数理解析研究所講究録
第1969巻 2015年 40-63

単独非線形波動方程式の初期値問題に対する一般論の終結に関する話題

故 上見練太郎先生に捧げる

高村博之 (Hiroyuki Takamura)

公立はこだて未来大学・システム情報科学部・複雑系知能学科

Department of Complex and Intelligent Systems,

Faculty of Systems Information Science, Future University Hakodate

概 要

単独非線形波動方程式の初期値問題は、一般論の概要が1990年代前半にほぼ固まって以降、その最適性が解析の中心となっていた。それは、未知関数自身の L^2 評価が単純なエネルギー法で得られないことから分かれる一般論の二種類の結果に対して、それぞれに対応した半線形モデル方程式の爆発解を解析することによって得られる。1992年に一般論を体系的に紹介した教科書 Li and Chen [37] が出版されてからは、この分野ではほとんど進展が見られなかった。しかし、最近、筆者とその学生である若狭恭平による Takamura and Wakasa [58] によって20年以上未解決だった高次元の部分と、筆者の友人とその学生による Zhou and Han [74] によって誰も予想しなかった低次元の部分の改良が得られ、一気に一般論とその最適性が完成した。

ここでは一般論の最適性を、モデル方程式に対する30年以上に渡る解析を中心に、特に空間4次元で2次の非線形項に焦点を当てて概観する。本稿を執筆するに至った理由は、[58] の一般論に関係した部分のみを解説した Takamura and Wakasa [59] の序文が [74] によって古くなってしまったことと、一般論が終結した今、これに関する日本語の文献を1つくらい残す意義を感じたからである。また、各部分で最終結果に至るまでの歴史を、本稿では筆者の知る限り取り上げることにする。

1 一般論とその最適性

実数値未知関数 $u=u(x,t)$ に対する非線形波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=H(u,Du,D_xDu) & \text{in} \quad \mathbf{R}^n\times[0,\infty), \\ u(x,0)=\varepsilon f(x),\ u_t(x,0)=\varepsilon g(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

を考える。ここで、

$$Du=(u_{x_0},u_{x_1},\cdots,u_{x_n}),\ x_0=t,$$
$$D_xDu=(u_{x_ix_j},\ i,j=0,1,\cdots,n,\ i+j\geq 1),$$

とし、更に $f, g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ で、$\varepsilon > 0$ は小さいパラメータとする。

$$\widehat{\lambda} = (\lambda;\ (\lambda_i), i = 0, 1, \cdots, n;\ (\lambda_{ij}), i, j = 0, 1, \cdots, n,\ i + j \geq 1)$$

と書くとき、非線形項 $H = H(\widehat{\lambda})$ は、十分滑らかな関数で $\widehat{\lambda} = 0$ の近傍で

$$H(\widehat{\lambda}) = O(|\widehat{\lambda}|^{1+\alpha})$$

をみたすとする。ここで α は自然数である。lifespan $\widetilde{T}(\varepsilon)$ を次のように定義する。

$$\widetilde{T}(\varepsilon) = \sup\{t > 0\ :\ \text{適当に固定した } (f, g) \text{ に対して } (1.1) \text{ の古典解 } u(x,t) \text{ が存在する }\}$$

(1.1) は、$\widetilde{T}(\varepsilon) = \infty$ のとき時間大域解をもち、$\widetilde{T}(\varepsilon) < \infty$ のときは、時間区間 $[0, \widetilde{T}(\varepsilon))$ において時間局所解をもつことを意味する。この設定では、時間局所解に対して、解の一意性（例えば、この分野の標準的な講義録、John [23] の Appendix 参照）より $\lim_{\varepsilon \to +0} \widetilde{T}(\varepsilon) = \infty$ となることが予想される。そのときの $\widetilde{T}(\varepsilon)$ の下界を ε の詳細なオーダーで表現することがここでいう一般論という意味である。

注意 1.1 大きな ε に対しては短時間で解が存在しなくなる例が多数あるため、統一的な理論はなく、個々の方程式の解析しか存在しない。例えば、Levine ('74) [35] やそれを解説したものを含む Strauss ('89) [53]、更に Glassey ('73) [12] や Sideris ('84) [51] などを参照のこと。また、本稿では物理的な背景を考慮せず、純粋に数学な興味のみから解析を紹介する。

$\widetilde{T}(\varepsilon)$ の下からの評価は、1980 年代から多くの研究者達によって改良され続け、最終的には以下のように α と n の組み合わせに関するすべての分類が完成した。$n = 1$ のときは、

$$\widetilde{T}(\varepsilon) \geq \begin{cases} c\varepsilon^{-\alpha/2} & (f, g \text{ が一般のとき}) \\ c\varepsilon^{-\alpha(1+\alpha)/(2+\alpha)} & \left(\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(x)dx = 0 \text{ のとき}\right) \\ c\varepsilon^{-\alpha} & \left(1 + \alpha \leq \forall\beta \leq 2\alpha \text{ に対して } \partial_u^\beta H(0) = 0 \text{ のとき}\right) \end{cases} \tag{1.2}$$

となる。ここで c は ε によらない正定数である。$n \geq 2$ のときは、以下のようになる。

$\widetilde{T}(\varepsilon) \geq$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha \geq 3$
$n = 2$	$ca(\varepsilon)$ $(f, g$ が一般$)$ $c\varepsilon^{-1}$ $\left(\int_{\mathbf{R}^2} g(x)dx = 0\right)$ $c\varepsilon^{-2}$ $(\partial_u^2 H(0) = 0)$	$c\varepsilon^{-6}$ $(f, g$ が一般$)$ $\boldsymbol{c\varepsilon^{-18}}$ $\boldsymbol{(\partial_u^3 H(0) = 0)}$ $\exp(c\varepsilon^{-2})$ $(\partial_u^3 H(0) = \partial_u^4 H(0) = 0)$	∞
$n = 3$	$c\varepsilon^{-2}$ $(f, g$ が一般$)$ $\exp(c\varepsilon^{-1})$ $(\partial_u^2 H(0) = 0)$	∞	∞
$n = 4$	$\boldsymbol{\exp(c\varepsilon^{-2})}$ **$(f, g$ が一般$)$** ∞ $(\partial_u^2 H(0) = 0)$	∞	∞
$n \geq 5$	∞	∞	∞

ここで、$a = a(\varepsilon)$ は $a^2\varepsilon^2 \log(a+1) = 1$ をみたす数である。時間大域解の存在を示している ∞ 以外の部分に対しては、非線形項の滑らかさを犠牲にする代わりに詳細な結果が得られる $H = |u|^p$ や $H = |u_t|^p$ などのモデル方程式の爆発解を解析することにより、それらの最適性が証明される。ここでいう最適という意味は、このような特別な非線形項と特別な初期値を使って、$\widetilde{T}(\varepsilon)$ が上から同じ ε のオーダーを持った量で評価されるということである。

この表は、1992 年に出版された書物 Li and Chen [37] の第 2 章にその歴史や参考文献とともに掲載されているので、ここではそれらの詳細は取り上げない。ただし、表中で太字にし

た $(n,\alpha)=(4,1),(2,2)$ の二ヶ所が、そこに掲載されている結果と異なっている。まず一ヶ所、$(n,\alpha)=(4,1)$ で f,g が一般の場合は結果がやや悪く、$\exp(c\varepsilon^{-1})$ となっている。これが改良されたのは、1995 年に出版された論文、Li and Zhou [38] による。**Li and Chen [37] では、この $(n,\alpha)=(4,1)$ の場合を除き、一般論の結果はすべて最適であると記述されている。**我々は Takamura and Wakasa ('11)[58] で、この 20 年以上前から不明であったこの最適性を証明した。その結果が本稿の中心の話題となる。ただし、$(n,\alpha)=(2,2)$ での $\partial_u^3H(0)=\partial_u^4H(0)=0$ に対する結果の最適性は、Godin ('93) [16] で $H=u_t^3$ を用いて証明された。この結果を見落としてしまったため、[58] の序文では後にそれを再証明した Zhou and Han ('11) [72] を引用している。

そしてもう一ヶ所、Li and Chen [37] の表では、$(n,\alpha)=(2,2)$ で $\partial_u^3H(0)=0$ の場合の結果が欠落している。Li 単独による少し古い会議録、Li ('91) [36] では、$(n,\alpha)=(2,2)$ の一般でない結果の最適性も不明とされている。しかし、[37] でそれが削除されてしまったのは、モデル非線形項 $H=|u|^p$ に対する lifespan の上からの評価から類推して、単独では時間大域存在となる u^4 が入っていることによる不具合は技術的なもので、$\partial_u^4H(0)=0$ の条件は削除されるべきであると考えたからと思われる。現に、この部分の最適な下からの評価を導出した Katayama ('01) [25] でも、著者の片山聡一郎氏（和歌山大・教育）は、結果が $\exp(c\varepsilon^{-2})$ まで改良されるであろうと予想していた。（参：[25] の Theorem 1.1 の直後）このように誰もがこの予想を信じて疑わなかったものであり、筆者もモデル方程式に関する先述の Takamura and Wakasa [58] や、その一般論に関係ある部分のみを解説した Takamura and Wakasa ('12) [59] の序文では $(n,\alpha)=(2,2)$ の部分は古いままの表を掲載した。実際、筆者が 2011 年 4 月に中国上海市に招聘されて Zhou Yi 氏（復旦大学・中国）と議論したときも、この予想は変わらないだろうという結論に達していた。しかしながら、Zhou Yi 氏はその 1 年後、弟子の Han Wei 氏（中北大学・中国）と共に Zhou and Han ('12) [74] で $H=u_t^2u+u^4$ という非線形項を用いて、Katayama [25] の下からの評価 $c\varepsilon^{-18}$ が最適であるという驚くべき結果を示した。これによって、一般論は劇的に完成されたことになった。

