数理解析研究所講究録
第1975巻 2015年 86-105

L^p-boundedness of wave operators, Revisited

谷島 賢二*

学習院大学理学部

1 Introduction

$H_0 = -\Delta$ を $D(H_0) = H^2(\mathbb{R}^m)$ を定義域とする自由シュレーディンガー作用素, $H = H_0 + V(x)$ とする. ただし, $V(x)$ はある $\delta > 2$ に対して

$$|V(x)| \le C\langle x\rangle^{-\delta}, \quad \langle x\rangle = (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1}$$

実可測関数である. この時, H は $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^m)$ 上の自己共役作用素で $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ はその core である. H が次を満たすことはよく知られている (例えば [14, 15, 17, 18, 19]):

(i) $\sigma(H)$ は絶対連続部分 $[0, \infty)$ と有限個の非正の多重度有限の固有値からなる.

$\mathcal{H}$ の H に関する絶対連続部分空間を $\mathcal{H}_{ac}(H)$, $\mathcal{H}_{ac}(H)$ への直交射影を $P_{ac}(H)$ と書く.

(ii) 次の強極限で定義される波動作用素 $W_\pm$

$$W_\pm u = \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}e^{-itH_0}u, \quad u \in \mathcal{H} \tag{1.2}$$

が存在して完全, すなわち Image $W_\pm = \mathcal{H}_{ac}(H)$ で $W_\pm$ は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_{ac}(H)$ へのユニタリ作用素である. $W_\pm$ は任意の Borel 関数 f に対して

$$f(H)P_{ac}(H) = W_\pm f(H_0)W_\pm^* \tag{1.3}$$

を満たす。これを波動作用素の intertwining property とよぶ.

従って, $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ に対して, $W_\pm$ が

$$W_\pm \in \mathbf{B}(L^p(\mathbb{R}^m)), \quad p \in [p_1, p_2] \tag{1.4}$$

* Supported by JSPS grant in aid for scientific research No. 22340029

を満たせば, q_1, q_2 を p_1, p_2 の双対指数, $1/p_j + 1/q_j = 1$, とする時

$$W_\pm^* \in \mathbf{B}(L^q(\mathbb{R}^m)), \quad q \in [q_2, q_1] \tag{1.5}$$

だから, $p \in [p_1, p_2]$, $q \in [q_2, q_1]$ の時, に対して f によらない定数 C_{pq} によって

$$\|f(H)P_{ac}(H)\|_{\mathbf{B}(L^q, L^p)} \leq C_{pq}\|f(H_0)\|_{\mathbf{B}(L^q, L^p)} \tag{1.6}$$

が成立する. すなわち $f(H)P_{ac}$ のルベーグ空間の間の作用素の連続性は対応する $f(H_0)$ の性質から導かれることが分かる. $f(H_0)$ は $f(\xi^2)$ のフーリエ変換による合成積作用素だから, 原理的には $f(H)P_{ac}(H)$ の性質より調べやすい。また $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ を H の固有値, $H\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$, $k = 1, \ldots, N$ とすれば

$$f(H) = f(H)P_{ac}(H) + \sum_{k=1}^{N} f(\lambda_k)\varphi_k \otimes \varphi_k.$$

固有関数の性質を調べることによって $f(H)$ の性質も調べることができることになる。

u の Fourier 変換 $\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi)$, 共役フーリエ変換 $\mathcal{F}^*u(\xi)$ を

$$\mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-ix\xi}u(x)dx, \quad \mathcal{F}^*u(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{R}^m} e^{ix\xi}u(x)dx$$

と定義する. $V(x)$ がさらに強い減衰条件, たとえば定理 1.2 のための条件 (1.11) を満たせば, $H = -\Delta + V$ には out-going あるいは in-coming の散乱固有関数系と呼ばれる $\mathcal{H}_{ac}(H)$ の完全な一般固有関数系 $\{\varphi_\pm(x,\xi) \colon \xi \in \mathbb{R}^m\}$ が存在し, 一般化フーリエ変換とその共役変換を

$$\mathcal{F}_\pm u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi_\pm(x,\xi)}u(x)dx, \quad \mathcal{F}_\pm^* u(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\pm(x,\xi)u(x)dx.$$

と定義すれば, $\mathcal{F}_\pm$ は $\mathcal{H}_{ac}(H)$ から $L^2(\mathbb{R}^m)$ へのユニタリ作用素で u の一般固有関数展開公式

$$\mathcal{F}_\pm^*\mathcal{F}_\pm u = u, \quad u \in \mathcal{H}_{ac}(H) \tag{1.7}$$

が成立することが知られている ([15], [18]). さらに, 波動作用素 $W_\pm$ は $\mathcal{F}, \mathcal{F}_\pm*$ を用いて

$$W_\pm u(x) = \mathcal{F}_\pm^*\mathcal{F}u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\pm(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi,$$

と表現される. すなわち, 波動作用素 $W_\pm$ は $-\Delta$ の一般固有関数系 $\{e^{ix\xi} \colon \xi \in \mathbb{R}^m\}$ の散乱固有関数系 $\{\varphi_\pm(x,\xi) \colon \xi \in \mathbb{R}^m\}$ による移植 (transplantations [20]) なのである. 従って, 任意のボレル関数 $F(\xi)$ に関する通常の multiplier$F(D)$ は $\mathcal{F}_\pm$ に関する multiplier に

$$F(D_\pm) \equiv \mathcal{F}_\pm^* M_F \mathcal{F}_\pm u = W_\pm F(D)W_\pm^* u, \quad u \in \mathcal{H}_{ac}(H)$$

によって移植され, 評価式 (1.6) は $f(H)$, $f(H_0)$ を $F(D_\pm)$, $F(D)$ で置き換えて成立することが分かる. この様に波動作用素の intertwining property は固有関数系の移植に精密化される.

