数理解析研究所講究録
第1965巻 2015年 45-49

Eisenstein series and E-polynomials

山形大学・地域教育文化学部　三枝崎　剛
Tsuyoshi Miezaki
Faculty of Education, Art and Science
Yamagata University

1 はじめに

有限群 G_8 と無限群 $SL_2(\mathbb{Z})$ を考える．G_8 は [9] のリストの8番目の群を表す．これらの群は，下の表に与えられた空間へ自然に作用する．作用が与えられると，それで“不変”な元を考えることは，自然な問題で，それぞれ不変式とモジュラー形式と名付けられており，数多くの研究を持つ．

	有限	$\leftrightarrow$	無限
群	$G_9 < GL(2,\mathbb{C})$	$\leftrightarrow$	$SL_2(\mathbb{Z})$
群の作用する空間	$\mathbb{C}[x_1, x_2]$	$\leftrightarrow$	$\mathbb{H}$ 上の正則関数

これら不変元の構成法の一つとして，組合せ論対象である，符号と格子を用いるものがある．Type II 符号 $C(< \mathbb{F}_2^n)$ が与えられたとしよう．ここで，Type II とは $C = C^\perp$ かつ全ての元の重さが4の倍数となる符号．ここで，重さ $\mathrm{wt}(c)$ とは c の座標で1のものの個数．更に C_m を C の元で重さ m の集合とおくと

$$w_C(x,y) := \sum_{c\in C} x^{n-\mathrm{wt}(c)} y^{\mathrm{wt}(c)} = \sum_{m\geq 0} |C_m| x^{n-m} y^m$$

と斉次多項式が定義される．これが G_8 の不変式となる．

一方で，Type II 格子 L が与えられたとしよう．ここで，Type II とは $L = L^\sharp$ かつ全ての元のノルムが偶数となる格子．更に L_m を L のノルム m の元の集合とおくと

$$\theta_L(\tau) := \sum_{x\in L} q^{(x,x)/2} = \sum_{m\geq 0} |L_m| q^m,\ q^{2\pi i\tau}, \tau \in \mathbb{H}$$

のように，$\mathbb{H}$ 上の関数が定義される．これが $SL_2(\mathbb{Z})$ の“不変”元，モジュラー形式である．

符号と格子は数多くの類似が存在し，それを通して，不変式とモジュラー形式にも多くの類似が存在すると期待され，実際いくつか発見されている．講演では特別な不変式とモジュラー形式である，E-多項式と Eisenstein 級数の新たな類似性を報告した．

以下では，セクション2において，Eisenstein 級数と E-多項式の定義を述べ，大浦学氏によって発見された，これらの概念に関するの類似を見る [7]．セクション3において，講演の目的であった Eisenstein 級数と E-多項式の新たな類似を述べる [2].

2 Eisenstein 級数と E-多項式

2.1 Eisenstein 級数

Eisenstein 級数は以下で定義され，そのフーリエ展開は次のようになる：

$$E_k(z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ (m,n)=1}} \frac{1}{(m\tau+n)^k}.$$
$$= 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n.$$

ここで，B_k は k 番目のベルヌーイ数，$\sigma_{k-1}(n)$ は約数関数である．モジュラー形式の基本的な例である．

さて，Eisenstein 級数の著しい性質として次の体積公式がある．

事実 2.1 (Siegel)**.** Let $k \equiv 0 \pmod 4$.

$$E_k(\tau) = (\text{Const.}) \times \left(\sum_{\{\text{all } 2k\text{-dim. Type II lattices}\}/\sim} \frac{\theta_L(\tau)}{|\mathrm{Aut}(L)|} \right).$$

例えば，L を E_8-格子とする．L は rank 8 の Type II 格子として一意的であることを用いると，体積公式から

$$E_4(\tau) = \theta_L(\tau).$$

2.2 Eisenstein 多項式（E-多項式）

群 $G_8 < GL(2, \mathbb{C})$ を考える．それの定義や不変式環などを以下に纏めた：

- $G_8 = \left\langle T_1 = \frac{\zeta_8}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \right\rangle.$
- $|G_8| = 96.$
- $G_9 \curvearrowright \mathbb{C}[x,y].$
- $\mathbb{C}[x,y]^{G_9} = \mathbb{C}[f_8, f_{12}]$, $f_8 = x^8 + 14x^4y^4 + y^8$, $f_{12} = x^{12} - 33x^8y^4 - 33x^4y^8 + y^{12}.$

大浦学氏は，[6] において Eisenstein 多項式 (E-多項式) という概念を導入した．

定義 2.1 ([6])**.** φ_n が Eisenstein 多項式 (E-多項式)$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\varphi_n := \frac{1}{|G_8|} \sum_{\sigma \in G_8} \sigma \cdot x^n.$$

これが Eisenstein 多項式と名付けられた理由の一つは，事実 2.1（体積公式）の類似である次の性質が成立する事による：

命題 2.1 ([5]). Assume $m \equiv 0 \pmod 8$. Then

$$\varphi_m = (\text{Const.}) \left(\sum_{\substack{\{\text{all TypeII codes} \\ \text{of length } m\}/\sim}} \frac{w_C(x,y)}{|\mathrm{Aut}(C)|} \right).$$

これも体積公式と呼ぶことにしよう．例えば，長さ 8 に拡大ハミング符号 H_8 は Type II 符号として一意的なので，

$$\widetilde{\varphi_8} = x^8 + 14x^4y^4 + y^8 = w_{H_8}(x,y).$$

ただし $\widetilde{\varphi_m}$ は，x^n の係数を 1 に正規化したものを表す．

2.3 Eisenstein 級数 ↔ E-多項式

Eisenstein 級数と E-多項式の間には，体積公式のような類似が数多く存在すると期待される．このセクションでは，大浦学氏により発見されたものを紹介する [7]．そのために，theta map を以下の用に導入する：

- M :=ring of modular forms for $SL(2,\mathbb{Z})$.
- $M = \mathbb{C}[E_4, E_6]$.