注意 1.2 (1.2) にある $n=1$ のときの結果に対する最適性は、Li and Chen [37] にあるように、最初の二つについては Zhou [65] によってモデル非線形項 $H=|u|^{1+\alpha}$ を用いて、最後のものについては Zhou [70] によってモデル非線形項 $H=|u|^\beta|u_t|^{1+\alpha-\beta}$ $(0\le\beta\le\alpha)$ を用いてそれぞれ示された。一般論における非線形項の微分可能性に関する仮定を考慮すると、各指数が偶数冪のときはこれらでも構わないが、奇数冪のときには $H=u^{1+\alpha}$ や $H=u^\beta u_t^{1+\alpha-\beta}$ というモデル非線形項に対して同じ結果を導くべきと思われる。例えば、$f(x)\equiv0,\ g(x)\ge0(\not\equiv0)$ とすると u や u_t の正値性が比較原理、または解の一意性によって得られるが、(1.2) の二つ目の場合には対応できなくなる。この点において、もう少し解析を詰める余地があるように思われる。

以下、本稿では、まず 2 節でモデル非線形項 $H=|u|^p$ に関する Strauss 予想とその解決の歴史を概観する。3 節ではもう一つのモデル非線形項 $H=|u_t|^p$ に関する Glassey 予想とその解決の歴史を概観する。更に 4 節では Takamura and Wakasa [58] の結果を、$n=4$ で $H=u^2$ に限って解説した Takamura & Wakasa [59] に従い証明付きで紹介する。最後に 5 節で Takamura and Wakasa [60] で考察された $n=4$ で $H=u^2$ に更にいわゆる基本解に含まれる derivative loss の影響を取り除くと出てくる特別な不定符号である 2 次の非線形積分項を付加しても、lifespan の評価の形が変わらないという結果を紹介する。逆に、それとは異なる積分項を加えると時間大域解が得られるという最新の結果 Takamura and Wakasa [61] も紹介する。特に空間 4 次元で 2 次の非線形項にこだわる理由は、一般論での指数型 lifespan が時間大域存在になる条件を探していることに関係している。詳しくは 5 節の導入部分を参照のこと。最後に簡単な観察から得られる興味深い事実を述べて本稿を閉じることにする。

2 $u_{tt} - \Delta u = |u|^p$ に関するStrauss予想

この節では、(1.1) をモデル非線形項 $H = |u|^p$ $(p > 1)$ で考える。その際、一般論の解の lifespan $\widetilde{T}(\varepsilon)$ と区別するため、この場合の解の lifespan を、単に $T(\varepsilon)$ と書くことにする。$1 < p < 2$ のときは、非線形項の可微分性が低いため古典解の存在は期待できないので、ほぼ対応する積分方程式の C^1 解が解析の対象となる。この「ほぼ」という意味は、$n \geq 4$ の高次元では弱解が解析の中心となるのであるが、解が球対象ならば原点での特異性を除けば積分方程式の解そのものであるし、一般的には古典的な Strichartz 評価によってそれと同等の正則性が保証される場合があるからである。この辺りの話は、例えば Georgiev, Takamura and Zhou [11] を参照のこと。従って、この節では lifespan もその意味で用いることにする。

2.1 Strauss予想とその歴史

$n = 1$ のときは、Kato ('80) [27] によって、$\forall p > 1$ に対し、$T(\varepsilon) < \infty$ となることが知られていた。$n \geq 2$ のときは、この方程式を最初に $n = 3$ のときに解析した John ('79) [21] の結果を他の空間次元に拡張した以下の予想がある。

$$\begin{cases} p > p_0(n) & \Longrightarrow \quad T(\varepsilon) = \infty \\ 1 < p \leq p_0(n) & \Longrightarrow \quad T(\varepsilon) < \infty \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで、

$$p_0(n) := \frac{n + 1 + \sqrt{n^2 + 10n - 7}}{2(n-1)} \tag{2.2}$$

は、次の 2 次方程式の正根である。

$$\gamma(p, n) := 2 + (n+1)p - (n-1)p^2 = 0 \tag{2.3}$$

これを Strauss 予想といい、$p_0(n)$ はしばしば Strauss 指数と呼ばれることもある。この呼び名は元々 Strauss ('81) [52] によって、同様の非線形項をもつ Schrödinger 方程式や Klein-Gordon 方程式に対して得られた臨界指数に由来している。実際、Walter A.Strauss 氏（ブラウン大学・米国）はその中で、臨界指数中の n を $n-1$ に置き換えると、非線形波動方程式に対する臨界指数になるだろうと予想している。

注意 2.1 $p_0(n)$ は空間次元 n に関して単調減少である。特に、$n = 4$ のときの臨界冪は u^2 で、一般論に含まれる滑らかな非線形項になっている。具体的に $p_0(n)$ を書き出すと、以下のようになっている。

$$p_0(2) = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \quad p_0(3) = 1 + \sqrt{2}, \quad \boldsymbol{p_0(4) = 2},$$

この予想の完全解決への歴史を各文献に従って表にすると、筆者の知る限り次のようになる。

	$1 < p < p_0(n)$	$p = p_0(n)$	$p > p_0(n)$
$n = 2$	Glassey('81)[13]	Schaeffer('85)[46]	Glassey('81)[14]
$n = 3$	John('79)[21]	Schaeffer('85)[46]	John('79)[21]
$n \geq 4$	Sideris('84)[50]	Yordanov & Zhang('06)[64] Zhou('07)[71] （これらは独立）	Choquet-Bruhat('89)[7] ：$p > \max\left(\left[\frac{n}{2}\right], 2 + \frac{4}{n-2}\right)$ Zhou('95)[68] ：一般で $n = 4$ のみ Kubo('96)[29]('97)[30] ：球対称＋奇数 n Kubo & Kubota('98)[32] ：球対称＋偶数 n Georgiev & Lindblad & Sogge('97)[10] ：一般（最終結果）

注意 2.2 $n \geq 4$ の高次元では、任意の非ゼロ初期値に対して大域解の非存在を示すことができるか、ということや、非線形項が正値性を持たない $|u|^{p-1}u$ のときも大域解の非存在を示すことができるか、ということは未だ問題として残っている。

2.2 lifespan の評価

時間大域解が得られない $1 < p \leq p_0(n)$ のとき、lifespan $T(\varepsilon)$ の評価がどのような形になるか興味が持たれる。これに関しては、以下のような分類が成立している。ただし、c や C は ε によらない正定数とする。

- $n = 1$ のとき、$\forall p > 1$ に対して、以下の評価が成立する。

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(x)dx \neq 0 \implies & c\varepsilon^{-(p-1)/2} \leq T(\varepsilon) \leq C\varepsilon^{-(p-1)/2} \\ \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(x)dx = 0 \implies & c\varepsilon^{-p(p-1)/(p+1)} \leq T(\varepsilon) \leq C\varepsilon^{-p(p-1)/(p+1)} \end{cases} \tag{2.4}$$

この結果は、Zhou('92) [65] による。$\alpha + 1 = p$ とみると一般論の結果との一致がわかる。また、$p = 2$ のときには、Lindblad('90) [39] によって、より精密な結果

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(x)dx \neq 0 \implies \exists \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{1/2}T(\varepsilon) > 0 \\ \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(x)dx = 0 \implies \exists \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{2/3}T(\varepsilon) > 0 \end{cases}$$

が得られている。Zhou Yi 氏の結果もこの形で書けるものと思われる。

- $(n, p) = (2, 2)$ のとき、一般論と同様に $a = a(\varepsilon)$ を $a^2\varepsilon^2 \log(a + 1) = 1$ をみたす数として

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} g(x)dx \neq 0 \implies \exists \lim_{\varepsilon \to +0} a(\varepsilon)^{-1}T(\varepsilon) > 0 \\ \displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} g(x)dx = 0 \implies \exists \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon T(\varepsilon) > 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

が成立している。この結果も、Lindblad ('90) [39] によるものである。

- $1 < p < p_0(n)$ $(n \geq 3)$ または $2 < p < p_0(2)$ $(n = 2)$ のとき、次の評価が成立すると予想されている。

$$c\varepsilon^{-2p(p-1)/\gamma(p,n)} \leq T(\varepsilon) \leq C\varepsilon^{-2p(p-1)/\gamma(p,n)} \tag{2.6}$$

ここで、$\gamma(p,n)$ は (2.3) で定義されたものであることに注意する。

注意 2.3 $\gamma(p,n)$ の定義は $n = 1$ の場合も含むとすると、この (2.6) は (2.4) の 2 つ目の場合の結果と一致する。

この予想に関する解決の歴史は、次のようにまとめることができる。

	下からの評価（長時間存在）	上からの評価（有限時間内爆発）
$n = 2$	Zhou('93)[67]	Agemi & Takamura('92)[2] Zhou('93)[67]（これらは独立）
$n = 3$	Lindblad('90)[39]	Lindblad('90)[39]
$n \geq 4$	Lindblad & Sogge('96)[40] ：$n \leq 8$ または球対称 DiPomponio & Georgiev('01)[9] ：小誤差あり	Sideris('84)[50] の rescaling

ただし、$n = 2, 3$ のときの結果は、前と同様に次のような精密な形であることに注意する。

$$\exists \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{2p(p-1)/\gamma(p,n)} T(\varepsilon) > 0$$

また上からの評価における rescaling の議論は、例えば、高次元の系に対する結果、Georgiev, Takamura and Zhou [11] を参照のこと。この議論は、Zhou Yi 氏による一般論とその最適性に関する未出版のサーベイ論文 Zhou ('96) [69] に出現したのが最初と思われる。上記の表をみてわかるように、$n \geq 9$ で球対称でない解の局所存在に対する未解決問題が少し残っている。

- $p = p_0(n)$ のとき、次のような評価が成立することが予想されている。

$$\exp\left(c\varepsilon^{-p(p-1)}\right) \leq T(\varepsilon) \leq \exp\left(C\varepsilon^{-p(p-1)}\right) \tag{2.7}$$

この予想に関する解決の歴史も、次のように表にまとめることができる。

	下からの評価（長時間存在）	上からの評価（有限時間内爆発）
$n = 2$	Zhou('93)[67]	Zhou('93)[67]
$n = 3$	Zhou('92)[66]	Zhou('92)[66]
$n \geq 4$	Li & Zhou('95)[38] ：$(n,p) = (4,2)$ のみ Lindblad & Sogge('96)[40] ：$n \leq 8$ または球対称	**Takamura & Wakasa('11)[58]**