そこで, 波動作用素 $W_\pm$ のルベーグ空間における有界性を考えるのがこの講演の目的である. ルベーグ空間における有界性からソボレフ空間あるいはベゾーフ空間での有界性も従うことがすぐに分かるがここでは触れない ([7]). この問題については, すでに多くの文献 ([4, 6, 7, 22, 25, 10, 24, 26]) があり, 有界か否かは H の連続スペクトルの下端 0 における H のスペクトルの性質によることが知られている.

$$\mathcal{E} = \{u \in H^2(\mathbb{R}^m) \colon (-\Delta + V)u = 0\}, \tag{1.8}$$

を H の零固有空間とし, $1/2 < s < \delta - 1/2$ に対して

$$\mathcal{N} = \{u \in \langle x \rangle^s L^2(\mathbb{R}^m) : (1 + (-\Delta)^{-1}V)u = 0\} \tag{1.9}$$

と定義する. $\mathcal{N}$ は $1/2 < s < \delta - 1/2$ よらず $\mathcal{E} \subset \mathcal{N}$ である. H は $\mathcal{N} = \{0\}$ の時 generic type, そうでない時 exceptional type といわれる ([9]).

H が generic type の時, $W_\pm$ は $m \geq 3$ なら任意の $1 \leq p \leq \infty$ に対して, $m = 1, 2$ の時は $1 < p < \infty$ に対して $L^p(\mathbb{R}^m)$ に有界であることが, V の滑らかさや無限遠方における減衰度に関する様々な条件の下で証明されている (上に述べた文献参照. $m = 1$, $m = 3$ の時にはほぼ最良の結果が [22, 6] あるいは [4] にあるが, $m = 1, 3$ 以外の場合は V に関する条件ついては改良の余地が大いにあると考えられる). しかし, H が exceptional type の時は, $m = 1$ の時に $1 < p < \infty$ においては有界, 端点 $p = 1, \infty$ では非有界であることが知られている ([22, 3, 6]) ものの, $m \geq 2$ において知られていることは $W_\pm$ が $m = 3$ の時には $3/2 < p < 3$ に対して, $m \geq 5$ の時は $p \in (m/(m-2), m/2)$ に対して $L^p(\mathbb{R}^m)$ において有界であることだけである ([7, 26], $m = 4$ の時の部分的な結果については [11] を参照). この講演の目的はより詳しく言えば exceptional type の時の結果を改良して次の定理について解説することである。

以下, $V(x)$ に対して次を仮定する. $m_* = (m-1)/(m-2)$, $C > 0$ と $\varepsilon > 0$ は定数である:

仮定 1.1. V は $\mathbb{R}^m$ 上の実可測関数である $\sigma > 1/m_*$ ならびに $\varepsilon > 0$ に対して

$$\mathcal{F}(\langle x \rangle^{2\sigma} V) \in L^{m_*}, \tag{1.10}$$

$$|V(x)| \leq C\langle x \rangle^{-\gamma}, \quad \gamma = \begin{cases} m + 4 + \varepsilon, & \textit{if } \ 3 \leq m \leq 7, \\ m + 3 + \varepsilon & \textit{if } \ m \geq 8. \end{cases} \tag{1.11}$$

を満たす.

(1.10) は V の滑らかさに関する仮定である.

定理 1.2. $m \geq 3$, V は仮定 1.1 を満たすとする. H を *exceptional type* とする. この時, 次が成立する:

(1) 任意の $0 \leq k \leq 2$, ならびに $\begin{cases} 1 < p < 3, & \text{if } m = 3, \\ 1 < p < m/2, & \text{if } m \geq 5 \end{cases}$ を満たす p に対して

$$\|W_{\pm}u\|_{W^{k,p}} \leq C_p\|u\|_{W^{k,p}}, \quad u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^m) \cap L^2(\mathbb{R}^m) \tag{1.12}$$

(2) $m = 3$ の時 $p > 3$ に対して, $m \geq 5$ の時 $p > m/2$ に対して $W_{\pm}$ は $L^p(\mathbb{R}^m)$ において非有界である.

区間の端点にある p ならびに $m = 2, 4$ の時, 問題は未解決である. 定理の (2) は村田實氏の [16], Theorem 1.2 から簡単に従うので, 定理の (1) の証明の粗筋を $k = 0$ のときに述べるが, ページ数の制限のため $m = 3$ の時と $m \geq 7$ が奇数の時に限定する. $m = 5$ の時の証明はこれから類推されよう. 偶数次元の場合は奇数次元との類推だけではすまないところもあって全く触れることができなかったので, これについては是非著者の論文 [28] (arXiv 1508.05738) を参照して頂きたい.

