数理解析研究所講究録
第 1973 巻 2015 年 92-100


# 局所二次対称積 $L$ 関数と三重線形形式

京大白眉センター/数学教室　山名俊介 (Shunsuke Yamana)
講演時: Graduate School of Mathematics, Kyushu University,
本稿執筆時: The Hakubi center/Department of Mathematics, Kyoto University

## 1 序

一般線形群の表現の二次対称積 $L$ 関数は, Langlands-Shahidi 法で構成できる他, Rankin-Selberg 法でも Bump と Ginzburg [5] により 20 年以上前に構成されている. その構成は偶数次一般線形群のときに欠陥があったが, 武田修一郎氏 [16] により最近修正された. しかし依然として, 二次対称積 $L$ 関数の性質は十分に研究されていない. 二次対称積 $L$ 関数は, Langland の関手性理論の中で重要な役割を果たすので, その基本的性質を確立することは重要である. このことに関して, 筆者による最近得られた結果を本稿で報告したい.

### 1.1 一般線形群の二次対称積 $L$ 因子

$F$ を非アルキメデス的局所体とし, 簡単のためにその標数は 0 であるとする. $F$ 上の $r$ 次一般線形群を $G_r = \mathrm{GL}_r(F)$ で表す. 自然数 $n$ を固定して $G = G_n$ とおこう. $G$ の既約許容表現は, 局所ラングランズ対応より $F$ の Weil-Deligne 群の $n$ 次元表現と一対一に対応する. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は $n$ 次複素行列からなるベクトル空間に $X \mapsto gX\,{}^tg$ により作用する. 対称行列からなる $\frac{n(n+1)}{2}$ 次元部分空間 $\mathrm{sym}^2$ と交代行列からなる $\frac{n(n-1)}{2}$ 次元部分空間 $\Lambda^2$ は, この作用で不変である. これらの部分表現はそれぞれ二次対称積表現, 二次交代積表現と呼ばれる.

$G$ の既約許容表現 $\pi$ に対応する Weil-Deligne 群の $n$ 次元表現を $\mathrm{rec}(\pi)$ と書く. Artin 型の $L$ 因子 $L(s, \mathrm{sym}^2 \circ \mathrm{rec}(\pi))$ は $\pi$ の二次対称積 $L$ 因子, $L(s, \Lambda^2 \circ \mathrm{rec}(\pi))$ は $\pi$ の二次交代積 $L$ 因子と呼ばれる. これらの $L$ 因子が $s=0$ で極を持つのはどのような場合か考えよう. まず $L$ 因子の分解

$$L(s, \mathrm{rec}(\pi) \otimes \mathrm{rec}(\pi)) = L(s, \mathrm{sym}^2 \circ \mathrm{rec}(\pi)) L(s, \Lambda^2 \circ \mathrm{rec}(\pi)) \tag{1.1}$$

が成り立つことは容易に分かる. 簡単のために $\pi$ が平方可積分であるとする. このとき $L(s, \mathrm{rec}(\pi) \otimes \mathrm{rec}(\pi))$ が極を持つのは, $\pi$ が自己双対的であるときである. さらに高々一位の極なので, $L(s, \mathrm{sym}^2 \circ \mathrm{rec}(\pi))$ か $L(s, \Lambda^2 \circ \mathrm{rec}(\pi))$, どちらか一方だけが極を持つ. $\pi$ が自己双対的であるとき, どちらが極を持つか知ることは興味ある問題である. Langlands 関手性からこれらの $L$ 因子が極を持つ表現は直交群やシンプレクティック群からのリフトであると考えられる.

二次交代積 $L$ 因子の極の以下のような純表現論的特徴付けが知られている. $F$ の非自明な指標 $\psi$ を固定する.

**定理 1.1** (Kewat-Raghunathan [11], et al). $\pi$ を $G$ の既約平方可積分表現とし, その中心指標を $\omega$ と書くことにする. $L(s, \Lambda^2 \circ \mathrm{rec}(\pi))$ が $s=0$ で極を持てば, $n$ は偶数, $\omega = 1$ である. $n$ は偶数かつ $\omega=1$ であるとき, 以下の条件は同値となる:

- $L(s, \Lambda^2 \circ \mathrm{rec}(\pi))$ が $s=0$ で極を持つ.
- 以下の条件を $0$ でない $\pi$ 上の線形形式 $\lambda$ が存在する:

$$\lambda\left(\pi\left(\begin{bmatrix} h & hX \\ 0 & h\end{bmatrix}\right)v\right) = \psi(\mathrm{tr}(X))\lambda(v) \quad (v \in \pi,\ h \in G_{n/2},\ X \in \mathrm{M}_{n/2}(F)).$$

上の性質を持つ線形形式を $\pi$ の Shalika 形式と呼ぶ.