この場合もまた、$n \geq 9$ で球対称でない解の局所存在に対する未解決問題が少し残っている。

注意 2.4 劣臨界冪や臨界冪でも $n \leq 3$ の低次元では、$T(\varepsilon) < \infty$ の証明そのものや rescaling の議論によって、$T(\varepsilon)$ の評価が自動的に導出されるのであるが、$n \geq 4$ の高次元での臨界冪に限って、それが全く通用しない構造になっている。その仕組みを平易に解説するために、本稿の第 4 節で上記の Takamura and Wakasa [58] を一般論と関係の深い $n = 4$ の場合に限って紹介する。

3 $u_{tt} - \Delta u = |u_t|^p$ に関するGlassey予想

この節では、(1.1) をもう 1 つのモデル非線形項 $H = |u_t|^p$ $(p > 1)$ で考える。その際、一般論や $H = |u|^p$ のときの解の lifespan と区別するため、この場合の解の lifespan を、単に $\widehat{T}(\varepsilon)$ と書くことにする。前節と同様に $1 < p < 2$ のときは、非線形項の可微分性が低いため古典解の存在は期待できないので、ほぼ対応する積分方程式の C^1 解やある程度正則性のある弱解が解析の対象となる。従って、lifespan もその意味で用いることにする。

3.1 Glassey予想とその歴史

$n = 1$ のときは、Zhou ('01) [70] によって、$\forall p > 1$ に対して $\widehat{T}(\varepsilon) < \infty$ となることが知られていた。後述するが、もちろん $\widehat{T}(\varepsilon)$ の最適な上からの評価も同時に得られている。実は一般論の最適性を見据えて、もっと一般の $(|u|^p)_t$ や $|u|^q|u_t|^{p-q}$ というような形の非線形項に対して解析されていることに注意する。この Zhou Yi 氏の論文は、1990 年代初頭には既にプレプリントとして存在していた。何らかの理由によって出版が 10 年以上遅れたらしい。筆者は著者から直接論文を入手し、自身の学位論文 Takamura ('95) [55] にこの方程式に関連した特別な場合を引用した。$n \geq 2$ のときは、Glassey ('83) [15] による以下の予想がある。

$$\begin{cases} p > p_1(n) & \Longrightarrow \quad \widehat{T}(\varepsilon) = \infty \\ 1 < p \leq p_1(n) & \Longrightarrow \quad \widehat{T}(\varepsilon) < \infty \end{cases} \tag{3.1}$$

となる。ここで、$p_1(n)$ は次で定義されるものである。

$$p_1(n) := \frac{n+1}{n-1} \tag{3.2}$$

これを Glassey 予想と呼ぶが、解の時間減衰の可積分性から容易にこの予想が立つ。従って昔からこの事実に気が付いていた人が多数いたと思われ、こう呼ぶのが正しいかどうかは筆者には確信がなかった。しかし、この予想に関するほぼ最終結果を得た Hidano, Wang and Yokoyama ('11) [18] によって、この呼び名は確定的になった。尚、著者の 1 人である肥田野久二男氏（三重大・教育）はこれを含む業績により、日本数学会函数方程式論分科会の第四回福原賞（2012 年度）を受賞している。

注意 3.1 (2.2) により、$p_1(n) < p_0(n)$ となることに注意する。また、$p_1(2) = 3$, $p_1(3) = 2$ であり、特に $n = 3$ のときは、一般論に含まれる滑らかな非線形項になっていることにも注意する。

この Glassey 予想の解決の歴史は、各文献に従って表にすると、筆者の知っている限り次のようになる。ただし、偶数である p に対する時間大域解の存在関する文献は、一般論に含まれているので除外する。

	$1 < p \leq p_1(n)$	$p > p_1(n)$
$n = 2$	Masuda('83)[41] ：$p = 2$ で $n = 1, 3$ も Schaeffer('86)[47] ：$p = 3$ で $\|u_r\|^3$ でも同じ結果 Agemi('91)[1] ：一般（最終結果）	Hidano & Tsutaya('95) [17] Tzvetkov('98) [63] （これらは独立）
$n = 3$	John('81)[22]	Sideris('83)[49]：球対称 Hidano & Tsutaya('95) [17]：一般 Tzvetkov('98) [63]：一般 （下の二つは独立）
$n \geq 4$	Rammaha('87)[42] ：奇数 n で $p = p_1(n)$ と偶数 n で $1 < p < p_1(n)$ Zhou('01)[70] ：一般（最終結果）	Hidano & Wang & Yokoyama('11) [18]：球対称

3.2 lifespan の評価

前節同様、$1 < p \leq p_1(n)$ のときには、以下のような lifespan $\widehat{T}(\varepsilon)$ の評価の分類がある。ただし、c や C は ε によらない正定数とする。

$$\begin{cases} 1 < p < p_1(n) & \Longrightarrow \quad c\varepsilon^{-(p-1)/\{1-(n-1)(p-1)/2\}} \leq \widehat{T}(\varepsilon) \leq C\varepsilon^{-(p-1)/\{1-(n-1)(p-1)/2\}} \\ p = p_1(n) & \Longrightarrow \quad \exp\left(c\varepsilon^{-(p-1)}\right) \leq \widehat{T}(\varepsilon) \leq \exp\left(C\varepsilon^{-(p-1)}\right) \end{cases} \tag{3.3}$$

当然ではあるが、$n = 1$ の場合には、上記の下段の評価は存在しないことに注意する。この予想に関する歴史は、筆者の知る限り次のようにまとめることができる。

	下から（存在）	上から（爆発）
$n = 1$	ほぼ自明のため文献がない？	Zhou('01)[70]
$n \geq 2$	Hidano & Wang & Yokoyama('11)[18]：球対称	Zhou('01)[70]

ただし、$(n, p) = (3, p_1(3)) = (3, 2)$ に対する下からの評価は一般論に含まれているので、それに関する文献は除外した。

注意 3.2 下からの評価は球対称解に対してのみ得られているもので、この条件は本質的であると思われる。また上からの評価に関して、$H = |u|^p$ のときとは異なり、$p = p_1(n)$ と $1 < p < p_1(n)$ で論文が分かれていない。これは、この方程式特有の解の性質によって、解やその積分量が波の特性方向に沿ってある1階の非線形常微分方程式をみたすことに起因している。従って、$p = p_1(n)$ のときでも、自然にそれらの時間対数増大が導かれる仕組みになっている。詳しくは、Zhou [70] を参照のこと。これに対し $H = |u|^p$ の $p = p_0(n)$ では、一番簡単な $n = 3$ であっても、2階の非線形常微分方程式の解との比較になり、より複雑な解析が要求されている。

注意 3.3 一般論との対比で、これとは異なる非線形項を持つ方程式の解の爆発もいくつか解析されている。例えば、Rammaha ('88) [43] では $n = 2$ で $H = |\Delta u|^p$ $(1 < p < 3)$ の時間大域解の非存在を示している。また、Sideris ('83) [49] では $n = 3$ で、Rammaha ('97) [45] では $n = 2$ で、それぞれ $H = C_1|\nabla u|^2 + C_2(\Delta u)^2$ $(C_1, C_2 > 0)$ の解の lifespan の詳細な上から評価を導出して、一般論の最適性に対する保証を強化している。

4　空間4次元での u^2 の最適爆発

この節では第2節で予告したように、以下の定理を三段に分けて証明する。

定理 1 (Takamura and Wakasa [58]) $n = 4$ かつ $H = u^2$ とする。$f \in C_0^4(\mathbf{R}^4)$, $g \in C_0^3(\mathbf{R}^4)$ はともに非負かつ恒等的にゼロでないとする。更に、(1.1) は

$$\mathrm{supp}\ u \ \subset \{(x,t) \in \mathbf{R}^4 \times [0,\infty)\ ;\ |x| \le t+R\}\ (R \ge 1/4)$$

となるような解 $u \in C^2(\mathbf{R}^4 \times [0, T(\varepsilon)))$ をもつとする。このとき、$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, g, R)$ が存在して、$0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ である限り、$T(\varepsilon)$ は

$$T(\varepsilon) \le \exp\left(C\varepsilon^{-2}\right)$$

をみたす。ここで、C は ε に依らない正定数である。

注意 4.1 後に Zhou [71] による $T(\varepsilon) < \infty$ の証明に従ったこの定理の別証明が、Zhou and Han [73] によって見つかった。その序文では、「Takamura and Wakasa [58] の証明を簡単にした」と記述されているが、常微分方程式の解との比較を複数回行っている上、最後は解の重み付き L^2 ノルムを解析している。確かに証明の記述量は少なく、次元も低次元を含む形で一般化されているが、筆者には証明の本質がやや見え難くなっているように思われる。

4.1　常微分不等式の解析の精密化

まず、問題 (1.1) に関して、以下の考察を行うことからはじめる。

$$F(t) := \int_{\mathbf{R}^4} u(x,t)dx \in C^2([0, T(\varepsilon))$$

とおく。このとき、解の台に関する仮定（有限伝播性）と Schwarz の不等式から

$$|F(t)| \le \int_{|x|\le t+R} |u(x,t)|dx \le \left(\int_{|x|\le t+R} u(x,t)^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{|x|\le t+R} 1dx\right)^{1/2}$$

が成立する。一方、発散定理と方程式を用いると

$$F''(t) = \int_{\mathbf{R}^4} u_{tt}(x,t)dx = \int_{\mathbf{R}^4} \{u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t)\}\, dx = \int_{R^4} u(x,t)^2 dx$$

がわかる。従って、これらをまとめると

$$F''(t) \ge |\mathbf{B}^4(0,1)|^{-1}(t+R)^{-4}F(t)^2 \quad \text{for } t \ge 0 \tag{4.1}$$

が得られる。ここで、$|\mathbf{B}^4(0,1)|$ は $\mathbf{R}^4$ 上の単位球の体積である。さらに、初期値の正値性の仮定から

$$F(0) = \varepsilon \int_{\mathbf{R}^4} f(x)dx > 0, \quad F'(0) = \varepsilon \int_{\mathbf{R}^4} g(x)dx > 0 \tag{4.2}$$