記号は一般的なものを使うが次はあまり標準的ではないかも知れない.

$$f \leq_{|\cdot|} g \text{ means } |f| \leq |g|.$$

H ならびに H_0 のレゾルベントを

$$R(z) = (H - z)^{-1}, \quad R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}.$$

と書く. $z = \lambda^2$ とおいて $\lambda \in \mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ に対して

$$G(\lambda) = R(\lambda^2), \quad G_0(\lambda) = R_0(\lambda^2), \quad \lambda \in \mathbb{C}^+.$$

と定義する. $\lambda > 0$ ならびに $\lambda < 0$ は z の正の実軸への上半面あるいは下半面からの境界値に対応する. 極限吸収原理 ([15, 7, 26] 参照) によって $G_0(\lambda)$ は $s, t > \frac{1}{2}$, $s + t > 2$ の時, $\mathbf{B}(\langle x\rangle^{-s}L^2, \langle x\rangle^{-t}L^2)$ -値関数として $\lambda \in \mathbb{C}^+$ から $\overline{\mathbb{C}}^+ = \{z : \Im z \geq 0\}$ に局所 Hölder 連続関数として延長される.

■波動作用素の表現 W_- のみを取り扱う. W_+ も同様に取り扱うことができる. $W = W_-$ と書く. W は次の様に表現される ([15]):

$$Wu = u - \lim_{\varepsilon\downarrow 0, N\uparrow\infty} \frac{1}{\pi i}\int_{\varepsilon}^{N} G(\lambda)V(G_0(\lambda) - G_0(-\lambda))u\lambda d\lambda \tag{1.13}$$

$$= u - \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty G(\lambda)V(G_0(\lambda) - G_0(-\lambda))u\lambda d\lambda \tag{1.14}$$

$u \in \langle x \rangle^{-\sigma} L^2(\mathbb{R}^m)$ の時, (1.13) は $\langle x \rangle^{\sigma} L^2(\mathbb{R}^m)$-値連続関数のリーマン積分, その結果は $\mathcal{H}$ に属する. さらに極限 $\lim_{\varepsilon\downarrow 0, N\uparrow\infty}$ が $\mathcal{H}$ で存在するのである. (1.14) は (1.13) の symbolic な標記である.

2 問題の Reduction

以下, $V(x)$ に対して仮定 1.1 の条件が満足されるものとする.

■低エネルギー部分への帰着 W を $\lambda = 0$ の近傍で $\Phi(\lambda^2) = 1$, $|\lambda| > \lambda_0$ で $\Phi(\lambda^2) = 0$, $\Phi(\lambda^2) + \Psi(\lambda^2) \equiv 1$ を満たす $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ と $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ を用いて

$$W = W_> + W_< \equiv W\Psi(H_0) + W\Phi(H_0), \tag{2.1}$$

と分解する. 高エネルギーの部分 $W_>$ が任意の m, 任意の $1 \le p \le \infty$ に対して $L^p(\mathbb{R}^m)$ の有界作用素であることは長く知られている ([22, 25, 26, 7]). 低エネルギー部分は

$$W_< = \Phi(H_0)u - \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty G(\lambda)V(G_0(\lambda) - G_0(-\lambda))\lambda\Phi(H_0)d\lambda. \tag{2.2}$$

と表現されるが, $\Phi(H_0)$ は急減少関数による合成積作用素だから, もちろん任意の m, $1 \le p \le \infty$ に対して $L^p(\mathbb{R}^m)$ 有界. 結局

$$Zu = -\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty G_0(\lambda)V(1 + G_0(\lambda)V)^{-1}(G_0(\lambda) - G_0(-\lambda))\lambda F(\lambda)ud\lambda \tag{2.3}$$

の L^p 有界性を調べればよいこと分かる.

■閾値エネルギー解析 極限吸収原理によって $G_0(\lambda)V$ は, $1/2 < s < \delta - 1/2$ の時, $\lambda \in \mathbb{R}$ の $\mathbf{B}_\infty(L^{-s})$-値 Hölder 連続関数. 正の固有値の不存在定理 ([12]) によって $1 + G_0(\lambda)V$ は $\lambda > 0$ の時可逆 (cf. [1]). 従って $G(\lambda) = G_0(\lambda) - G_0(\lambda)VG(\lambda)$ から $\lambda \neq 0$ の時

$$G(\lambda)V = G_0(\lambda)V(1 + G_0(\lambda)V)^{-1} \tag{2.4}$$

も $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ において $\mathbf{B}_\infty(L^{-s})$-値局所 Hölder 連続である. しかし, H が exceptional type の時は, $\mathcal{N} \neq 0$ だから, $(1 + G_0(\lambda)V)^{-1}$ は $\lambda = 0$ で特異性をもつ. この特異性を決定することは, この問題のみならず, 時間依存シュレーディンガー方程式の局所減衰問題においても重要で古くから研究されている ([9, 16] など). $\mathcal{N}$ についての以下の性質が用いられる.

(a) $\varphi \in \mathcal{N}$ はシュレーディンガー方程式に対する固有方程式 $(-\Delta + V)u = 0$ を満たし, 従って有界連続で $|x| \to \infty$ において $\varphi(x) = C|x|^{2-m} + o(|x|^{2-m})$ である. 特に, $m \geq 5$ なら, $\mathcal{N} = \mathcal{E}$ であるが $m = 3, 4$ の時, $\varphi \in \mathcal{N}$ は必ずしも $\varphi \in \mathcal{E}$ とはならない。この時, $\varphi \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{E}$ は（閾値）レゾナンスと呼ばれる. $m \geq 5$ ならでレゾナンスは存在しない. 一般に $V\varphi \in L^1(\mathbb{R}^m) \cap L^\infty(\mathbb{R}^m)$ である.