**定理 1.2** (Jacquet-Rallis [8]). $\pi$ を $G$ の既約許容表現とする. $\pi$ の *Shalika* 形式の空間は高々一次元である.

本稿では二次対称積 $L$ 因子の場合に類似の結果を紹介する.

## 1.2 一般線形群の二重被覆群

二次対称積 $L$ 関数の積分表示の構成には, Kazhdan と Patterson [10] により構成された例外表現が用いられる. 例外表現は, 一般線形群ではなく, その二重被覆群の表現なので, 二重被覆群の構成とその基本性質の解説から始めよう. シンプレクティック群の二重被覆群のメタプレクティック群の場合と異なり, 一般線形群の二重被覆群は具体的に 2 コサイクルを構成して群論的に構成される (cf. [3]).

最初に必要な記号をまとめておく. $\mu_2 = \{\pm 1\}$ とおく. $|\cdot|$ を $F$ の正規化された付値, $(\ ,\ )$ を $F$ のヒルベルト記号とする. $Z_r$ を $G_r$ のスカラー行列からなる部分群, $T_r$ を $G_r$ の対角行列からなる部分群, $B_r$ を $G_r$ の上半三角行列からなる部分群, $N_r$ を対角成分が全て $1$ である上半三角行列からなる $G_r$ の部分群, $\mathscr{P}_r$ をの第 $r$ 行が $(0,0,\ldots,0,1)$ であるような $r$ 次正則行列からなる $G_r$ の部分群とする. $G_r$ の放物型部分群は, $B_r$ を含むとき, 標準放物型部分群と呼ばれる.

$$\mathscr{Z}_r = \begin{cases} Z_r & 2 \nmid r, \\ \{z^2 \cdot \mathbf{1}_r \mid z \in F^\times\} & 2 | r \end{cases}$$

とおく. 対角行列を $t = \mathrm{diag}[t_1, t_2, \ldots, t_r]$ と書くことにして, $\mathscr{T}_r$ を

$$t_{r-2i+1}t_{r-2i+2}^{-1} \in F^{\times 2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, \left[\tfrac{r}{2}\right]$$

を満たす対角行列 $t$ からなる $T_r$ の部分群とする.

以下では $r \geq 2$ とする. 二重被覆 $p_r : \bar{G}_r \to G_r$ を, Banks, Levy と Sepanski が [3] で構成したコサイクル $\sigma_r : G_r \times G_r \to \mu_2$ を使って定義する. 即ち, 演算

$$(g, \zeta) \cdot (g', \zeta') = (gg', \zeta\zeta'\sigma_r(g, g'))$$

により集合 $\bar{G}_2 = G_2 \times \mu_2$ は群になる.

注意 1.3. (1) $\sigma_1$ は自明な 2 コサイクル. $\sigma_2$ は久保田 2 コサイクルである.

(2) $\sigma_r$ は, ブロック対角行列への制限に関して優れた構造を持っている. $r = r_1 + \cdots + r_t$, $g_i, g_i' \in G_{r_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ のとき,

$$\sigma_r\left[\begin{bmatrix} g_1 & & \\ & \ddots & \\ & & g_t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} g_1' & & \\ & \ddots & \\ & & g_t' \end{bmatrix}\right] = \prod_{i=1}^{t} \sigma_{r_i}(g_i, g_i') \prod_{j<k} (\det g_j, \det g_k').$$

(3) 切断 $\mathbf{s}_r : G_r \to \bar{G}_r$ を

$$\mathbf{s}_r(g) = (g, 1), \qquad g \in G_r$$

により定義する. $\sigma_r$ は以下の性質も満たす:

$$\sigma_r(ugu', g'u'') = \sigma_r(g, u'g') \qquad (g, g' \in G_r,\ u, u', u'' \in N_r).$$