が従う。ここで、次の常微分不等式に対する解の非存在定理を用いる。

補題 4.1 $F \in C^2([0,T))$ は

$$\begin{cases} F(t) \geq Kt^2 & \text{for } t \geq T_0 \\ F''(t) \geq B(t+R)^{-4}F(t)^2 & \text{for } t \geq 0 \\ F(0) > 0, \quad F'(0) > 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

をみたすとする。ここで、B, K, R, T_0 は正定数で、特に $T_0 \geq R$ である。このとき、$K \geq K_0$ である限り、T は $T \leq 2T_1$ をみたす。ここで

$$K_0 = \left\{ \frac{1}{2^3}\sqrt{\frac{B}{3}}\left(1 - \frac{1}{2^{2\delta}}\right) \right\}^{-2}, \quad T_1 = \max\left\{ T_0, \frac{F(0)}{F'(0)} \right\} \tag{4.4}$$

かつ δ は、$0 < \delta < 1/2$ をみたす数である。

注意 4.2 (4.1) によって、(4.3) の二つ目の不等式は $B = |\mathbf{B}^4(0,1)|^{-1} > 0$ として既に得られている。また (4.2) よって、(4.3) の三つ目の不等式は自明である。従ってこの補題を用いて定理を証明するには、(4.3) の最初の不等式を T_0 が lifespan の最適な評価量とほぼ同じ ε のオーダーを持つ状況下で示すことが目標となる。

注意 4.3 $T(\varepsilon) < \infty$ を示した Yordanov and Zhang [64] では、この補題が証明なしで紹介されている。しかも、その主張では T_0 と T_1 の関係が不明で、単に $T < \infty$ ということが結論となっている。このように、結果を精密にしたことが最適爆発の証明の鍵の 1 つである。しかし、以下の注意 4.7 で示すように、この補題の精密化だけでは lifespan の最適な評価には到達できない。

補題 4.1 の証明　背理法によって証明する。以下、$T > 2T_1$ と仮定して矛盾を導く。まず、(4.3) の二つ目の不等式と三つ目の仮定によって

$$F'(t) \geq F'(0) > 0, \quad F(t) \geq F'(0)t + F(0) \geq F(0) > 0 \quad \text{for } t \geq 0 \tag{4.5}$$

が従うことが容易にわかる。そこで (4.3) の二つ目の不等式の両辺に $F'(t)$ を掛けて $[0,t]$ で積分すると、$t \geq 0$ に対して以下の不等式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}F'(t)^2 &\geq B\int_0^t (s+R)^{-4}F(s)^2F'(s)ds + \frac{1}{2}F'(0)^2 \\ &> \frac{B}{3(t+R)^4}\left\{F(t)^3 - F(0)^3\right\} \\ &\geq \frac{B}{3(t+R)^4}F(t)^2\left\{F(t) - F(0)\right\} \end{aligned}$$

ここで、時間区間を $t \geq F(0)/F'(0)$ に制限して (4.5) を用いると、

$$\frac{1}{2}F(t) - F(0) \geq \frac{1}{2}\left\{F'(0)t - F(0)\right\} \geq 0$$

が得られる。従って、

$$F'(t) > \sqrt{\frac{B}{3}} \cdot \frac{F(t)^{3/2}}{(t+R)^2} \quad \text{for} \quad t \geq \frac{F(0)}{F'(0)}$$

が成立する。

ここで、$t \geq T_1 (\geq R)$ とすると、(4.3) の最初の不等式を用いて

$$\frac{F'(t)}{F(t)^{1+\delta}} > \sqrt{\frac{B}{3}} \cdot \frac{F(t)^{1/2-\delta}}{(t+R)^2} \geq \sqrt{\frac{B}{3}} \cdot \frac{K^{1/2-\delta}}{2^2t^{1+2\delta}} \tag{4.6}$$

が $0<\delta<1/2$ なるすべての δ に対して成立することがわかる。この不等式を $[T_1,t]$ で積分すると

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{F(T_1)^\delta}-\frac{1}{F(t)^\delta}\right)>\frac{1}{2^3\delta}\sqrt{\frac{B}{3}}K^{1/2-\delta}\left(\frac{1}{T_1^{2\delta}}-\frac{1}{t^{2\delta}}\right)$$

が得られる。このとき、背理法の仮定 $T>2T_1$ によって、$t=2T_1$ とおくことができる。左辺の $1/F(t)^\delta>0$ を取り払い、(4.3) の最初の不等式を $t=T_1$ として用いると、

$$\frac{1}{K^\delta}\geq\left(\frac{T_1^2}{F(T_1)}\right)^\delta>\frac{1}{2^3}\sqrt{\frac{B}{3}}\left(1-\frac{1}{2^{2\delta}}\right)K^{1/2-\delta}$$

が得られる。これは $K\geq K_0$ であることに矛盾する。 □

注意 4.4 (4.6) で δ を用いず対数を出して、それから得られる

$$F(t)\geq F(T_1)\left(\frac{t}{T_1}\right)^{\sqrt{BK/6}}\qquad\text{for }t\geq T_1$$

と (4.6) の直前の不等式を組み合わせても K_0 の定義が変わるだけで、本質的にここの証明方法と何も変わらない。

4.2 解の L^2 ノルムの増大

ここでは、(4.3) の最初の不等式を、解の L^2 ノルムの“時間前進”逐次代入法によって得ることを目標とする。まず、$F''(t)=\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^4)}$ に対する逐次代入枠を作る。

命題 4.1 定理 1 の仮定の下で、ある正定数 $C=C(f,g,R)$ が存在して、F'' は次を満たす。

$$F''(t)\geq C\int_0^{t-R}\frac{d\rho}{(t-\rho+R)^3}\left(\int_0^{(t-\rho-R)/2}F''(s)ds\right)^2\quad\text{for }t\geq R\tag{4.7}$$

証明 この命題は、Yordanov and Zhang [64] による解の Radon 変換と L^2 ノルムとの間に成立する二つの評価式を組み合わせることによって容易に得られる。

実際、測度論的な考察から従う [64] の (2.21) の特別な場合

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^4)}\geq C\int_0^{t+R}\frac{\{\mathbf{R}(|u|)(\rho,t)\}^2}{(t-\rho+R)^3}d\rho\quad\text{for }t\geq 0$$

で、時間を $t\geq R$ と制限して、積分の上端を $t-R$ とする。そのとき、積分の中の $\mathbf{R}(|u|)(\rho,t)$ を、1 次元波動方程式の解の表示から従う [64] の (2.14) の特別な場合

$$\mathbf{R}(u)(\rho,t)\geq\frac{1}{2}\int_0^{(t-\rho-R)/2}\|u(\cdot,s)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^4)}ds\quad\text{for }t\geq R$$

で置き換えると良い。ここで、$\mathbf{R}(u)$ は次で定義される u の Radon 変換を表す。

$$\mathbf{R}(u)(\rho,t):=\int_{x\cdot\omega=\rho}u(x,t)dS_x\ (|\omega|=1)$$

□

注意 4.5 上記証明中の2つ目の不等式を導くときに、空間次元が3以下では成立しない計算を用いている。詳しくは、Yordanov and Zhang [64] を参照のこと。

命題 4.2 定理1の仮定の下で、ある正定数 $C = C(f, g, R)$ が存在して、F'' は次を満たす。

$$F''(t) \geq C\varepsilon^2 \quad \text{for } t \geq 0 \tag{4.8}$$

注意 4.6 これは、Yordanov and Zhang [64] の (2.5') そのものであるので証明は省略する。著者達はこれを導くための test function の発見を売りにしているが、この論文の中ではもちろん前命題に至った二つの不等式の方が重要である。実際、初期値の仮定を少し変えたものであれば、Rammaha [44] で既に示されている。これは高次元での劣臨界爆発を示した Sideris [50] の証明を非常に簡単にした仕事である。後にこれと同じ内容の論文 Jiao and Zhou [20] が出版されたが、[44] の証明を詳しく書いて、最後に大きな初期値に対する臨界爆発を付け加えたものであり、新規性が少ないように見受けられる。筆者は Takamura and Wakasa [58] の執筆中は Rammaha 氏の仕事しか知らなかったため、この論文を参考文献に引用していない。

以下、命題 4.7 と命題 4.8 を用いて、“時間前進”逐次代入法の有効性を確認しよう。まず、(4.8) で (4.7) の積分中の $F''(s)$ を置き換えると、

$$F''(t) \geq \frac{C^3}{2^2}\varepsilon^4 \int_0^{t-R} \frac{(t-\rho-R)^2}{(t-\rho+R)^3} d\rho \quad \text{for } t \geq R$$

となる。ここで、積分中の冪を揃えるために少し時間を前進させる。つまり、時間区間を $t \geq 2R$ へ制限し、ρ 積分の積分範囲を $[0, t-2R]$ とする。このとき ρ 積分の積分範囲では $t - \rho \geq 2R$ が成立している。さらに、$t - \rho \geq 2R$ と同値な関係式 $3(t-\rho-R) \geq t - \rho + R$ を用いると

$$F''(t) \geq \frac{C^3}{2^2 \cdot 3^3}\varepsilon^4 \int_0^{t-2R} \frac{d\rho}{t-\rho-R} = \frac{C^3}{2^2 \cdot 3^3}\varepsilon^4 \log\frac{t-R}{R} \quad \text{for } t \geq 2R \tag{4.9}$$

が得られる。

注意 4.7 Yordanov and Zhang [64] では、本質的に (4.9) の不等式を“時間前進”させながら更に2回積分することによって

$$F(t) \geq \left(\frac{C^3}{2^6 \cdot 3^3}\varepsilon^4 \log\frac{t}{4R}\right) t^2 \quad \text{for } t \geq 4R$$

