

## VANISHING THEOREMS FOR THE HOMOLOGY OF COXETER GROUPS AND THEIR ALTERNATING SUBGROUPS

北海道大学大学院理学研究院 秋田 利之

Toshiyuki Akita

Department of Mathematics

Hokkaido University

### 1. はじめに

$G$  を群,  $p$  を素数,  $H^k(G, \mathbb{F}_p)$  を  $G$  の  $k$  次 mod  $p$  コホモロジー群とする. ここで  $\mathbb{F}_p$  は  $p$  個の元からなる体をあらわす.

$$H^k(G, \mathbb{F}_p) = 0 \quad (0 < k < d)$$

をみたす  $0 < k < d$  を ( $p$  における) vanishing range とよぶ. vanishing range に関わる結果で最も知られているのは Quillen [19] による

$$(1.1) \quad H^k(GL(n, \mathbb{F}_{p^r}), \mathbb{F}_p) = 0 \quad (0 < k < r(p-1))$$

であろう. より一般に Bendel-Nakano-Pillen [5, 6] は Lie 型の有限群に対する vanishing range を考察している. 一方  $\mathfrak{S}_n$  を  $n$  次の対称群とすると

$$(1.2) \quad H^k(\mathfrak{S}_n, \mathbb{F}_p) = 0 \quad (0 < k < 2p-3)$$

を Nakaoka [17, 18] による対称群のホモロジー安定性と無限対称群  $\mathfrak{S}_\infty$  の mod  $p$  ホモロジーの決定から導くことができる.  $n$  次の交代群  $A_n$  に対しては

$$(1.3) \quad H^k(A_n, \mathbb{F}_p) = 0 \quad (0 < k < p-2)$$

が Burichenko [9], Kleshchev-Nakano [14] により独立に証明されている. (1.1), (1.2), (1.3) はいずれも任意の  $n$  に対して成り立つことに注意されたい.

本稿の対象は Coxeter 群の交代部分群である. 対称群は Coxeter 群の重要な例であり, 対称群  $\mathfrak{S}_n$  の交代部分群は交代群  $A_n$  に他ならない. 筆者は Coxeter 群が  $p$ -free であるという仮定の元で, (1.2) が一般の Coxeter 群に対しても成立することを示した [3]. さらに  $p$ -free な有限 Coxeter 群の交代部分群に対して (1.3) が成立することも示した (交代群に関する

結果の一部は筆者の学生の劉擘 (Ye Liu), 岡田妃乃子との共同研究に基づく). 前者については [4] にも書いたので本稿では後者について簡単に紹介したい.

## 2. COXETER 群と交代部分群

まず Coxeter 群の定義から始めよう.  $S$  を有限集合,  $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  を以下の条件をみたす写像とする (ただし  $\mathbb{N}$  は 1 以上の自然数の集合をあらわす):

- (1) 任意の  $s \in S$  に対し  $m(s, s) = 1$ .
- (2) 任意の相異なる  $s, t \in S$  に対し  $2 \leq m(s, t) = m(t, s) \leq \infty$ .

生成集合  $S$  と基本関係式  $(st)^{m(s,t)} = 1$  ( $m(s, t) < \infty$ ) により定義される群

$$(2.1) \quad W := \langle s \in S \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \ (m(s, t) < \infty) \rangle$$

を Coxeter 群, 対  $(W, S)$  を Coxeter 系とよぶ. 以下  $W$  に対しその表示 (2.1) を固定する (群  $W$  に対し  $W$  の Coxeter 群としての表示は一意的に定まるとは限らない).

各  $s \in S$  は  $W$  の位数 2 の元であり, 積  $st$  ( $m(s, t) < \infty$ ) の位数はちょうど  $m(s, t)$  である.  $S$  の元の数  $n$  を  $W$  の階数とよび  $\text{rank } W$  と書く. 部分集合  $T \subseteq S$  に対し,  $T$  で生成される  $W$  の部分群  $W_T$  を  $W$  の放物的部分群とよぶ. とくに  $W_S = W$ ,  $W_{\{s\}} \cong \mathbb{Z}/2$  ( $s \in S$ ),  $W_\emptyset = \{1\}$  である.  $(W_T, T)$  は (写像  $m$  の制限  $m|_{T \times T}$  に関して) Coxeter 系となる.

**例 1.** 階数 1 の Coxeter 群は位数 2 の巡回群である. 階数 2 の Coxeter 群は, 生成集合を  $S = \{s, t\}$  としたとき,  $m(s, t) < \infty$  なら位数  $2m(s, t)$  の二面体群

$$D_{2m(s,t)} = \langle s, t \mid s^2 = t^2 = (st)^{m(s,t)} = 1 \rangle,$$

$m(s, t) = \infty$  なら無限二面体群 (2 つの  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  の自由積)

$$D_\infty = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle s, t \mid s^2 = t^2 = 1 \rangle$$

である.