(b) $m = 3$ の時, $\varphi \in \mathcal{N}$ に対して $\varphi \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \langle V\varphi, 1\rangle = 0$. 従って, $\dim \mathcal{N}/\mathcal{E} \leq 1$ である. この時, $\{0\} = \mathcal{E} \subsetneq \mathcal{N}$ なら H は第 1 種の, $\{0\} \neq \mathcal{E} = \mathcal{N}$ なら第 2 種の, $\{0\} \subsetneq \mathcal{E} \subsetneq \mathcal{N}$ なら第 3 種の exceptional type であると言われる.

定義 2.1. $\lambda = 0$ の近傍で定義された作用素値関数 $E(\lambda)$ は (2.3) において $(1 + G_0(\lambda)V)^{-1} \to E(\lambda)$ と代入したときに得られる作用素 Z が, 任意の $1 \leq p \leq \infty$ に対して $Z \in \mathbf{B}(L^p(\mathbb{R}^m))$ を満たす時, 許容的であると言われる.

以下の形の閾値エネルギーにおける展開公式は [26], [7] にある. 記号の詳しい説明も [26], [7] を参照.

定理 2.2 (奇数次元). (1) $m = 3$ とする. H が第 3 種 *exceptioal type* の時, 適当なレゾナンス φ と許容的な $E(\lambda)$ が存在して, $a = 4\pi i|\langle V, \varphi\rangle|^{-2}$ とおくとき,

$$(I + G_0(\lambda)V)^{-1} = \frac{P_0 V}{\lambda^2} - \frac{P_0 V D_3 V P_0 V}{\lambda} - \frac{a}{\lambda}|\varphi\rangle\langle\varphi|V + E(\lambda). \tag{2.5}$$

が成立する. φ は canonical resonance と呼ばれる. H が第 1 種 *exceptional type* の時には $P_=0$, 第二種の時には $\varphi = 0$ として (2.5) が成立する.

(2) $m \geq 5$ の時, V を関数と考えて $\varphi = P_0 V$ と定義する.

$$(I + G_0(\lambda)V)^{-1} = \frac{P_0 V}{\lambda^2} - \frac{i}{24\pi^2\lambda}|\varphi\rangle\langle\varphi|V + E(\lambda) \tag{2.6}$$

が成立する. (3) $m \geq 7$ の時,

$$(I + G_0(\lambda)V)^{-1} = \frac{P_0 V}{\lambda^2} + E(\lambda). \tag{2.7}$$

m が偶数の時, $(I + G_0(\lambda)V)^{-1}$ も $\lambda \to 0$ において $G_0(\lambda, x)$ と同様な対数的特異性をもつ.

定理 2.3 (偶数次元). (1) $m = 6$ の時, 高々階数 $2\dim\mathcal{E}$ 以下の作用素 D_{jk}:

$$VD_{jk} = \sum_{a,b=1}^{2d} \varphi_a \otimes \psi_b, \quad \varphi_a,\ \psi_b \in \langle x\rangle^{-\delta+3+\varepsilon} H^2(\mathbb{R}^6), \quad \forall\varepsilon > 0. \tag{2.8}$$

と許容的作用素 $E(\lambda)$ が存在して

$$(1+G_0(\lambda)V)^{-1} = \frac{P_0V}{\lambda^2} + \sum_{j=0,1}\sum_{k=1,2} D_{jk}\lambda^j \log^k \lambda + E(\lambda). \tag{2.9}$$

(2) $m \geq 8$ の時, V を関数として $\varphi = P_0V$ と定義する時, 適当な定数 c_m と許容的な $E(\lambda)$ が存在して

$$(1+G_0(\lambda)V)^{-1} = \frac{P_0V}{\lambda^2} + c_m\varphi \otimes (V\varphi)\lambda^{m-6}\log\lambda + E(\lambda). \tag{2.10}$$

$m \geq 12$ の時, (2.10) の $c_m\varphi \otimes (V\varphi)\lambda^{m-6}\log\lambda$ は許容的である.

この様にして定理 1.2 の証明は結局, 定理 2.2, 2.3 における特異部分 $S(\lambda)$ を (2.3) に代入して得られる作用素

$$Z_s = \frac{i}{\pi}\int_0^\infty G_0(\lambda)VS(\lambda)(G_0(\lambda) - G_0(-\lambda))F(\lambda)\lambda d\lambda. \tag{2.11}$$

に対して次を示すことに帰着した.

Proposition 2.4. $m = 3$ の時は $1 < p < 3$, $m \geq 5$ の時は $1 < p < m/2$ とする. この時, 定数 C_p が存在して

$$\|Z_su\|_p \leq C_p\|u\|_p, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \tag{2.12}$$

が成立する.

3 証明のための補題

$\|Z_su\|_p \leq C_p\|u\|_p$ を証明するために以下の補題がしばしば用いられる. これらの補題の殆どは良く知られた定理である. そうでないものに対する証明は [28] にある.