を得ている。これでは我々の精密化した補題 4.1 をもってしても、lifespan の最適な上からの評価が出ないことは次のようにしてわかる。ε が小さければ、目標のように T_0 をほぼ lifespan の最適評価量 $\exp\left(D\varepsilon^{-2}\right)$ (D は ε によらない適当な正定数) とおくことはできる。しかし、それでは $t \geq \exp\left(D\varepsilon^{-2}\right)$ を満たさなければならず、上の不等式の t^2 の係数は ε^2 のオーダーになってしまうことが避けられない。つまり、定数 D をどのように設定しても補題 4.1 の仮定である係数が大きいことを満たさない。これを解消するには、T_0 をもっと大きく $T_0 = \exp\left(2^6 \cdot 3^3 K_0 C^{-3}\varepsilon^{-4}\right)$ と置かざるを得ず、結局、最適でない評価 $T(\varepsilon) \leq \exp\left(2^7 \cdot 3^3 K_0 C^{-3}\varepsilon^{-4}\right)$ しか得られないことになる。

証明を続けよう。普通、lifespan の上からの評価と解の爆発（非存在）は同時に得られるので、ここで諦めてしまうのであるが、ここから更に逐次代入を続行してみる。以下、ε によらない正定数を C' 表し、それは行毎に変化してもよいとする。

$t \geq 5R$ とし (4.7) の ρ 積分の積分範囲を $[0, t-5R]$ とする。さらに (4.7) の s 積分の下端を $2R$ にしてから積分中の $F''(s)$ を (4.9) の右辺で置き換えると

$$F''(t) \geq C' \int_0^{t-5R} \frac{d\rho}{(t-\rho+R)^3} \left(\int_{2R}^{(t-\rho-R)/2} \varepsilon^4 \log \frac{s-R}{R} ds \right)^2$$

を得る。ここで更に、$t \geq 6R$ とし、ρ 積分の積分範囲を $[0, t-6R]$ とする。このとき、ρ 積分では $t-\rho \geq 6R$ が成立している。従って、$2(t-\rho-R)/5 \geq 2R$ より s 積分の積分範囲を $[2(t-\rho-R)/5, (t-\rho-R)/2]$ とすることができる。また、$t \geq 6R$ に対して

$$\log \frac{2(t-\rho-R)/5-R}{R} = \log \frac{t-\rho-R+t-\rho-6R}{5R} \geq \log \frac{t-\rho-R}{5R}$$

が成立しているので、$t-\rho \geq 6R$ と同値な関係式 $7(t-\rho-R)/5 \geq t-\rho+R$ を用いることによって、

$$\begin{aligned} F''(t) &\geq C'\varepsilon^8 \int_0^{t-6R} \frac{(t-\rho-R)^2}{(t-\rho+R)^3} \left(\log \frac{t-\rho-R}{5R} \right)^2 d\rho \\ &\geq C'\varepsilon^8 \int_0^{t-6R} \frac{d\rho}{t-\rho-R} \left(\log \frac{t-\rho-R}{5R} \right)^2 = C'\varepsilon^8 \left(\log \frac{t-R}{5R} \right)^3 \end{aligned} \tag{4.10}$$

が $t \geq 6R$ に対して成立していることがわかる。

ここで、時間を前進させて (4.9) から (4.10) を得たとき、F'' の下界は $C'(\varepsilon^2 \log t)^2/C$ 倍になっていることに注意する。つまり、定数は小さくなる可能性があるが、$\varepsilon^2 \log t$ という量がある程度大きければ（これは最適な lifespan の上からの評価を邪魔しない)、時間前進を伴った逐代入を続けると t^2 の係数が大きくなることがわかる。どうせ有限時間爆発なのでこの操作を無限に続ける必要はなく、うまく合わせることができれば有限回で t^2 の係数が K_0 より大きくすることができるだろう。これが問題解決に至った考察である。

以下は逐次代入を j 回行った後の評価式であり、これは上記の操作を繰り返して帰納的に得られることが容易にわかるので、その証明は省略する。

命題 4.3 定理 1 の仮定の下で、F'' は次を満たす。

$$F''(t) \geq C_j \left(\log \frac{t-R}{(a_j-1)R} \right)^{2^j-1} \quad \text{for } t \geq a_j R \tag{4.11}$$

ここで、$a_j = 2^{j+1} - 2$ $(j = 1, 2, 3, \cdots)$ かつ

$$\begin{aligned} &C_j = \exp\left\{ 2^{j-1} \left(\log(C_0 C_1 8^{-S(j)}) \right) - \log C_0 \right\} \ (j \geq 2), \\ &C_1 = \frac{C^3}{2^2 \cdot 3^3} \varepsilon^4, \ C_0 = \frac{C}{2^{10}}, \ S(j) = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{k}{2^k}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

であり、C は命題 4.7 と命題 4.8 に現れたものである。

4.3 定理 1 の証明の完結

以下で最後の合わせを行う。(4.11) の評価式を更に "時間前進" を行いながら 2 回積分すると

$$F(t) \geq K_j(t)\, t^2 \quad \text{for } t \geq \{(a_j+2)R\}^2 \tag{4.13}$$

が得られる。ただし

$$K_j(t) := \frac{C_j}{4^{j+1}}\left(\frac{1}{2}\log t\right)^{2^j-1}$$

とした。このとき、(4.12) の C_j の定義から

$$K_j(t) = \exp\left\{2^{j-1}\log L_j(t) - j\log 4 - \log(4C_0) - \log\left(\log\sqrt{t}\right)\right\}$$

となっていることに注意する。ここで

$$L_j(t) := C_0C_1 8^{-S(j)}\left(\frac{1}{2}\log t\right)^2$$

と置いた。$K_j(t)$ の中の $-\log\left(\log\sqrt{t}\right)$ を制御するために、時間区間列 $\{I(j)\}$ $(j \geq 2)$ を次で定義する。

$$I(j) := \left[\{(a_j+2)R\}^2, \{(a_{j+1}+2)R\}^2\right]$$

ここで、$S(j)$ は j に関して単調増大で、ある正定数 $S(\infty)$ に収束すること、従って (4.12) の C_1 の定義から

$$\varepsilon^2\log t \geq E := 2\left(\frac{2^2\cdot 3^3\cdot 8^{S(\infty)}e}{C_0C^3}\right)^{1/2} > 0 \tag{4.14}$$

である限り $L_j(t) \geq e$ となることに注意する。つまり、(4.14) を仮定すると

$$K_j(t) \geq M_j \quad \text{for } t \in I(j)$$

が従う。ここで

$$M_j := \exp\left\{2^{j-1} - j\log 4 - \log(4C_0) - \log\left(\log\{(a_{j+1}+2)R\}\right)\right\}$$

と置いた。一方、$\lim_{j\to\infty} M_j = \infty$ は自明であるから、自然数 $J = J(f,g,R)$ が存在して $j \geq J$ ならば $M_j \geq K_0$ が成立することがわかる。ここで K_0 は (4.4) で $B = |\mathbf{B}^4(0,1)|^{-1}$ とおいたものである。この事実と、(4.13) より $j \geq J$ である限り

$$F(t) \geq K_0t^2 \quad \text{for } t \in I(j)$$

となる。ゆえに、$I(j)$ の定義から

$$F(t) \geq K_0t^2 \quad \text{for } t \geq \{(a_J+2)R\}^2 \quad \text{and} \quad \varepsilon^2\log t \geq E$$

が得られる。

最後に、$B = |\mathbf{B}^4(0,1)|^{-1}$ として補題 4.1 への適用を行う。まず、$T_0(\varepsilon) := \exp\left(E\varepsilon^{-2}\right)$ とおく。ここで E は (4.14) で定義されたものである。このとき、J と $F(0)/F'(0)$ は ε に依らないことから、$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f,g,R)$ が存在して、$0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ に対して

$$T_0(\varepsilon) \geq \{(a_J+2)R\}^2 \quad \text{and} \quad 2\max\left\{T_0(\varepsilon), \frac{F(0)}{F'(0)}\right\} \leq \exp\left(2E\varepsilon^{-2}\right)$$

が成立する。lifespan $T(\varepsilon)$ が $T(\varepsilon) > T_0(\varepsilon)$ を満たすとしよう。このとき、$T_0(\varepsilon)$ の定義より

$$F(t) \geq K_0t^2 \quad \text{for } t \in [T_0(\varepsilon), T(\varepsilon))$$

が得られる。これを補題 4.1 に適用すると

$$t \leq 2\max\left\{T_0(\varepsilon), \frac{F(0)}{F'(0)}\right\} \leq \exp\left(2E\varepsilon^{-2}\right)$$

となる。従って $t \in [T_0(\varepsilon), T(\varepsilon))$ 上で上限をとると

$$T(\varepsilon) \leq \exp\left(2E\varepsilon^{-2}\right) \quad \text{for } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \tag{4.15}$$

となる。反対の $T(\varepsilon) \leq T_0(\varepsilon)$ の場合は明らかである。ゆえに、(4.15) は全ての場合について成立し、定理 1 の証明が終わる。 □

5 一般論とその最適性完結後の諸問題や注意

この節では、完結してしまった一般論とその最適性の後に、どのような研究の方向性があるのか、筆者の観点から考察する。

5.1 空間 4 次元で 2 次の非線形項の更なる解析

一般論の結果で lifespan が ε の負冪の指数関数になっているとき、それを almost global existence と呼ぶ。この場合、解の何らかの量が時間変数に関して対数増大していることを意味する。しかし、いかなる方程式に対してもそうなっているわけではなく、例えば低次元では、非線形項が未知関数の導関数のみで構成されているとき、それがある代数構造を持てば解の時間減衰の可積分性を稼ぐことができ、対数増大が見られなくなることがある。つまり、時間大域解が得られることがある。これがいわゆる null condition と呼ばれるもので、$(n,\alpha)=(3,1)$ で $H=H(Du,D_xDu)$ の場合に Klainerman ('84) [28] と Christodoulou ('86) [8] によってそれぞれ独立に発見されたのが最初である。$(n,\alpha)=(2,2)$ の場合は非線形項の次数が一つ高いために状況がやや複雑になるが、$H=H(Du)$ の場合に Godin ('93) [16]、$H=H(Du,D_xDu)$ の場合に Katayama ('95) [24] によってそれぞれ独立に null condition が定式化された。しかし、$H=H(Du)$ に対する almost global existence の精密な解析を観察すると、空間 2 次元では時間大域解を得るための非線形項に対する十分条件は null condition だけでは不足しており、いわゆる non-positive condition が必要十分条件になるだろうと上見練太郎先生（当時、北大・理）によって指摘されていた。この上見予想は、最終的に Hoshiga ('08) [19] と Kubo ('07)[31] によってそれぞれ独立に証明された。これらの条件を満たさない方程式のすべての非ゼロ初期値に対する解が爆発するかどうかという問題が残っているが、条件自体には全く改良の余地はないものと思われる。