特に $\mathbf{s}_r$ の制限は $N_r$ から $\bar{G}_r$ への群準同型であり, $N_r$ は自然に $\bar{G}_r$ の部分群と見做すことができる. $P$ が $G_r$ の標準的放物型部分群であり, $U$ がその冪単根基なら

$$\tilde{p}u\tilde{p}^{-1} = p_r(\tilde{p})up_r(\tilde{p})^{-1} \qquad (u \in U,\ \tilde{p} \in \tilde{P}).$$

(4) $\bar{G}_r$ の表現の Jacquet 加群や微分を考えることができる. $N_r$ の generic 指標 $\psi_r$ を $\psi_r(u) = \psi(u_{1,2} + u_{2,3} + \cdots + u_{r-1,r})$ のように定義する. $\pi$ が $\bar{G}_r$ の表現のとき, $\pi(N_r, \psi_r)$ を $\pi(u)v - \psi_r(u)v$ $(v \in \sigma,\ u \in N_r)$ の形の元で生成される $\pi$ の部分加群とし, $\pi_{N_r,\psi_r} = \pi/\pi(N_r, \psi_r)$ とおく.

$H$ が $G_r$ の部分群であるとき, その逆像を $\tilde{H} = p_r^{-1}(H)$ と書き, $H$ のモジュラス関数を $\delta_H$ と書く. $\tilde{Z}_r$ は可換群だが, $r$ が偶数のとき $\bar{G}_r$ の中心ではない. $\bar{G}_r$ の中心は $\tilde{\mathscr{Z}}_r$ である. $\tilde{T}_r$ は可換群ではなく, $\tilde{\mathscr{T}}_r$ は $\tilde{T}_r$ の極大可換部分群である.

## 1.3 例外表現

$G_r$ の表現は $p_r$ を合成することで, $\bar{G}_r$ の表現と見ることもできる. $\bar{G}_r$ の表現は, $G_r$ の表現からこのようにして得られないとき, genuine と呼ばれる. 例外表現は genuine 表現の中で最も小さい表現と考えることができる.

$F$ の非自明な指標 $\psi$ を一つ固定すれば, $F$ の全ての指標は $\psi_a(x) = \psi(ax)$ $(a \in F)$ の形に与えられる. $\gamma(\psi)$ を $\psi$ に関する Weil 定数とし, 0 でない $F$ の元 $a$ に対し, $\mu_\psi(a) = \gamma(\psi_a)/\gamma(\psi)$ とおく. $\tilde{T}_r$ の可換部分群 $\tilde{\mathscr{T}}_r$ の指標 $\xi_r^\psi$ を以下で定義する:

$$\xi_r^\psi(\mathbf{s}_r(t)) = \prod_{i=0}^{[r/2]-1} \mu_\psi(t_{r-2i})^{-1}.$$

正規化された誘導表現

$$\mathscr{I}_r^\psi = \mathrm{Ind}_{\tilde{\mathscr{T}}_r N_r}^{\bar{G}_r} \xi_r^\psi \otimes \delta_{B_r}^{-1/4}$$

は唯一つの既約部分表現を持ち, それを $\bar{G}_r$ の例外表現と呼び, $\theta_r^{\psi}$ と表す ([10] の Theorem I.2.9 及び [2] を参照). $r$ が偶数のとき, 例外表現は $\psi$ の取り方に依存しない. $r$ が奇数のときも例外表現は $\psi$ の取り方を変えても二次指標で捻った程度の違いしか生じないので, 以下ではしばしば $^{\psi}$ を省き $\theta_r = \theta_r^{\psi}$ などと書く.

**定義 1.4.** $\mathrm{Hom}_{G_r}(\pi \otimes \theta_r^{\psi} \otimes \theta_r^{\psi^{-1}}, \mathbb{C}) \neq \{0\}$ のとき, $G_r$ の既約許容表現 $\pi$ は distinguished と呼ばれる.

$G_{r-1}$ を $G_r$ の部分群 $\left\{ \begin{pmatrix} g & \\ & 1 \end{pmatrix} \middle| \, g \in G_{r-1} \right\}$ と同一視する.

$$\mathscr{Q}_r = \mathscr{Z}_r \mathscr{P}_r, \qquad \mathcal{P}_r = Z_r \mathscr{P}_r$$

とおく.

$$\zeta_r((a^2 \mathbf{1}_r, \zeta)) = \zeta \qquad (a \in F^{\times}, \ \zeta \in \mu_2)$$

により $\tilde{\mathscr{Z}}_r$ の指標を定める.