3.1 調和解析から

次は Muckenhaupt の weighted inequality である (例えば [8], Chapter 9 を参照).

補題 3.1. 重み関数 $|r|^a$ が $\mathbb{R}$ 上の A_p weight であるためには $-1 < a < p-1$ であることが必要十分である. $w(r)$ が A_p weight である時, Hilbert 変換 $\tilde{\mathcal{H}}$ ならびに Hardy-Littlewood 極大作用素 $\mathcal{M}$ は $L^p(\mathbb{R}, w(r)dr)$ において有界である.

$G(|x|) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ は, $G(r) > 0$ が $r > 0$ に関して単調減少で, 殆ど至るところ $|F(x)| \leq G(|x|)$ を満たす時, $F(x)$ の radial decreasing integrable majorant (RDIM) と言われる. $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ は RDIM をもつ. 以下は [21] の 57 ページにある.

補題 3.2. *F が RDIM を持てば, 適当な定数 $C > 0$ に対して*

$$|(F * u)(t)| \leq C(\mathcal{M}u)(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

が成立する.

$\mathbb{R}$ 上の作用素 $\mathcal{H}$ をヒルベルト変換 $\tilde{\mathcal{H}}$ を用いて

$$\mathcal{H}u(\rho) = \frac{(1+\tilde{\mathcal{H}})u(\rho)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{ir\rho}\hat{u}(r)dr \tag{3.2}$$

と定義する. フーリエ変換の積を半直線に制限してから逆フーリエ変換をとって次の補題が得られる.

補題 3.3. *$u, F \in L^1(\mathbb{R})$ が $\hat{u}$, $\hat{F} \in L^1(\mathbb{R})$ を満たす時, 次が成立する.*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{i\lambda\rho}F(\lambda)\hat{u}(\lambda)d\lambda = (\mathcal{F}^*F * \mathcal{H}u)(\rho). \tag{3.3}$$

3.2 レゾルベントの積分核

自由シュレーディンガー作用素のレゾルベント $G_0(\lambda)$ の積分核の具体的な形を用いる. $\Im\lambda \geq 0$ に対して $G_0(\lambda)$ は合成積でその核は $m \geq 2$ の時, Whittaker の公式

$$G_0(\lambda, x) = \frac{e^{i\lambda|x|}}{2(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)|x|^{m-2}}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{m-3}{2}}\left(\frac{t}{2} - i\lambda|x|\right)^{\frac{m-3}{2}} dt. \tag{3.4}$$

で与えられる ([27]). $m \geq 3$ が奇数の時, $G_0(\lambda, x)$ は指数多項式型で

$$G_0(\lambda, x) = \sum_{j=0}^{(m-3)/2} C_j \frac{(\lambda|x|)^j e^{i\lambda|x|}}{|x|^{m-2}} \qquad C_j = \frac{(-i)^j(m-3-j)!}{2^{m-1-j}\pi^{\frac{m-1}{2}}j!(\frac{m-3}{2}-j)!}. \tag{3.5}$$

係数 C_0, C_1 が次を満たすことを用いる:

$$iC_0 + C_1 = 0, \quad m \geq 5. \tag{3.6}$$

m が偶数の時, $G_0(\lambda, x)$ の高階導関数は対数特異性を持ち, 偶数次元における解析は奇数次元における時よりも困難になることが多い. この困難の一部分は $G_0(\lambda, x)$ を指数多項式の重ね合わせとして書く次の公式を用いることによって避けることができる。

$$\nu = \frac{m-2}{2}$$

と定義する. $a > 0$ に関する重ね合わせの作用素 $T_j^{(a)}$, $j = 0, \ldots, \nu$ を

$$T_j^{(a)}[f(x,a)] = C_{m,j} \int_{\mathbb{R}_+} (1+a)^{-(2\nu-j+\frac{1}{2})} f(x,a) \frac{da}{\sqrt{a}}, \tag{3.7}$$

$$C_{m,j} = (-2i)^j \frac{\Gamma\left(2\nu - j + \frac{1}{2}\right)}{2^{m-1}\pi^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \binom{\nu}{j}. \tag{3.8}$$

と定義する. $m \geq 4$ の時, $2\nu - j \geq 1$ で f が a に関して有界なら (3.7) は絶対収束する.

補題 3.4. $m \geq 4$ を偶数とする. この時,

$$G_0(\lambda, x) = \sum_{j=0}^{\nu} T_j^{(a)} \left[e^{i\lambda|x|(1+2a)} \frac{(\lambda|x|)^j}{|x|^{m-2}} \right]. \tag{3.9}$$

注意 3.5. $G_0(\lambda, x)$ を (3.9) のように指数多項式のい重ね合わせで書くことによって, 奇数次元空間で用いられた手法を偶数次元空間で繰り返して用いることができることがある. 一方, (3.4) の右辺の $[\cdots]$ は $|x| \to \infty$ で $|x|^{-\frac{m-2}{2}}$ の様にしか減衰しない. 残りの減衰 $|x|^{-\frac{1}{2}}$ は指数関数の合成

$$T_j^{(a)}\left[e^{2ia\lambda|x|)}\right] = \frac{C}{(\lambda|x|)^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \left(1 + i\frac{a}{\lambda|x|}\right)^{-\frac{m-1}{2}} e^{-2a} \frac{da}{\sqrt{a}},$$

の中に「隠れている」のである. この減衰を用いなければならない場面では上の表現 (3.9) だけでは話がすまないが, それでもこの表現を用いることによって「問題の部分をあぶり出す」ことができる.