これらの他に唯一 almost global existence になっている部分が、前節の結果に深く関係する $(n,\alpha)=(4,1)$ の場合である。ただし、さすがに非線形項から u^2 を外すことはできないため、導関数の代数構造とは異なる時間大域解を得るための何らかの非線形構造を期待することになる。その第 1 歩として、非線形項 H が u^2 のときに、解の積分表示で高次元の基本解から発生する不可避な derivative loss の要素を取り去ってみたところ、低次元でのみ有効な重み付き L^∞ 空間での解析が高次元でも有効になり、以下の興味深い結果が得られた。

定理 2 (Takamura and Wakasa [60]) $n=4$ かつ $f \in C_0^4(\mathbf{R}^4)$, $g \in C_0^3(\mathbf{R}^4)$ の少なくとも一方は恒等的にゼロでないとする。このとき、(1.1) で

$$\begin{aligned} H = u(x,t)^2 \quad & -\frac{1}{\pi^2}\int_0^t d\tau \int_{|\xi|\leq 1} \frac{(u_t u)(x+(t-\tau)\xi,\tau)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}d\xi \\ & -\frac{\varepsilon^2}{2\pi^2}\int_{|\xi|\leq 1}\frac{f(x+t\xi)^2}{\sqrt{1-|\xi|^2}}d\xi \end{aligned} \tag{5.1}$$

としたときの古典解の lifespan $\overline{T}(\varepsilon)$ は、ε が十分小さいときに次を満たす。

$$\exp\left(c\varepsilon^{-2}\right) \leq \overline{T}(\varepsilon) \leq \exp\left(C\varepsilon^{-2}\right) \tag{5.2}$$

ここで、c, C は ε に依存しない正定数である。

注意 5.1 Takamura and Wakasa [60] では、$n=4$ に限らず一般の $n \geq 5$ でも類似の結果が得られている。それは (5.1) 中、u^2 の代わりに $|u|^p$、$u_t u$ の代わりに $\partial_t(|u|^p)$ としたものを解析対象としている。また、(5.1) の第 3 項

$$-\frac{\varepsilon^2}{2\pi^2}\int_{|\xi|\leq 1}\frac{f(x+t\xi)^2}{\sqrt{1-|\xi|^2}}d\xi$$

を取っても同じ結論が成立する。ただしその場合、u^2 以外は正確には $|u|^p$ そのものではなく、原点での可微分性がある程度あるように少し修正した非線形項を仮定する必要がある。何れにせよどちらの場合も、積分項の係数は次元によって異なり、積分自体も空間次元が奇数のときは単位球面上の積分になる。その場合の lifespan の分類と評価の形は $H=|u|^p$ に対するものと同じである。実はこの方程式を導出する考察は、20 年近く前に Agemi, Kubota and Takamura [4] で得られており、その中では優 Strauss 指数、つまり $p > p_0(n)$ のときの時間大域解の存在が証明されている。

注意 5.2 Agemi, Kubota and Takamura [4] の (1.8) 直後では、(5.1) に対する解の一意性は、John [22] の Appendix（または、John [23] の Appendix 1）にある、いわゆる restricted uniqueness theorem から従う、としている。しかし、仮定を読み違えたようであり、一意性は不明と思われる。なぜなら、例えば、[23] の (99a) にある不等式が証明の鍵になっているのであるが、左辺に未知関数の積分項が出現した場合には右辺の量ではそれを制御できないからである。

注意 5.3 この定理の意味するところは、高次元特有の基本解から発生する derivative loss の要素を取り去った影響が、微分方程式では (5.1) における積分項で表現されており、しかもそれは lifespan の評価の形に影響しないということである。ただ、これでは非局所項を含まない状況での時間大域解を得るための十分条件を探すヒントとしては小さいものである。しかしながら、高次元で正値単項ではなく、しかも定符号ではない非線形方程式の古典解が爆発することを初めて示した例になっている。

定理 2 の証明の方針　lifespan の下からの評価（局所存在）は、Agemi, Kubota and Takamura [4] に従って、重み付き L^∞ 空間における逐次近似法で解を構成することによって得られる。上からの評価（爆発）は、非線形項が臨界冪 $|u|^{p_0(4)}=u^2$ である特殊事情によって、次の三つのステップが必要になる。

- Rammaha ('87) [42] による高次元線形波動方程式の球対称解に対する各点評価
  解自身を下から評価するので、球面平均を考えることにより、球対称性を仮定しても一般性を失わない。そのとき、解の線形部分は高次元特有の derivative loss を含んだままなので、この評価技法が必要となる。劣臨界冪の場合には、高次元特有の積分核の評価を除けば、低次元と同様に解の各点評価の逐次代入法によって証明が終了する。しかし、臨界冪の場合には、解の各点評価に出てくる色々な変数の冪をまとめて時間対数増大を導出することは困難となり、次のステップが必要になる。
- Zhou ('92) [66] による臨界指数を持った常微分方程式の爆発解との比較原理
  これは低次元で使われた議論であり、解の爆発領域で波の特性方向とは異なる直線上で、特殊な 1 変数の非線形積分方程式の解との比較に話を持ち込む技法である。その積分方程式の解がある非線形常微分方程式を満たすことで解析が可能になるのであるが、高次元では特有の積分核が邪魔して最後の部分に困難が生じる。

- Agemi, Kurokawa and Takamura ('00) [5] による爆発領域の slicing 法
  元々常微分方程式の解と単純な比較ができない低次元の臨界状態にある系の解析に対して開発された技法の 1 つである。微分方程式に変換しなくても積分方程式の解の時間対数増大を導出できるように、爆発領域の有界性を保ちながらそれを無限回薄く刃り、その過程で各点評価の逐次代入を行う。

以上のように、長年に渡って蓄積されてきた lifespan の上からの評価を導出する解析手法が、すべて用いられて証明は構成されている。 □

更に、上記の解析対象と形は似ているが、結果が大きく異なる次の方程式も見つかった。

定理 3 (Takamura and Wakasa [61]) $n=4$ かつ $f\in C_0^3(\mathbf{R}^4)$, $g\in C_0^2(\mathbf{R}^4)$ の少なくとも一方は恒等的にゼロでないとする。このとき、(1.1) で

$$\begin{aligned} H=u(x,t)^2 \quad & -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^t d\tau\int_{|\omega|=1}(u_tu)(x+(t-\tau)\omega,\tau)dS_\omega \\ & -\frac{\varepsilon}{4\pi^2}\int_{|\omega|=1}(\varepsilon f^2+\Delta f+2\omega\cdot\nabla g)(x+t\omega)dS_\omega \end{aligned} \tag{5.3}$$

としたときの古典解は、ε が十分小さいときに時間大域的に存在する。

注意 5.4 この [61] でも、$n=4$ に限らず一般の $n\geq 5$ で類似の結果が得られている。それは (5.3) 中、u^2 の代わりに $|u|^p$、u_tu の代わりに $\partial_t(|u|^p)$、εf^2 の代わりに $\varepsilon^{p-1}|f|^p$ とそれぞれしたものを解析対象としている。ただし、各積分項の係数は次元によって異なる。その際の臨界冪はもはや $p_0(n)$ ではなく、$1+(n-1)p-(n-2)p^2=0$ の正根

$$\frac{n-1+\sqrt{n^2+2n-7}}{2(n-2)}\qquad(\leq p_0(n))$$

になっている。括弧の中で等号が成立するのは、$n=3$ のときのみであることに注意する。[61] では、p がこの臨界冪や劣臨界冪のときの lifespan の評価も詳細に導出している。

注意 5.5 初期値の正則性の仮定は $n=3$ のときと同じである。これは次元による derivative loss がない積分方程式の解を構成することに起因している。この事実は $n\geq 5$ でも同様である。また注目すべきは、以下の (5.4) にあるように、解の線形部分に対して偶数次元でも Huygens の原理が成立していることである。

定理 3 の証明の方針　積分方程式

$$\begin{aligned} u(x,t)= \quad & \frac{\varepsilon}{4\pi^2}\int_{|\omega|=1}(t\omega\cdot\nabla f+2f+2tg)\,(x+t\omega)dS_\omega \\ & +\frac{1}{4\pi^2}\int_0^t(t-\tau)d\tau\int_{|\omega|=1}u\,(x+(t-\tau)\omega,\tau)^2\,dS_\omega \end{aligned} \tag{5.4}$$

の古典解 u は、解析対象となる微分方程式の初期値問題を満たす。従って、この (5.4) の解を重み付き L^∞ 空間での逐次近似法で構成すれば良い。それは Takamura and Wakasa [60] の n が奇数のときとほぼ同じ証明である。違いは、線形部分の時間減衰評価が、自由な線形波動方程式の解の時間減衰である $(1+t)^{-3/2}$ に比べて良いこと

$$\left|\int_{|\omega|=1}(t\omega\cdot\nabla f+2f+2tg)\,(x+t\omega)dS_\omega\right|\leq\frac{C_{f,g}}{(1+t)^2}$$

である。ここで $C_{f,g}$ は f, g に依存した正定数である。この事実によって臨界指数は 2 より低くなり、2 次の非線形項は優臨界冪を持つことになって時間大域解が得られる。積分核に含まれる高次元特有の多項式に対する各点評価を行う際に、この速い時間減衰によって、通常は使わない要素による評価が必要になることに注意を要する。 □

上記の積分方程式 (5.4) を見つけることができたのは次の定理による。

定理 4 (Agemi and Takamura [3]) $n \geq 3$ で u を (1.1) の古典解とする。このとき、u は次の積分方程式を満たす。

$$\begin{aligned}(n-2)\omega_n u(x,t) = & \ \varepsilon \int_{|\omega|=1} \{t\omega \cdot \nabla f + (n-2)f + tg\}(x+t\omega)dS_\omega \\ & + (n-3)\int_0^t d\tau \int_{|\omega|=1} u_t\left(x+(t-\tau)\omega, \tau\right)dS_\omega \\ & + \int_0^t (t-\tau)d\tau \int_{|\omega|=1} H\left(x+(t-\tau)\omega, \tau\right)dS_\omega \end{aligned} \tag{5.5}$$