$r = n$ のとき添え字の $_n$ はしばしば省略する. $\bar{G}_{n-1}$ の例外表現 $\theta_{n-1}^{\psi}$ を外部テンソル積 $\theta_{n-1}^{\psi} \boxtimes \zeta$ により $\tilde{\mathscr{Q}}$ の表現に拡張し,

$$I_{\psi}(s) = \mathrm{Ind}_{\tilde{\mathscr{Q}}}^{\bar{G}}(\theta_{n-1}^{\psi} \boxtimes \zeta) \otimes \delta_{\mathcal{P}}^{s/4}, \qquad s \in \mathbb{C}$$

とおく.

# 2 主結果

定理 A, B, C の証明は [17] を参照. 定理 E の証明は [9] を参照.

**定理 A.** $\pi$ を $G$ の既約平方可積分表現とし, その中心指標を $\omega$ と書くことにする. このとき, 以下の条件は同値である:

- $L(s, \mathrm{sym}^2 \circ \mathrm{rec}(\pi))$ が $s = 0$ で極を持つ.
- $\omega^2 = 1$ かつ $\pi \otimes \omega$ は *distinguished.*

注意 2.1. 二次対称積 $L$ 因子や二次交代積 $L$ 因子は, Langlands-Shahidi 法でも構成でき, 二つの定義が一致することは Henniart [7] により証明されている. さらに, 二次対称積 $L$ 因子を積分表示を使って構成することもでき, この積分表示により局所 $L$ 因子を例外表現と結び付けることができる. 平方可積分表現の場合に, 筆者 [17] は積分表示も同じ $L$ 因子を与えるを証明している. 二次交代積 $L$ 因子の場合の類似の結果は, Kewat と Raghunathan [11] に証明されている.

Kewat らの結果 [11] と組み合わせて以下の系を容易に証明できる.

系 2.2. $\pi$ を $G$ の既約平方可積分表現とし, $\omega$ をその中心指標とする.

(1) $n$ が奇数のとき, $\pi$ が distinguished であるための必要十分条件は, $\omega = 1$ かつ $\pi$ は自己双対的であることである.

(2) $n$ が偶数かつ $\omega \neq 1$ のとき, $\pi$ が distinguished であるための必要十分条件は $\pi$ が自己双対的であることである.

(3) $n$ が偶数かつ $\omega = 1$ のとき, $\pi$ は自己双対的であるための必要十分条件は $\pi$ が distinguished 若しくは Shalika 形式を持つことである. さらにこのとき, $\pi$ が distinguished でありかつ Shalika 形式を持つことはない.

注意 2.3. (3) は定理 A と矛盾していない. なぜなら $n$ が偶数, $\pi$ が distinguished, $\chi^2 = 1$ のとき $\pi \otimes \chi$ も distinguished だからである.

**定理 B.** $\pi$ が $G$ の既約許容ユニタリ表現であるとき,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\pi \otimes \theta \otimes \theta^\vee, \mathbb{C}) \leq 1.$$

注意 2.4. (1) genuine 表現の内部テンソル積は genuine 表現ではない.

(2) 内部テンソル積 $\theta^\psi \otimes (\theta^\psi)^\vee$ の同型類は $\psi$ の取り方に依存しないので, $\psi$ を省いても差し支えはない.

注意 2.5. 定理 B はユニタリ性の仮定はなくても成り立つと期待される. Binyong Sun [15] は別の不変三重線形形式の一意性を証明している. 筆者の証明にはユニタリ性が必要であるが, 代わりにより強い結果を証明することができる:

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\pi \otimes \theta_\chi^\psi \otimes I_\psi(1), \mathbb{C}) \leq 1.$$

例外表現 $(\theta_r^\psi)^\vee$ は $I_\psi(1)$ の商なので, 単射

$$\mathrm{Hom}_G(\pi \otimes \theta_\chi^\psi \otimes (\theta^\psi)_r^\vee, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_G(\pi \otimes \theta_\chi^\psi \otimes I_\psi(1), \mathbb{C})$$

が存在することに注意. この結果は次の定理の類似である.