3.3 Spectral measure of $-\Delta$

$E_0(d\mu)$ を $-\Delta$ のスペクトル射影作用素とする. Stone の公式を用いれば $E_0(d\mu)$ はレゾルベントを用いて

$$E_0(d\mu) = \frac{1}{2\pi i}(R_0(\mu + i0) - R_0(\mu - i0))d\mu = \frac{1}{i\pi}(G_0(\lambda) - G_0(-\lambda))\lambda d\lambda.$$

と書き表される．ただし，$\mu = l^2$ である．フーリエ変換を用いれば

$$\frac{1}{i\pi}\langle v, (G_0(\lambda) - G_0(-\lambda))u\rangle\lambda = \frac{\lambda^{m-1}}{(2\pi)^m}\left(\int_\Sigma \overline{\hat{v}(\lambda\omega)}\hat{u}(\lambda\omega)d\omega\right)d\lambda \tag{3.10}$$

である．この表現 (3.10) から次の補題が得られる．

補題 3.6. $m \geq 3$ とする．$u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ に対して

$$\lambda^{-1}\langle v, (G_0(\lambda) - G_0(-\lambda))u\rangle = \langle |D|^{-1}v, (G_0(\lambda) - G_0(-\lambda))u\rangle, \quad \lambda > 0 \tag{3.11}$$

が成立し，両辺は $\lambda = 0$ まで連続的に延長される．$f \in C_0(\mathbb{R})$ の時，$\lambda \geq 0$ に対して

$$\langle v, G_0(\lambda)u - G_0(-\lambda))f(\lambda)u\rangle = \langle v, (G_0(\lambda)u - G_0(-\lambda))f(|D|)u\rangle \tag{3.12}$$

が成立する．但し，$f(|D|)u(x) = \mathcal{F}^*(f(|\xi|)\hat{u}(\xi))(x)$ である．

定義 3.7. $\mathbb{R}^m$ 上の関数 f に対して球面平均関数 $M(r, f)$ を

$$M(r, f) = \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma f(r\omega)d\omega, \quad \forall r \in \mathbb{R} \tag{3.13}$$

と定義する．$\Sigma = \mathbb{S}^{m-1}$ は単位球面，$|\Sigma|$ はその表面積である．$M(r, f)$ は r の偶関数：$M(r, f) = M(-r, f)$ である．

Hölder の不等式によって

$$|M(r, f)| \leq \left(\frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma |f(r\omega)|^p d\omega\right)^{1/p} \tag{3.14}$$

従って，

$$\left(\int_0^\infty |M(r)|^p r^{m-1} dr\right)^{1/p} \leq \frac{\|f\|_p}{|\Sigma|^{1/p}} \leq \|f\|_p. \tag{3.15}$$

一般に偶関数 $M(r)$, $r \in \mathbb{R}$ に対して

$$\tilde{M}(\rho) = \int_\rho^\infty rM(r)dr\left(= -\int_{-\infty}^\rho rM(r)dr\right). \tag{3.16}$$

と定義する．$\langle r\rangle^2 M(r)$ が可積分の時，次が成立する:

$$\int_\mathbb{R} e^{-ir\lambda}rM(r)dr = \frac{\lambda}{i}\int_\mathbb{R} e^{-ir\lambda}\tilde{M}(r)dr, \ \int_\mathbb{R}\tilde{M}(r)dr = \int_\mathbb{R} r^2M(r)dr. \tag{3.17}$$

■奇数次元空間の場合　空間次元 $m \geq 3$ が奇数の時, $-\Delta$ の spectre measure を球面平均関数のフーリエ変換として書き表すことができる. $\check{u}(x) = u(-x)$, $x \in \mathbb{R}^m$ と書く.

補題 3.8. $m \geq 3$ を奇数とする. $\psi \in L^1(\mathbb{R}^m)$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ に対して,

$$\langle \psi \,|\, (G_0(\lambda) - G_0(-\lambda))u \rangle = \sum_{j=0}^{(m-3)/2} c_j (-1)^{j+1} \lambda^j \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda r} r^{1+j} M(r, \overline{\psi} * \check{u}) dr. \tag{3.18}$$

但し, C_j は (3.5) の定数, $c_j = |\Sigma| C_j$ である.

注意 3.9. (3.10) と (3.18) からやや思いがけない等式

$$\frac{\pi i \lambda^{m-2}}{(2\pi)^m} \int_{\Sigma} \overline{\hat{\psi}(\lambda\omega)} \hat{u}(\lambda\omega) d\omega = \sum_{j=0}^{(m-3)/2} c_j (-1)^{j+1} \lambda^j \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda r} r^{1+j} M(r, \overline{\psi} * \check{u}) dr$$

が得られる. これは特に $m = 3$ の時には簡明な式

$$\int_{\Sigma} \overline{\hat{\psi}(\lambda\omega)} \hat{u}(\lambda\omega) d\omega = \frac{8\pi^2 i}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda r} r M(r, \overline{\psi} * \check{u}) dr \tag{3.19}$$

になる. なんかの時に他の役に立つかも知れない.

