) = \frac{p^n - 1}{p - 1},$$

から  $G$  の exponent は  $p$  と分かる.  $G$  の中心を  $Z(G)$ ,  $a \in G$  の中心化群を  $Z_G(a)$  と表す.  $G$  の位数  $p^2$  の部分群は  $C_p \times C_p$  と同型になり, その個数は

$$\begin{aligned} a_{p^2}(G) &= \frac{(|Z(G)| - 1)(p^n - p)}{(p^2 - 1)(p^2 - p)} + \sum_{a \in G \setminus Z(G)} \frac{|Z_G(a)| - p}{(p^2 - 1)(p^2 - p)} \\ &\leq \frac{(p^r - 1)(p^n - p) + (p^n - p^r)(p^{n-1} - p)}{(p^2 - 1)(p^2 - p)}, \end{aligned}$$

と評価される, 但し,  $p^r = |Z(G)|$  とする. 従って

$$\begin{aligned} N_2(\lambda) - a_{p^2}(G) &\geq \frac{(p^n - 1)(p^n - p) - \{(p^r - 1)(p^n - p) + (p^n - p^r)(p^{n-1} - p)\}}{(p^2 - 1)(p^2 - p)} \\ &= \frac{(p^{2n} - p^{n+r})(1 - p^{-1})}{(p^2 - 1)(p^2 - p)}. \end{aligned}$$

従って, 等式  $a_{p^2}(G) = N_2(\lambda)$  が  $r = n$  を導く. 言い換えれば  $G$  は可換, よって  $G \cong G_\lambda$  (the elementary abelian group of rank  $n$ ) となる.

(2) の証明の方針は §1 の  $G_p(m, n)$  in §1 の場合と同様である. 実際,  $\lambda = (m, n) \in \Lambda_2^+$  について  $G_p(m, n) \cong \widetilde{G}_\lambda$  である. (2) の条件をみたす  $\lambda \in \Lambda_n^+$  をとり,  $\widetilde{G}_\lambda$  を構成する. 任意の  $x \in \widetilde{G}_\lambda$  は,

$$x = a_1^{e_1} \cdots a_n^{e_n}, \quad 0 \leq e_i < p^{\lambda_i} \ (1 \leq i \leq n),$$

とかけて,

$$\text{ord}(x) = p^{\lambda_1} \quad \text{if and only if } p \nmid e_1$$

である. また,

$$x^r = a_1^{e_1(r + \frac{r(r-1)}{2}e_n p^{\lambda_1 - 1})} \prod_{i \geq 2} a_i^{r e_i}, \quad (r \geq 1),$$

$$a_n x a_n^{-1} = a_1^{e_1(1+p^{\lambda_1-1})} a_2^{e_2} \cdots a_n^{e_n} = x^{1+p^{\lambda_1-1}}.$$

よって, 位数  $p^{\lambda_1}$  の任意の元  $x \in \widetilde{G}_\lambda$  について,  $\langle x \rangle$  は正規部分群をなし,  $\widetilde{G}_\lambda / \langle x \rangle \cong C_{p^{\lambda_2}} \times \cdots \times C_{p^{\lambda_n}}$  である. よって  $\langle x \rangle$  を含む  $\widetilde{G}_\lambda$  の部分群は  $C_{p^{\lambda_2}} \times \cdots \times C_{p^{\lambda_n}}$  の部分群と一対一に対応する. また,  $\widetilde{G}_\lambda$  の部分群が位数  $p^{\lambda_1}$  の元を含まなければ, それはアーベル群  $\langle a_1^p, a_2, \dots, a_n \rangle \cong C_{p^{\lambda_1-1}} \times C_{p^{\lambda_2}} \times \cdots \times C_{p^{\lambda_n}}$  に含まれる.

アーベル群  $G_\lambda$  の部分群についても上と同様な状況になっているので,  $\widetilde{G}_\lambda$  の部分群たちと  $G_\lambda$  の部分群たちの間に自然な一対一対応があることが分かり, 両者のゼータ関数は一致する. ■

**Remark 3.2** 上に与えた群  $\widetilde{G}_\lambda$  のゼータ関数は, アーベル群のゼータ関数と一致しているので, 対称性をみたく. これを利用すると, ゼータ関数が対称性をもつような冪零群の例は沢山作れる. しかし, 次のようなことはまだ分かっていない:

- そのゼータ関数は対称性をもつが, アーベル群のゼータ関数には一致しないような非アーベル ( $p$ ) 群が存在するかどうか,
- 非アーベル  $p$  群で非同型だが同じゼータ関数をもつものが複数存在するかどうか.

## 参考文献

- [BB] J. Beineke and D. Bump: A certain formula for divisor functions associated to lattices, *Forum Math.* **18** (2006), 869 – 906.
- [Bu1] L. M. Butler: A unimodality result in the enumeration of subgroups of a finite groups, *Proc. AMS* **101**(1987), 771 – 775.
- [Bu2] L. M. Butler: Subgroup lattices and symmetric functions, *Memoires AMS* **539**(1994).
- [H] Y. Hironaka: Zeta functions of finite groups by enumerating subgroups, preprint, Math arXiv:1410.4326.
- [Mac1] I. G. Macdonald: *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Univ. Press (1979).

- [Mac2] I. G. Macdonald: Orthogonal polynomials associated with root systems, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* **45**(2000), Article B45a.
- [Sa] F. Sato: Fourier coefficients of Eisenstein series of  $GL_n$ , local densities of square matrices and subgroups of finite abelian groups, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **55**(2006), 77 – 95.
- [St] T. Stehling: On computing the number of subgroups of a finite abelian group, *Combinatorica* **12**(1992), 475 – 479.

Yumiko HIRONAKA

Department of Mathematics  
Faculty of Education and Integrated Sciences  
Waseda University  
Nishi-Waseda, Tokyo 169-8050, JAPAN  
e-mail : hironaka@waseda.jp