**例 2.** 対称群  $\mathfrak{S}_n$  は階数  $n-1$  の Coxeter 群である. 実際, 各  $1 \leq i \leq n-1$  に対し  $s_i = (i, i+1)$  (互換) とし,  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$  とすれば,  $(\mathfrak{S}_n, S)$

は Coxeter 系となる. 基本関係式を与える写像  $m: S \times S \rightarrow \mathbb{N}$  は

$$m(s_i, s_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 3 & |i - j| = 1 \\ 2 & |i - j| > 1 \end{cases}$$

である.

$D_{2m}$  は  $\mathbb{R}^2$  上の有限鏡映群として実現でき, また  $\mathfrak{S}_{n+1}$  は  $\mathbb{R}^n$  上の有限鏡映群として実現できるが, 一般に有限 Coxeter 群は  $\mathbb{R}^n$  ( $n = \text{rank } W$ ) 上の有限鏡映群として実現できる. 逆に  $\mathbb{R}^n$  上の有限鏡映群は Coxeter 群としての表示をもつ. 有限 Coxeter 群は完全に分類されている. Coxeter 群の一般論については [1, 7, 10, 13], 有限鏡映群については [11] を参照されたい.

$(W, S)$  を Coxeter 系とする. 準同型  $\text{sign}: W \rightarrow \{\pm 1\}$  を  $s \mapsto -1$  ( $s \in S$ ) により定義する.  $W$  が対称群のとき  $\text{sign}$  は置換の符号に他ならない.  $\text{sign}$  の核  $\ker \text{sign}$  を  $W$  の交代部分群 (alternating subgroup) とよび  $A(W)$  とかく (rotation subgroup とよばれることもある). 対称群  $\mathfrak{S}_n$  の交代部分群は交代群  $A_n$  である. 交代部分群の表示も知られている (Bourbaki [7] に演習問題として載っている).

### 3. 交代部分群のコホモロジー

対称群のコホモロジーについては多くの研究があるが, 交代群のコホモロジーについての論文はあまり多くない. §1 であげた Burichenko [9], Kleshchev-Nakano [14] の他に筆者が知っているのは Bröcker [8], Mann [15], Adem-Maginnis-Milgram [2], Henn-Mui [12] ぐらいである (最後の論文は分類空間の stable splitting が主題だが).

Coxeter 群の交代部分群のコホモロジーについて知られている結果はさらに少ない.  $W$  を有限 Coxeter 群,  $A(W)$  をその交代部分群とすると

$$H^1(A(W), \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(A(W), \mathbb{Z}) = 0$$

$$H^2(A(W), \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(A(W), \mathbb{C}^\times)$$

が成り立つ. 後者は  $A(W)$  の表示により計算可能である. さらに Maxwell [16] により  $A(W)$  の Schur multiplier  $H^2(A(W), \mathbb{C}^\times) \cong H^3(A(W), \mathbb{Z})$  が決定されている. よって 3 次以下の整数係数コホモロジーはわかっているが, 高次のコホモロジーについての結果は (私が知る限り) ない.

§1 で述べたように, 任意の  $n$  に対し交代群  $A_n$  の mod  $p$  コホモロジーが

$$(3.1) \quad H^k(A_n, \mathbb{F}_p) = 0 \quad (0 < k < p-2)$$

をみたすことは知られていた. (3.1) は有限 Coxeter 群の交代部分群に対しては常に成立するわけではない. 例えば位数  $2p$  の二面体群の交代部分群は位数  $p$  の巡回群  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  である.  $p$  を奇素数とすると  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  のコホモロジー環はよく知られているように

$$H^*(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p(u) \otimes \Lambda(v) \quad (\deg u = 2, \deg v = 1)$$

であり, とくに  $H^k(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{F}_p) \neq 0$  ( $k > 0$ ) である.

#### 4. 主結果

$W$  を Coxeter 群,  $p$  を奇素数とする.  $W$  の表示を定める写像  $m: S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  の値  $m(s, t)$  が常に  $p$  と素であるとき,  $W$  を  $p$ -free と呼ぶことにしよう (ただし  $\infty$  は  $p$  と素であるとする).  $m(s, t)$  が  $p$  と素であることと積  $st$  の位数が  $p$  と素であるは同値である. 位数  $2m$  の二面体群

$$D_{2m} = \langle s, t \mid s^2 = t^2 = (st)^m = 1 \rangle$$

が  $p$ -free である必要十分条件は  $m$  が  $p$  と素であることである. また対称群  $\mathfrak{S}_n$  は任意の  $p \geq 5$  に対し  $p$ -free である.

**定理 3.**  $p$  を奇素数,  $W$  を  $p$ -free な有限 Coxeter 群,  $A(W)$  を  $W$  の交代部分群とすると  $H^k(A(W), \mathbb{F}_p) = 0$  ( $0 < k < p-2$ ) が成り立つ.