■偶数次元空間の時　偶数次元空間の時には, 重ね合わせをして次の表現公式が得られる. $\mathbb{R}$ 上の関数 $A(r)$, $a > 0$ に対して

$$A^a(r) = A(r/(1+2a))$$

と定義し $M_{\overline{\psi} * \check{u}}(r) = M(r, \overline{\psi} * \check{u})$ と書く.

補題 3.10. $m \geq 2$. $\psi \in L^1(\mathbb{R}^m)$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ とする.

$$\langle \psi, (G_0(\lambda) - G_0(-\lambda))u \rangle = \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^{j+1} |\Sigma| T_j^{(a)} \left[\frac{\lambda^j \mathcal{F}(r^{j+1} M^a_{\overline{\psi} * \check{u}})(\lambda)}{(1+2a)^{j+2}} \right] \tag{3.20}$$

$$= \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^{j+1} |\Sigma| T_j^{(a)} \left[\lambda^j \mathcal{F}(r^{j+1} M_{\overline{\psi} * \check{u}})((1+2a)\lambda) \right]. \tag{3.21}$$

(3.20) の右辺の $j = 0$ 項は次の様にして λ を表に出した形にも書ける：

$$i |\Sigma| T_0^{(a)} \left[\frac{\lambda (\widetilde{\mathcal{F} M^a_{\overline{\psi} * \check{u}}})(\lambda)}{(1+2a)^2} \right]. \tag{3.22}$$

3.4 定理 1.2 の $m=3$ の場合の証明.

(2.5) を (2.11) の $S(\lambda)$ に代入する. ϕ_0 を canonical resonance, $\{\phi_1,\dots,\phi_d\}$ を零固有空間 $\mathcal{E}$ の正規直交基底とする. λ^{-1}, λ^{-2} の特異性から作られる部分に分けて $Z_s = Z_{s0} + Z_{s1}$ と書く.

$$Z_{s0}u = \sum_{l,n=0}^{d} a_{ln} \int_0^\infty G_0(\lambda)|V\phi_l\rangle\langle V\phi_n\,|\,(G_0(\lambda)-G_0(-\lambda))u\rangle F(\lambda)d\lambda \tag{3.23}$$

但し, a_{ln}, $0\le l,n\le d$ は $1\le l\le d$ の時 $a_{0l}=a_{l0}=0$ を満たす定数,

$$Z_{s1}u = \sum_{j=1}^{d} \frac{i}{\pi}\int_0^\infty G_0(\lambda)|V\phi_l\rangle\langle V\phi_l|(G_0(\lambda)-G_0(-\lambda))F(\lambda)\lambda^{-1}ud\lambda. \tag{3.24}$$

である. Proposition 2.4 は次の二つの補題から従う.

補題 3.11. $1<p<3$ とする. 任意の $\phi,\psi\in\mathcal{N}$ に対して

$$Z_{s0}(\phi,\psi)u = \frac{i}{\pi}\int_0^\infty G_0(\lambda)V\phi\rangle\langle V\psi|(G_0(\lambda)-G_0(-\lambda))|u\rangle F(\lambda)d\lambda \tag{3.25}$$

と定義する. $Z_{s0}(\phi,\psi)$ は $L^p(\mathbb{R}^3)$ で有界である.

Proof. $Z_{s0}u = Z_{s0}(\phi,\psi)u$ と書く. (3.5) を $G_0(\lambda)$ に, (3.18) を $\langle V\psi,(G_0(\lambda)-G_0(-\lambda))u\rangle$ に用いれば, $M(r,V\psi*u)$ を $M(r)$ と書くとき

$$Z_{s0}u = -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{i\lambda|x-y|}(V\phi)(y)dy}{|x-y|}\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ir\lambda}rM(r)dr\right)F(\lambda)d\lambda. \tag{3.26}$$

λ で先に積分し

$$K_0(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{i\lambda\rho}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda r}rM(r)dr\right)F(\lambda)d\lambda \tag{3.27}$$

と定義して (3.26) を

$$Z_{s0}u = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(V\phi)(y)}{|x-y|}K_0(|x-y|)dy$$

書く. Young の不等式を用い, 極座標で書くと

$$\|Z_{s0}u\|_p \le C\|V\phi\|_1\left(\int_0^\infty |K_0(\rho)|^p\rho^{2-p}d\rho\right)^{1/p}. \tag{3.28}$$

補間定理によって, $1 < p < 3/2$, $3/2 < p < 3$ の時に証明すればよい.

(1) $3/2 < p < 3$ の時: 補題 3.3, 3.2 によって

$$K_0(\rho) = \{(\mathcal{F}^* F) * \mathcal{H}(rM(r))\}(\rho) \leq_{|\cdot|} C\mathcal{M}(rM)(\rho) \tag{3.29}$$

ρ^{2-p} は A_p weight だから補題 3.1 を (3.29) に用いれば

$$\left(\int_0^\infty |K_0(\rho)|^p \rho^{2-p} d\rho\right)^{1/p} \leq C\left(\int_0^\infty M(r)^p r^2 dr\right)^{1/p} \leq C\|V\psi * u\|_p. \tag{3.30}$$

(3.28) と合わせれば $3/2 < p < 3$ の時,

$$\|Z_{s0}u\|_p \leq C\|V\phi\|_1 \|V\psi * u\|_p. \tag{3.31}$$

さらに (3.31) の右辺を $C\|V\psi\|_1\|u\|_p$ と評価すれば補題が $3/2 < p < 3$ に対して得られる.