ただし、ω_n は $\mathbf{R}^n$ の単位球の表面積 $\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ である。

$n=4$ で $H=u^2$ としたとき、この (5.5) の右辺の第 2 項を取り去って、初期値を満たすように g に定数を掛けて調節したものが (5.4) になっている。[3] が未出版である理由は、1994 年当時では非線形問題への応用を考えることができなかったからである。

定理 2 と定理 3 の一般次元での結果を比較すると、特に空間次元が奇数のときには、非線形項の形はほぼ一致していることがわかる。従って、(5.3) の第 3 項の初期値から作られる成分のうち後ろ 2 つが、解の時間大域存在に寄与する成分であると思われる。この成分の出現は、ほぼ、自由解の次元による derivative loss を消去したことに相当している。今後はこの高次元特有の非局所項を含む方程式に対する時間大域解の存在・非存在の判定条件を明らかにしていくことが目標となる。上記 2 つの結果が、そのための先駆的なものになっていることを期待したい。

5.2 その他の考察

上記のように非線形項に非線形積分項を付加する考察は、すべて積分方程式の L^∞ 空間での解析に不都合な部分を消去することによって得られるものを対象としている。この他に非局所項を含まない単項ではない非線形項で、何か新しいことが生まれる可能性はないかどうか、次の簡単な例で考察してみる。

$$u_{tt} - \Delta u = u^2 - u^3 \quad \text{in } \mathbf{R}^4 \times [0, \infty) \tag{5.6}$$

これは、全エネルギーが各非線形項によってどのように分配されるかという視点からも面白い対象である。ここで、$v = u - 1$ と変換すると、簡単な計算によって (5.6) は

$$v_{tt} - \Delta v + v = -2v^2 - v^3 \quad \text{in } \mathbf{R}^4 \times [0, \infty) \tag{5.7}$$

という Klein-Gordon 方程式になることがわかる。(5.7) は Shatah [48] によって、小さい初期値に対して時間大域解の存在が保証されている。ただし、(5.7) に対する小さい初期値は、(5.6) では初期速度は小さいが初期位置が定数 1 に近いことになり、我々の状況設定から外れることになる。しかし、(5.6) について、初期位置をゼロに近いものから定数 1 の近くまで連続的に動かしたら一体何が起こるのか、方程式の主要部が異なっていることを考えると非常に興味深い問題である。

5.3 初期値の台が必ずしもコンパクトでない場合の注意

一般論とその最適性では、解の有限伝播性が重要な役割を果たしている。実際、初期値の台がコンパクトでない場合には、時間大域解が存在する冪であっても、初期値の空間無限遠方での減衰が悪いと有限時間内に解が爆発することが知られている。また、その減衰の臨界値も方程式のスケール不変性に関係した量で書けることが明らかにされている。この方向の解析は、1986 年に出版された浅倉史興先生（当時、追手門学院大・経済）による Asakura [6] によって始められたため、一般的な状況での命題における仮定は浅倉条件と呼ばれている。その後、北大・理の院生だった筆者や同世代の津田谷公利氏（当時、早稲田大・理工の院生）を皮切りに、久保英夫氏（当時、北大・理の院生）や肥田野久二男氏（当時、早稲田大・理工の院生）などの若手が中心となって、久保田幸次先生（当時、北大・理）や望月清先生（当時、信州大・理）まで巻き込んで、すべて日本人の研究者達で精力的に解析され、1990 年代中頃にはほぼ終息した。

それからかなり時間が経ってしまったが、最近、上坂洋司先生（当時、日大・理工）を巻き込んで改良型浅倉条件が提示される動きが筆者の周りで少し出てきた。これらの歴史を含めた詳細は Takamura [54] や Tsutaya [62]、または Takamura, Uesaka and Wakasa [56]、Takamura, Uesaka and Wakasa [57] などの序文を参照のこと。この解析については、今回とは別の機会に解説できることを願っている。

5.4 系に関する注意

本稿は単独方程式の解析に主眼を置いたため、方程式系については全く触れなかった。しかしながら、系では各成分で伝播速度が異なる状況も考察するため、非常に興味深い現象が多数観察されている。ここでは詳細に触れることはしないが、以下に参考文献のみ挙げておくことにする。

低次元ではまとまった半線形系に関する論説 Kubo and Ohta [33] が、久保英夫氏（当時、阪大・理）と太田雅人氏（当時、埼玉大・理）によって 2005 年に出版されており、非常に参考になる。また高次元での解析は遅れているが、筆者と若狭恭平、筑波大・数に所属時の指導学生であった黒川友紀氏（当時、米子高専・一般科目）による Kurokawa, Takamura and Wakasa [34] が最新のものと思われる。他に、系における null condition に関連する最新の研究も、一般論に登場している片山聡一郎氏（和歌山大・教育）や砂川秀明氏（阪大・理）中心に進化を続けている。詳しくは Katayama, Matoba and Sunagawa [26] を参照のこと。

【謝辞】 本研究の一部は日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (C) 研究課題「高次元非線形波動方程式の臨界状態の解析とその応用」(課題番号：24540183、研究代表者：高村博之) の助成を受けて行われたものです。本稿を執筆するにあたり、片山聡一郎氏（和歌山大・教育）、久保英夫氏（北大・理）、星賀彰氏（静岡大・工）、肥田野久二男氏（三重大・教育）、横山和義氏（道工大・創生工）から筆者に欠けていた知識の提供を受けたことに感謝いたします。特に、肥田野氏には Zhou and Han [74] をいち早く教えていただいた上、多数の有益な議論を交わしていただきました。また、片山氏には、予稿段階での空間 2 次元に関する参考文献に関するミスを指摘していただきました。更に、本稿執筆のきっかけとなった RIMS 研究集会“幾何学的偏微分方程式に対する保存則と正則特異性の研究”(於：京都大学数理解析研究所、平成 24 年 6 月 13～15 日）に講演者として招聘していただいた小川卓克先生（東北大・理）と三沢正史先生（熊本大・自然）に感謝申し上げます。

最後にこの小論文を、平成 24 年 1 月 8 日に 74 歳でご逝去された故上見練太郎先生に捧げたいと思います。先生は筆者が北海道大学大学院理学研究科数学専攻修士課程に在籍していた平成 2～4 年の指導教員で、学位審査時（平成 7 年北大）には主査になっていただきました。筆者は平成 4 年より筑波大学数学系助手となったため、実質 2 年間のみのご指導でした。しかし、上見先

生が北大を定年退官され、公立はこだて未来大学に異動されたのが平成13年のこと。平成15年から先生の2度目の定年退職があった平成20年まで、職場を共にできたことには何か強い縁を感じます。先生のおかげで非線形波動方程式の分野に足を踏み入れることができ、時間が掛かりましたが、こうしてその頃からの問題を解決することができました。上見先生のご冥福を祈りつつ、また、共著論文をいくつか出させていただいたことに感謝し筆を置きたいと思います。

参考文献

[1] R.Agemi, *Blow-up of solutions to nonlinear wave equations in two space dimensions*, Manuscripta Math., **73**(1991), 153-162.

[2] R.Agemi and H.Takamura, *The lifespan of classical solutions to nonlinear wave equations in two space dimensions*, Hokkaido. Math. J., **21**(1992), 517-542.

[3] R.Agemi and H.Takamura, *Remarks on representations of solutions to the wave equations*, Mathematical Research Note 94-004, Institute of Mathematics, University of Tsukuba (June, 1994).

[4] R.Agemi, K.Kubota and H.Takamura, *On certain integral equations related to nonlinear wave equations*, Hokkaido. Math. J., **23**(1994), 241-276.

[5] R.Agemi, Y.Kurokawa and H.Takamura, *Critical curve for p-q systems of nonlinear wave equations in three space dimensions*, J. Differential Equations, **167**(2000), 87-133.

[6] F.Asakura, *Existence of a global solution to a semi-linear wave equation with slowly decaying initial data in three space dimensions*, Comm. in Partial Differential Equations, **11(13)**(1986), 1459-1487.

[7] Y.Choquet-Bruhat, *Global existence for solutions of* $\Box u = A|u|^p$, J. Differential Equations, **82**(1989), 98-108.

[8] D.Christodoulou, *Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data*, Comm. Pure Appl. Math., **39**(1986), 267-282.

[9] S.DiPomponio and V.Georgiev, *Life-span of subcritical semilinear wave equation*, Asymptotic Anal., **28**(2001), 91-114.

[10] V.Georgiev, H.Lindblad and C.D.Sogge, *Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations*, Amer. J. Math., **119**(1997), 1291-1319.

[11] V.Georgiev, H.Takamura and Y.Zhou, *The lifespan of solutions to nonlinear systems of a high-dimensional wave equation*, Nonlinear Anal., **64**(2006), 2215-2250.

[12] R.T.Glassey, *Blow-up theorems for nonlinear wave equations*, Math. Z., **132**(1973), 183-203.

[13] R.T.Glassey, *Finite-time blow-up for solutions of nonlinear wave equations*, Math. Z., **177**(1981), 323-340.

[14] R.T.Glassey, *Existence in the large for* $\Box u = f(u)$ *in two space dimensions*, Math. Z, **178**(1981), 233-261.

[15] R.T.Glassey, *MathReview to "Global behavior of solutions to nonlinear wave equations in three space dimensions" of Sideris*, Comm. Partial Differential Equations (1983).

[16] P.Godin, *Lifespan of solutions of semilinear wave equations in two space dimensions*, Comm. Partial Differential Equations, **18**(1993), 895-916.

[17] K.Hidano and K.Tsutaya, *Global existence and asymptotic behavior of solutions for nonlinear wave equations*, Indiana Univ. Math. J., **44**(1995), 1273-1305.

[18] K.Hidano, C.Wang and K.Yokoyama, *The Glassey conjecture with radially symmetric data*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (9), **98**(2012), 518-541.