事実 2.2 (Theta map).

$$\begin{array}{rccc} Th: & \mathbb{C}[x,y]^{G_8} & \longrightarrow & M \\ & \cup & & \cup \\ & x & \longmapsto & \theta_{\mathbf{00}}(\mathbf{2}\tau) \\ & y & \longmapsto & \theta_{\mathbf{10}}(\mathbf{2}\tau) \end{array}$$

Eisenstein 級数の零点に関して次が知られている：

事実 2.3. 1. E_k の零点は，基本領域の円周上に存在 [8].

2. E_k の零点は E_{k+12} の零点とインターレースする [4].

これらに関する類似として，大浦学氏は次の予想を提出した：

予想 2.1 ([7]). 1. φ_{24m} の零点は，基本領域の円周上に存在.

2. $Th(\widetilde{\varphi_{24m}})$ の零点は $Th(\widetilde{\varphi_{24(m+1)}})$ の零点とインターレースする.

3 Eisenstein 級数と E-多項式の新たな類似

3.1 Zeros

講演では，E-多項式のゼータ多項式についても類似した性質を持つことを報告した．ここで，斉次多項式のゼータ多項式とは次で定義される：

定義 3.1 ([1]). q を素数冪，$f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ を斉次多項式とおく．このとき次を満たす多項式 $Z_f(T) \in \mathbb{C}[T]$ が唯一つ存在する：

$$\frac{Z_f(T)}{(1-T)(1-qT)}(y(1-T)+xT)^n = \cdots \frac{f(x,y)-x^n}{q-1}T^{n-d}\cdots.$$

$Z_f(T)$ を $f(x,y)$ のゼータ多項式と呼ぶ．

定義 3.2 ([1]). $f(x,y)$ が Riemann hypothesis analogue (RHA) を満たす $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $Z_f(T)$ の零点が $|z| = 1/\sqrt{q}$ 上に存在．

講演では，事実 2.3 と予想 2.1 の類似である次の定理を紹介した：

定理 3.1 ([2]). 1. $Z_{Th(\varphi_m)}$ は RHA を満たす．

2. $Z_{Th(\varphi_m)}$ の零点は $Z_{Th(\varphi_{m+4})}$ の零点とインターレースする．

3.2 p-integral

Eisenstein 級数のフーリエ係数は，次の性質を持つ：p を素数としたとき，

$$E_{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \ (\because \text{Clausen–von Staudt.}) \tag{1}$$

大浦学氏は，この事実の類似である次の予想を提出した：

予想 3.1 ([7]). 1. $Th(\widetilde{\varphi_m})$ のフーリエ係数の分母は p で割れない．

(1) の類似である次を証明することで，予想 3.1 を証明することが出来る．

定理 3.2 ([2]). $\widetilde{\varphi_{p+1}} \equiv x^{p+1} + y^{p+1} \pmod{p}$.

詳しくは，論文 [2] を参照して頂きたい．

注意 3.1.
- Hecke 作用素に関する Eisenstein 級数と E-多項式の類似もある．これについては [3] を参照のこと．
- 大浦学氏は，2^g 個の変数に対する E-多項式の定義を与えている [6]. Siegel モジュラー形式と多変数 E-多項式の，ゼロ点やフーリエ係数に関する類似を探すのは興味ある問題である．

参考文献

[1] I. Duursma, A Riemann hypothesis analogue for self-dual codes. Codes and association schemes (Piscataway, NJ, 1999), 115–124, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., 56, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[2] T. Miezaki, Analogies between the Eisenstein series and the Eisenstein polynomials, preprint.

[3] G. Nebe, Kneser-Hecke-operators in coding theory. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **76** (2006), 79–90.

[4] H. Nozaki, A separation property of the zeros of Eisenstein series for $SL(2,\mathbb{Z})$. *Bull. Lond. Math. Soc.* **40** (2008), no. 1, 26–36.

[5] A. Munemasa, Codes, invariant polynomials and modular forms(in Japanese), The first spring conference "The rings of automorphic forms" (Organizers:T.Ibukiyama, et al.), Hamana lake, Japan, 2002, 135–161.

[6] M. Oura, Eisenstein polynomials associated to binary codes, *Int. J. Number Theory* **5** (2009), no. 4, 635–640.

[7] M. Oura, モジュラー形式としての E-多項式, 組合せ論セミナー, 大分工業高等専門学校, 2012 年 3 月 1 日.

[8] F.K.C. Rankin and H.P.F. Swinnerton-Dyer, On the zeros of Eisenstein series, *Bull. London Math. Soc.* **2** (1970), 169–170.

[9] G.C. Shephard and J.A. Todd, Finite unitary reflection groups, *Canadian J. Math.* **6** (1954), 274–304.