定理 2.6 (Bernstein [4]). $\pi$ が $G_r$ の既約許容表現であるとき,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_r}(\pi \otimes \pi^\vee, \mathbb{C}) = 1.$$

実際, Frobenius の相互律より

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{G_r}(\pi \otimes \pi^\vee \otimes \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}_r}^{G_r} \delta_{\mathcal{P}_r}^{1/2}, \mathbb{C}) &\simeq \mathrm{Hom}_{G_r}(\pi \otimes \pi^\vee, \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}_r}^{G_r} \delta_{\mathcal{P}_r}^{-1/2}) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_r}(\pi \otimes \pi^\vee, \mathbb{C}) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_r}(\pi \otimes \pi^\vee, \mathbb{C}).
\end{aligned}$$

$G_r$ の自明表現は $\mathrm{Ind}_{B_r}^{G_r} \delta_{B_r}^{-1/2}$ や $\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}_r}^{G_r} \delta_{\mathcal{P}_r}^{-1/2}$ の唯一つの既約部分表現であり, 例外表現とは $\bar{G}_r$ の自明表現のようなものとも考えられる. Bernstein の定理の捩れ版については, [14, 1, 13] などを参照せよ.

**定理 C.** $n \geq 3$ のとき, $\theta_{N,\psi} = 0$.

注意 2.7. (1) $F$ の剰余標数が 2 でないときに, この結果は Kazhdan と Patterson により証明されている ([10] の定理 I.3.5 を参照). $r = 3$ のときには, $F$ の剰余標数の如何に関わらず [6] の補題 6 で証明されている. つまり, 剰余標数が 2 で, $n \geq 4$ の場合のみ新しい結果である.

(2) この結果は定理 A, B や局所二次対称積 $L$ 因子の局所積分の函数等式の証明に必要である.

定理 A は平方可積分表現の二次対称積 $L$ 因子の極を distinguished 表現により記述しているが, 見方を変えれば平方可積分な distinguished 表現を二次対称積 $L$ 因子により記述している. distinguished 表現を分類することは興味ある問題である. 筆者は [9] で非生成的なユニタリ distinguished 表現の族を構成したので, 証明する.

$\pi$ が $G_r$ の既約許容平方可積分表現, $P$ が $G_{dr}$ の $(r, r, \ldots, r)$ 型の放物型部分群であるとき, 誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^{G_{dr}} \pi^{\boxtimes d} \otimes \delta_P^{1/(2r)}$ は唯一つの既約商を持つ. それを $Sp(\pi, d)$ と表す. $s \in \mathbb{C}$ に対して $j$ 次一般線形群 $G_j$ の指標 $\nu^s$ を $\nu^s(g) = |\det g|^s$ により定義する.

**定理 E** ([9]). *$\pi$ を $G_r$ の既約許容平方可積分表現とする. $Q_m$ を $G_{2m}$ の $(m, m)$ 型の放物型部分群とする. $-\frac{1}{2} < \Re s < \frac{1}{2}$ のとき, 誘導表現*

$$\mathrm{Ind}_Q^{G_{2dr}}(Sp(\pi, d) \otimes \nu^s) \boxtimes (Sp(\pi^\vee, d) \otimes \nu^{-s})$$

*は distinguished.*

## 3 証明の概略

最初に定理 C を証明する必要がある. そのためには武田修一郎氏による例外表現の以下のような構成が有用である. 簡単のために $n$ は偶数とし,

$$\mathscr{M} = \left\{ \begin{bmatrix} g_1 & & \\ & \ddots & \\ & & g_{n/2} \end{bmatrix} \in G \;\middle|\; g_i \in G_2^{\square} \right\}$$

とおく. ここで $G_2^{\square} = \{g \in G_2 \mid \det g \in F^{\times 2}\}$. $\omega_+^{\psi}$ を $G_2^{\square}$ の偶 Weil 表現とする.

$$\tilde{\mathcal{M}} \simeq \tilde{G}_2^{\square} \times \tilde{G}_2^{\square} \times \cdots \times \tilde{G}_2^{\square} / \{(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n/2}) \mid \zeta_i \in \mu_2,\ \zeta_1\zeta_2\cdots\zeta_{n/2} = 1\}$$

なので, 外部テンソル積 $\Upsilon_+^{\psi} = \omega_+^{\psi} \boxtimes \cdots \boxtimes \omega_+^{\psi}$ を $\tilde{\mathcal{M}}$ の genuin 表現と見なすことができる. $P_{\mathrm{e}} = M_{\mathrm{e}} U_{\mathrm{e}}$ を $G$ の $(2, 2, \ldots, 2)$ 型の放物型部分群とすると $\mathcal{M}$ はその Levi 部分群 $M_{\mathrm{e}}$ の部分群である. 誘導表現

$$\mathrm{Ind}_{\tilde{\mathcal{M}} U_{\mathrm{e}}}^{\tilde{G}} \Upsilon_+^{\psi} \otimes \delta_{P_{\mathrm{e}}}^{1/4}$$

は唯一つの既約商を持ち, それは例外表現と同型である.