[19] A.Hoshiga, *The existence of the global solutions to semilinear wave equations with a class of cubic nonlinearities in 2-dimensional space*, Hokkaido Math. J. **37**(2008), 669-688.

[20] H.Jiao and Z.Zhou, *An elementary proof of the blow-up for semilinear wave equations in high space dimensions*, J.Differential Equations, **189**(2003), 355-365.

[21] F.John, *Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Manuscripta Math., **28**(1979), 235-268.

[22] F.John, *Blow-up of solutions for quasi-linear wave equations in three space dimensions*, Comm. Pure Appl. Math., **34**(1981), 29-51.

[23] F.John, "Nonlinear Wave Equations, Formation of Singularities", Pitcher Lectures in Mathematical Sciences, Lehigh University, AMS, 1990.

[24] S.Katayama, *Global existence for systems of nonlinear wave equations in two space dimensions. II*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **31**(1995), 645-665.

[25] S.Katayama, *Lifespan of solutions for two space dimensional wave equations with cubic nonlinearity*, Comm. in Partial Differential Equations, **26**(2001), 205-232.

[26] S.Katayama, T.Matoba and H.Sunagawa, *A semilinear hyperbolic system violating the null condition*, arXiv:1206.0066 [math.AP] 1 Jun. 2012.

[27] T.Kato, *Blow up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations*, Comm. Pure Appl. Math, **33**(1980), 501-505.

[28] S.Klainerman, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations*, Nonlinear systems of partial differential equations in applied mathematics, Part 1 (Santa Fe, N.M., 1984), 293-326, Lectures in Appl. Math., 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[29] H.Kubo, *On the critical decay and power for semilinear wave equations in odd space dimensions*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **2**(1996), 173-190.

[30] H.Kubo, *Slowly decaying solutions for semilinear wave equations in odd space dimensions*, Nonlinear Anal., **28**(1997), 327-357.

[31] H.Kubo, *Asymptotic behavior of solutions to semilinear wave equations with dissipative structure*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 2007, Dynamical Systems and Differential Equations. Proceedings of the 6th AIMS International Conference, suppl., 602-613.

[32] H.Kubo and K.Kubota, *Asymptotic behavior of radially symmetric solutions of* $\Box u = |u|^p$ *for super critical values p in even space dimensions*, Japanese J. Math., **24**(1998), 191-256.

[33] H.Kubo and M.Ohta, *On the global behavior of classical solutions to coupled systems of semilinear wave equations*, "New trends in the theory of hyperbolic equations", 113-211, Oper. Theory Adv. Appl., 159, Birkhauser, Basel, 2005.

[34] Y.Kurokawa, H.Takamura and K.Wakasa, *The blow-up and lifespan of solutions to systems of semilinear wave equation with critical exponents in high dimensions*, Differential Integral Equations, **25**(2012), 363-382.

[35] H.A.Levine, *Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form* $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$, Trans. Amer. Math. Soc., **192**(1974), 1-21.

[36] T-T.Li, *Lower bounds of the life-span of small classical solutions for nonlinear wave equations*, Microlocal Analysis and Nonlinear Waves (Minneapolis, MN, 1988-1989), The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, vol.30 (M.Beals, R.B.Melrose and J.Rauch ed.), 125-136, Springer-Verlag New York, Inc., 1991.

[37] T-T.Li and Y.Chen, "Global Classical Solutions for Nonlinear Evolution Equations", Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 45, Longman Scientific & Technical, 1992.

[38] T-T.Li and Y.Zhou, *A note on the life-span of classical solutions to nonlinear wave equations in four space dimensions*, Indiana Univ. Math.J., **44**(1995), 1207-1248.

[39] H.Lindblad, *Blow-up for solutions of* $\Box u = |u|^p$ *with small initial data*, Comm. Partial Differential Equations, **15(6)**(1990), 757-821.

[40] H.Lindblad and C.D.Sogge, *Long-time existence for small amplitude semilinear wave equations*, Amer. J. Math., **118**(1996), 1047-1135.

[41] K.Masuda, *Blow-up solutions for quasi-linear wave equations in two space dimensions*, Lecture Notes in Num. Appl. Anal., **6**(1983), 87-91.

[42] M.A.Rammaha, *Finite-time blow-up for nonlinear wave equations in high dimensions*, Comm. Partial Differential Equations, **12**(1987), 677-700.

[43] M.A.Rammaha, *On the blowing up of solutions to nonlinear wave equations in two dimensions*, J. Reine Angew. Math, **391**(1988), 55-64.

[44] M.A.Rammaha, *Nonlinear wave equations in high dimensions*, Proceeding of the International Conference on Theory and Applications of Differential Equations (Columbus, OH, March 21-25, 1988), Vol.I,II, Ohio University Press, Athens, OH, 1989, 322-326.

[45] M.A.Rammaha, *A note on a nonlinear wave equations in two and three space dimensions*, Comm. Partial Differential Equations, **22**(1997), 799-810.

[46] J.Schaeffer, *The equation* $u_{tt} - \Delta u = |u|^p$ *for the critical value of* p, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **101A**(1985), 31-44.

[47] J.Schaeffer, *Finite-time blow-up for* $u_{tt} - \Delta u = H(u_r, u_t)$ *in two space dimensions*, Comm. Partial Differential Equations, **11**(1986), 513-543.

[48] J.Shatah, *Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations*, Comm. Pure Appl. Math, **38**(1985), 685-696.

[49] T.C.Sideris, *Global behavior of solutions to nonlinear wave equations in three space dimensions*, Comm. Partial Differential Equations, **8**(1983), 1219-1323.

[50] T.C.Sideris, *Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions*, J. Differential Equations, **52**(1984), 378-406.

[51] T.C.Sideris, *Formation of singularities in solutions to nonlinear hyperbolic equations*, Arch. Rational Mech. Anal., **86**(1984), 369-381.

[52] W.A.Strauss, *Nonlinear scattering theory at low energy*, J. Funct. Anal., **41**(1981), 110-133.

[53] W.A.Strauss, "Nonlinear Wave Equations", CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 73. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.

[54] H.Takamura, *Blow-up for semilinear wave equations with slowly decaying data in high dimensions*, Differental and Integral Equations, **8**(1995), 647-661.

[55] H.Takamura, *Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations*, Ph.D. thesis, Hokkaido Univ.(1995), printed in Mathematical Research Note 95-006, Institute of Mathematics, University of Tsukuba (April, 1995).

[56] H.Takamura, H.Uesaka and K.Wakasa, *Blow-up theorem for semilinear wave equations with non-zero initial position*, J.Differential Equations, **249**(2010), 914-930.

[57] H.Takamura, H.Uesaka and K.Wakasa, *Sharp blow-up for semilinear wave equations with non-compactly supported data*, Discrete and Countinuous Dynamical Systems-Supplement 2011, W.Feng, Z.Feng, M.Grasselli, A.Ibragimov, X.Lu, S.Siegmund and J.Voigt (eds.), "Dynamical Systems, Differential Equations and Applications" vol. II, pp.1351-1357, AIMS, 2011.

[58] H.Takamura and K.Wakasa, *The sharp upper bound of the lifespan of solutions to critical semilinear wave equations in high dimensions*, J. Differential Equations, **251**(2011), 1157-1171.

[59] H.Takamura and K.Wakasa, *The final problem on the optimality of the general theory for nonlinear wave equations*, Progress in Mathematics vol.301, M.Ruzhansky, M.Sugimoto and J.Wirth (eds.), "Evolution Equations of Hyperbolic and Schrödinger Type", 315-324, Springer Basel, 2012.

[60] H.Takamura and K.Wakasa, *Almost global solutions of semilinear wave equations with the critical exponent in high dimensions*, preprint (2014).

[61] H.Takamura and K.Wakasa, *Global existence for semilinear wave equations with the critical blow-up terms in high dimensions*, preprint (2014).

[62] K.Tsutaya, *Lower bounds for the life span of solutions of semilinear wave equations with data of noncompact support*, Hokkaido Math. J., **23**(1994), 549-560.

[63] N.Tzvetkov, *Existence of global solutions to nonlinear massless Dirac system and wave equations with small data*, Tsukuba Math. J., **22**(1998), 198-211.

[64] B.Yordanov and Q.S.Zhang, *Finite time blow up for critical wave equations in high dimensions*, J. Funct. Anal., **231**(2006), 361-374.

[65] Y.Zhou, *Life span of classical solutions to* $u_{tt} - u_{xx} = |u|^{1+\alpha}$, Chin. Ann. of Math. Ser.B, **13**(1992), 230-243.

[66] Y.Zhou, *Blow up of classical solutions to* $\Box u = |u|^{1+\alpha}$ *in three space dimensions*, J. Partial Differential Equations, **5**(1992), 21-32.

[67] Y.Zhou, *Life span of classical solutions to* $\Box u = |u|^p$ *in two space dimensions*, Chin. Ann. Math. Ser.B, **14**(1993), 225-236.

[68] Y.Zhou, *Cauchy problem for semilinear wave equations in four space dimensions with small initial data*, J. Partial Differential Equations, **8**(1995), 135-144.

[69] Y.Zhou, *The global existence and life span for the classical solutions of fully nonlinear wave equations*, preprint, 1996.

[70] Y.Zhou, *Blow up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear wave equations*, Chin. Ann. Math. Ser.B, **22**(2001), 275-280.

[71] Y.Zhou, *Blow up of solutions to semilinear wave equations with critical exponent in high dimensions*, Chin. Ann. Math. Ser.B, **28**(2007), 205-212.

[72] Y.Zhou and W.Han, *Sharpness on the lower bound of the lifespan of solutions to nonlinear wave equations*, Chin. Ann. Math. Ser.B, **4**(2011), 521-526.

[73] Y.Zhou and W.Han, *Life-span of solutions to critical semilinear wave equations*, Comm. in Partial Differential Equations, **39**(2014), 439-451.

[74] Y.Zhou and W.Han, *Blow up for some semilinear wave equations in multi-space dimensions*, Comm. in Partial Differential Equations, **39**(2014), 651-665.

高村博之
公立はこだて未来大学 システム情報科学部 複雑系知能学科
〒 041-8655 北海道函館市亀田中野町 116-2
e-mail : takamura@fun.ac.jp