定理 3 は交代群  $A_n$  の vanishing range (1.3) の一般化であり, その証明は Burichenko [9], Kleshchev-Nakano [14] による結果 (3.1) の別証明にもなっている. 定理 3 は無限位数の Coxeter 群の場合には成り立たない (場合がある) ことを注意しておこう. 整数  $m_1, m_2, m_3 \geq 2$  に対し

$$W = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = (s_1 s_2)^{m_1} = (s_2 s_3)^{m_2} = (s_3 s_1)^{m_3} = 1 \rangle$$

を完全三角群とよぶ.  $W$  は階数 3 の Coxeter 群である. その交代部分群  $A(W)$  は三角群とよばれ

$$A(W) = \langle r_1, r_2 \mid r_1^{m_1} = r_2^{m_2} = (r_1 r_2)^{m_3} = 1 \rangle$$

という表示をもつ ( $r_1 = s_1 s_2, r_2 = s_2 s_3$  である).  $W$  の (よって  $A(W)$  の) 位数が有限であるための必要十分条件は

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \geq 1$$

であることが知られている。  $A(W)$  が無限位数なら  $H_2(A(W), \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$  であることが証明でき、よって普遍係数定理より、任意の素数  $p$  に対し  $H^2(A(W), \mathbb{F}_p) \neq 0$  であることがわかる。 Coxeter 群の場合は無限位数の場合も含めて次の結果が成り立つ。

**定理 4** ([3]).  $p$  を奇素数,  $W$  を  $p$ -free な Coxeter 群とすると  $H^k(W, \mathbb{F}_p) = 0$  ( $0 < k < 2p - 3$ ) が成り立つ。

#### REFERENCES

- [1] Peter Abramenko and Kenneth S. Brown, *Buildings*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 248, Springer, New York, 2008. Theory and applications. MR2439729 (2009g:20055)
- [2] Alejandro Adem, John Maginnis, and R. James Milgram, *Symmetric invariants and cohomology of groups*, Math. Ann. **287** (1990), no. 3, 391–411, DOI 10.1007/BF01446902. MR1060683 (91i:55022)
- [3] Toshiyuki Akita, *Vanishing theorem for the  $p$ -local homology of Coxeter groups* (2014), available at arXiv:1406.0915.
- [4] ———, *Coxeter 群のホモロジーの  $p$ -primary component について*, 数理解析研究所講究録 **1922** (2014), 170–174.
- [5] Christopher P. Bendel, Daniel K. Nakano, and Cornelius Pillen, *On the vanishing ranges for the cohomology of finite groups of Lie type*, Int. Math. Res. Not. IMRN **12** (2012), 2817–2866, DOI 10.1093/imrn/rnr130. MR2942711
- [6] ———, *On the vanishing ranges for the cohomology of finite groups of Lie type II*, Recent developments in Lie algebras, groups and representation theory, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 86, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, pp. 25–73, DOI 10.1090/pspum/086/1410. MR2976996
- [7] Nicolas Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Masson, Paris, 1981 (French). Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6. [Lie groups and Lie algebras. Chapters 4, 5 and 6]. MR647314 (83g:17001)
- [8] Theodor Bröcker, *Homologie symmetrischer und alternierender Gruppen*, Invent. Math. **2** (1967), 222–237 (German). MR0228564 (37 #4144)
- [9] Vladimir P. Burichenko, *Extensions of cocycles, Cohen-Macaulay geometries, and a vanishing theorem for cohomology of alternating groups*, J. Algebra **269** (2003), no. 2, 402–421, DOI 10.1016/S0021-8693(03)00437-X. MR2015284 (2004i:20097)
- [10] Michael W. Davis, *The geometry and topology of Coxeter groups*, London Mathematical Society Monographs Series, vol. 32, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008. MR2360474 (2008k:20091)
- [11] L. C. Grove and C. T. Benson, *Finite reflection groups*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 99, Springer-Verlag, New York, 1985. MR777684 (85m:20001)
- [12] Hans-Werner Henn and Huynh Mui, *Stable splittings for classifying spaces of alternating, special orthogonal and special unitary groups*, Algebraic topology (Oaxtepec, 1991), Contemp. Math., vol. 146, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, pp. 143–158, DOI 10.1090/conm/146/01220. MR1224912 (94g:55021)
- [13] James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. MR1066460 (92h:20002)

- [14] Alexander S. Kleshchev and Daniel K. Nakano, *On comparing the cohomology of general linear and symmetric groups*, Pacific J. Math. **201** (2001), no. 2, 339–355, DOI 10.2140/pjm.2001.201.339. MR1875898 (2002i:20063)
- [15] Benjamin M. Mann, *The cohomology of the alternating groups*, Michigan Math. J. **32** (1985), no. 3, 267–277, DOI 10.1307/mmj/1029003238. MR803832 (87h:20096)
- [16] George Maxwell, *The Schur multipliers of rotation subgroups of Coxeter groups*, J. Algebra **53** (1978), no. 2, 440–451. MR0486097 (58 #5885)
- [17] Minoru Nakaoka, *Decomposition theorem for homology groups of symmetric groups*, Ann. of Math. (2) **71** (1960), 16–42. MR0112134 (22 #2989)
- [18] ———, *Homology of the infinite symmetric group*, Ann. of Math. (2) **73** (1961), 229–257. MR0131874 (24 #A1721)
- [19] Daniel Quillen, *On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field*, Ann. of Math. (2) **96** (1972), 552–586. MR0315016 (47 #3565)

*E-mail address:* akita@math.sci.hokudai.ac.jp