下記の事実が有用である.

$$\dim(\mathrm{Ind}_{\tilde{\mathcal{M}} U_{\mathrm{e}}}^{\tilde{G}} \Upsilon_+^{\psi} \otimes \delta_{P_{\mathrm{e}}}^{1/4})_{N,\psi} = 1.$$

$\mathrm{Ind}_{\tilde{\mathcal{M}} U_{\mathrm{e}}}^{\tilde{G}} \Upsilon_+^{\psi} \otimes \delta_{P_{\mathrm{e}}}^{1/4}$ の唯一つの既約部分表現だけが Whittaker 模型を持ち, 他の既約部分商は Whittaker 模型を持たない. $n \geq 3$ のとき, この誘導は可約であり, その既約商である例外表現は Whittaker 模型を持たないことになる.

注意 3.1. Kazhdan と Patterson は主系列表現 $(\mathscr{I}^{\psi})^{\vee} = \mathrm{Ind}_{\tilde{\mathscr{T}}N}^{\bar{G}} \xi^{\psi^{-1}} \otimes \delta_B^{1/4}$ の既約商として例外表現を構成し, 不分岐 Whittaker 函数の具体的計算に基づいて剰余標数が奇数の場合に定理 C を証明した. 主系列表現の Whittaker 模型は一意でなく, その次元は

$$\dim(\mathscr{I}^{\psi})^{\vee}_{N,\psi} = [F^{\times} : F^{\times 2}]^{n/2}$$

であるから難解である.

次に二次対称積 $L$ 函数と例外表現を結び付けるために, 生成的既約許容表現の $L$ 因子を Bump-Ginzburg [5] による二次対称積 $L$ 函数の積分表示の局所積分を使って定義する. 簡単のために $\pi$ は自明な中心指標を持つ $G$ の既約許容表現とする. 局所積分 $Z(s)$ は三重線形形式 $\pi \otimes \theta \otimes I(s)$ として与えられ, $q^{-s}$ に関して有理函数である. 不分岐の局所積分は不分岐 $L$ 因子の比

$$\frac{L\left(\frac{s+1}{2}, \mathrm{sym}^2 \circ \phi(\pi)\right)}{\zeta\left(\frac{n(s+1)}{2}\right)}$$

となり, 分岐素点でも適当に定義した局所積分の族が生成する $\mathbb{C}(q^{-s})$ の分数イデアルの正規化した生成元として二次対称積 $L$ 因子を定義することができる. この $L$ 因子が一般的に $L(s, \mathrm{sym}^2 \circ \phi(\pi))$ と一致することを証明することは大変である. 不分岐素点で一致することさえ証明されていない. しかし, 平方可積分表現の場合に一致を証明することはそれ程困難ではない. [11] と全く同様の議論で証明できる.

$\pi$ がユニタリのとき, 局所積分は $\Re s \geq 1$ の範囲で絶対収束し, 特に $Z(1)$ は 0 でない三重線形形式 $\pi \otimes \theta \otimes I(1)$ を与える. 例外表現 $\theta^{\vee}$ は誘導表現 $I(1)$ の既約商なので, $Z(1)$ がいつ $\pi \otimes \theta \otimes \pi^{\vee}$ を経由するか知ることは, $s = 0$ での二次対称積 $L$ 因子の極と密接な関係がある. $\pi$ が平方可積分であるとき局所積分は $\Re s \geq 0$ の範囲で絶対収束し, $L(s, \mathrm{sym}^2 \circ \phi(\pi))$ は $s = 0$ で高々一位の極を持つ.

