数理解析研究所講究録
第 1967 巻 2015 年 126-128

On Cartan matrices determined by the dimensions of simple modules

東京医科歯科大学教養部　清田正夫

Tokyo Medical and Dental University, College of Liberal Arts and Sciences
Masao KIYOTA

1 序文

G を有限群、F を標数 $p>0$ の代数閉体とする。群環 FG は直既約な両側イデアル B_i 達の直和に分解され、各 B_i は FG のブロックと呼ばれている。B を FG のブロックとする。$S_1,\cdots,S_l$ $(l=l(B))$ を B に属す単純 FG 加群とし、P_i を S_i の射影被覆とする。整数 $c_{ij}=\dim_F\mathrm{Hom}_{FG}(P_i,P_j)$ をカルタン不変数と呼び、$l\times l$ 行列 $C=(c_{ij})$ をブロック B のカルタン行列という。単純加群 S_i の次元を f_i とおき、$\mathbf{f}={}^t(f_1,\cdots,f_l)$ とおく。

ここで、C と $\mathbf{f}$ の実例を述べる。

(例 1)　$G=S_3$：3 次対称群、$p=3$、 $B=B_0$：主ブロックの時

$$C=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix},\quad \mathbf{f}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

(例 2)　$G=A_5$：5 次交代群、$p=3$、 $B=B_0$：主ブロックの時

$$C=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix},\quad \mathbf{f}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

(例 3)　$G=(3,3).Q_8$：位数 72 の Frobenius 群、$p=3$、 $B=B_0$：主ブロックの時

$$C=\begin{pmatrix}2&1&1&1&2\\1&2&1&1&2\\1&1&2&1&2\\1&1&1&2&2\\2&2&2&2&5\end{pmatrix},\quad \mathbf{f}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$$

次の問題を考える。

（問題）　カルタン行列 C と次元ベクトル $\mathbf{f}$ の間にどんな関係があるのか？
特に、 $\mathbf{f}$ から C が決まるか？

（例１）と（例２）から、C が同じでも $\mathbf{f}$ が異なる場合があることが分かる。

2　定理

以下、序文の記号をそのまま用いる。すなわち、B を有限群 G の p ブロックとし、C を B のカルタン行列、$\mathbf{f}$ を単純 B-加群の次元ベクトルとする。また、 D を B の不足群とし、$|D| = p^d$ とおく。さらに、$|G|_p = p^a$ とおく。これらの記号のもとで、次の定理と命題が成り立つ。すなわち、p-可解群や D が正規部分群の場合には、ある条件のもとで、カルタン行列 C が次元ベクトル $\mathbf{f}$ から記述されることが分かる。

定理　G を p-可解群とする。カルタン行列 C の成分の最大公約数（=最小の単因子）を p^γ とおく。このとき、次は同値である。

(1) $p^{a-d} \| f_i$ $(i = 1, \cdots, l)$ かつ $\det C = p^{d+(l-1)\gamma}$.

(2) $C = p^\gamma I + \dfrac{p^d - p^\gamma}{(\mathbf{f}, \mathbf{f})} F$,
ここで、I は単位行列、$F = (f_i f_j) = \mathbf{f} \cdot {}^t\mathbf{f}$ で、 $(\mathbf{f}, \mathbf{f})$ は内積を表す。

命題　D が G の正規部分群であるとする。このとき、次は同値である。

(1)' $\det C = p^{d+(l-1)\gamma}$.

(2) $C = p^\gamma I + \dfrac{p^d - p^\gamma}{(\mathbf{f}, \mathbf{f})} F$,
ここで、I は単位行列、$F = (f_i f_j) = \mathbf{f} \cdot {}^t\mathbf{f}$ で、 $(\mathbf{f}, \mathbf{f})$ は内積を表す。

注意１　$\det C = |D|$ ならば、 $\gamma = 0$ となり $\det C = p^{d+(l-1)\gamma}$ が成立する。

注意２　$\gamma = 0$ のとき、(2) は $C = I + \dfrac{p^d - 1}{(\mathbf{f}, \mathbf{f})} F$ となる。（例１）と（例３）の $C, \mathbf{f}$ はこの関係式を満たしている。

3 証明

証明は清田、村井、和田の共著論文 [K-M-W] の結果と線形代数の補題を用いる。

定理 1 [K-M-W] G を p-可解群とする。このとき、次は同値である。

(1) C の固有値全体と単因子全体は一致する。

(2) $\rho(C) = |D|$, ここで $\rho(C)$ は C の最大固有値を表す。

(3) $p^{a-d} || f_i \ (i = 1, \cdots, l)$

命題 2 [K-M-W] D が G の正規部分群であるならば、C の固有値全体と単因子全体は一致する。

補題 3 A を n 次実対称行列とする。$\mathrm{rank}(A) = 1$ ならば、$A = \mathbf{a} \cdot {}^t\mathbf{a}$, または $A = -\mathbf{a} \cdot {}^t\mathbf{a}$ と書ける、ここで $\mathbf{a}$ は適当な零でない n 次元たてベクトル。

定理 1 と補題 3 から定理が、命題 2 と補題 3 から命題がそれぞれ容易に導ける。

参考文献

[K] 清田正夫、On Cartan matrices with two parameters、数理解析研究所講究録 1926、有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究 (2014.12)

[K-M-W] M. Kiyota, M. Murai and T. Wada, Rationality of eigenvalues of Cartan matrices in finite groups, J. of Algebra 249,110-119 (2002)