**補題 3.2.** *$\pi$ を自明な中心指標を持つ $G$ の平方可積分な既約許容表現とするとき, 以下の五条件は同値である.*

- *$\pi$ は distinguished.*
- *$\pi^{\vee}$ は distinguished.*
- *$\mathrm{Hom}_G(\pi \otimes \theta \otimes \theta^{\vee}, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_G(\pi \otimes \theta \otimes I(1), \mathbb{C})$.*
- *$Z(1)$ が $\pi \otimes \theta \otimes \pi^{\vee}$ を経由する.*
- *$L(s, \mathrm{sym}^2 \circ \phi(\pi))$ が $s = 0$ で極を持つ.*

最初の同値は $\pi$ の反傾表現 $\pi^{\vee}$ が $\pi$ と同じ空間に作用 $\pi({}^t g^{-1})$ を与えることで実現できることから証明できる. $G$ の自己同型 $g \mapsto {}^t g^{-1}$ は $\bar{G}$ の自己同型に拡張でき, 例外表現はこの自己同型で捻っても変わらないことに注意しよう.

次の同値は $\pi$ が distinguished であることは, 左辺の次元が 1 以上ということなのだから, 注意 2.5 より明らかである.

その次の同値は $Z(1)$ が一次元ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_G(\pi \otimes \theta \otimes I(1), \mathbb{C})$ の基底であることから明らかである.

最後の同値は局所函数等式から従う. 詳しくは [17] を読んで欲しい.

## 謝辞

本研究は JSPS 科研費 26800017 の助成を受けたものです.

# References

[1] U. K. Anandavardhanan, A. Kable and R. Tandon, Distinguished representations and poles of twisted tensor $L$-functions, Proc. Am. Math. Soc. **132** (2004) 2875–2883.

[2] D. Ban and C. Jantzen, The Langlands quotient theorem for finite central extensions of $p$-adic groups, Glasnik Matematicki, **48**(2) (2013) 313–334.

[3] W. Banks, J. Levy and M. Sepanski, Block-compatible metaplectic cocycles, J. Reine Angew. Math. **507** (1999) 131–163.

[4] J. Bernstein, $P$-invariant distributions on $\mathrm{GL}(N)$ and the classification of unitary representations of $\mathrm{GL}(N)$ (non-archimedean case), in Lie Group Representations II, Springer Lec. Notes in Math. **1041** (1984) 50–102.

[5] D. Bump and D. Ginzburg, Symmetric square $L$-functions on $\mathrm{GL}(r)$, Ann. Math. (2) **136**(1) (1992) 137–205.

[6] Y. Flicker, D. Kazhdan and G. Savin, Explicit realization of a metaplectic representation, J. d'Anal. Math. **55** (1990) 17–39.

[7] G. Henniart, Correspondence de Langlands et fonctions $L$ des carrés extérieur et symétrique, Int. Math. Res. Not. **4** (2010) 633–673.

[8] H. Jacquet and S. Rallis, Uniqueness of linear periods, Compos. Math. **102** (1996) 65–123.

[9] E. Kaplan and S. Yamana, Twisted symmetric square $L$-functions for $\mathrm{GL}(n)$ and invariant trilinear forms, preprint.

[10] D. A. Kazhdan and S. J. Patterson, Metaplectic forms, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **59** (1984) 35–142.

[11] P. K. Kewat and R. Raghunathan, On the local and global exterior square $L$-functions, Math. Res. Lett. **19** no. 04 (2012) 785–804.

[12] N. Matringe, Distinguished representations and exceptional poles of the Asai-$L$-function, Manuscripta Math. **131** (2010) 415–426.

[13] N. Matringe, Unitary representations of $\mathrm{GL}(n, K)$ distinguished by a Galois involution, for $K$ a $p$-adic field, Pacific J. Math. **271** (2014) 445–460.

[14] Y. Ok, Distinction and Gamma factors at 1/2: supercuspidal case, thesis, Columbia University, 1997.

[15] B. Sun, Multiplicity one theorems for Fourier-Jacobi models, Am. J. Math. **134**(6) (2012) 1655–1678.

[16] S. Takeda, The twisted symmetric square $L$-function of $\mathrm{GL}(r)$, Duke Math. **163** (2014) 175–266.

[17] S. Yamana, Local symmetric square $L$-factors of representations of general linear groups, preprint.

Graduate School of Mathematics, Kyoto University, Kitashirakawa, Kyoto, 606-8502, Japan
e-mail:yamana07@math.kyoto-u.ac.jp