(2) $1 < p < 3/2$ の時. 部分積分してから補題 3.3, 3.2 を用いれば

$$\begin{aligned} K_0(\rho) &= \frac{i}{2\pi\rho}\int_0^\infty e^{i\lambda\rho}\left(F(\lambda)\int_{\mathbb{R}} e^{-ir\lambda} rM(r)dr\right)' d\lambda \\ &\leq_{|\cdot|} C\rho^{-1}(\mathcal{M}(r^2M)(\rho) + \mathcal{M}(rM)(\rho)). \end{aligned} \tag{3.32}$$

(3.32) を (3.28) の右辺に用い, $1 < p < 3/2$ の時 ρ^{2-2p} は A_p weight であることに注意して補題 3.1 を適用すれば

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty |K_0(\rho)|^p \rho^{2-p} d\rho\right)^{1/p} &\leq C\left(\int_0^\infty |\mathcal{M}(r^2M)(\rho) + \mathcal{M}(rM)(\rho)|^p \rho^{2-2p} d\rho\right)^{1/p} \\ &\leq C\left(\int_0^\infty |M(r)|^p r^2 dr\right)^{1/p} + C\left(\int_0^\infty |M(r)|^p r^{2-p} dr\right)^{1/p} \\ &\leq 2C\left(\int_0^\infty |M(r)|^p r^2 dr\right)^{1/p} + C\left(\int_0^1 |M(r)|^p r^{2-p} dr\right)^{1/p} \end{aligned} \tag{3.33}$$

右辺の第一項は (3.30) の第二項の様に評価し, 第二項には

$$\sup|M(r)| \leq \|V\psi * u\|_\infty. \tag{3.34}$$

を用いると

$$\left(\int_0^\infty |K_0(\rho)|^p \rho^{2-p} d\rho\right)^{1/p} \leq C(\|V\psi * u\|_p + \|V\psi * u\|_\infty). \tag{3.35}$$

(3.35) の右辺をさらに $C(\|V\psi\|_1 + \|V\psi\|_{p'})\|u\|_p$ と評価して, (3.28) と「合わせれば $1 < p < 3/2$ の時にも補題が成立することが分かる. □

補題 3.12. $m=3,\ 1<p<3$ とする．任意の $\phi,\psi\in\mathcal{E}$ に対して

$$Z_{s1}(\phi,\psi)u=\frac{i}{\pi}\int_0^\infty G_0(\lambda)V\phi\rangle\langle V\psi|(G_0(\lambda)-G_0(-\lambda))F(\lambda)u\frac{d\lambda}{\lambda} \tag{3.36}$$

と定義する．定数 C_p が存在して $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ に対して，$\|Z_{s1}(\phi,\psi)u\|_p\le C_p\|u\|_p$.

Proof. $Z_{s1}(\phi,\psi)u=Z_{s1}u$ と書く．$\eta(x)=|D|^{-1}(V\psi)$ と定義する．(3.11) によって

$$Z_{s1}u=\int_0^\infty G_0(\lambda)|V\phi\rangle\langle\eta\,|\,(G_0(\lambda)-G_0(-\lambda))u\rangle F(\lambda)d\lambda.$$

これは $V\psi$ を η で置き換えれば $Z_{s0}u$ と同じである．ゆえに $3/2<p<3$ の時, (3.30) によって

$$\|Z_{s1}u\|_p\le C\|\eta*u\|_p, \tag{3.37}$$

$1<p<3/2$ の時は (3.35) によって

$$\|Z_{s1}u\|_p\le C(\|\eta*u\|_p+\|\eta*u\|_\infty) \tag{3.38}$$

が得られる．作用素 $|D|^{-1}$ は $C|x|^{-2}$ との合成積で, ψ は $|V(x)\psi(x)|\le C\langle x\rangle^{-\delta-2}$ と $\int V\psi dx=0$ を満たす．従って $\eta(x)$ は有界で, $|x|\to\infty$ において

$$\begin{aligned}\eta(x)&=C\int\left(\frac{1}{|x-y|^2}-\frac{1}{|x|^2}\right)(V\psi)(y)dy\\&=C\int\frac{2x\cdot y-|y|^2}{|x|^2|x-y|^2}(V\psi)(y)dy=\sum_{k=1}^3\frac{C_{jk}x_k}{|x|^4}+O(|x|^{-4})\end{aligned}$$

を満たす．ゆえに, 任意の $1<q\le\infty$ に対して $\eta\in L^q(\mathbb{R}^3)$, $\eta(x)$ との合成積は Calderòn-Zygmund 理論 ([21], pp. 30-36). によって任意の $1<p<\infty$ において $L^p(\mathbb{R}^3)$ 有界である．ゆえに (3.37), (3.38) の右辺はそれぞれ $3/2<p<3,\ 1<p<3/2$ を満たす p に対して $C\|u\|_p$ で評価される． □

4 $m\ge 7$ が奇数の時の定理 1.2 の証明

$m=7$ の時には, $S(\lambda)$ に λ^{-1} を含む項はない．ゆえに Z_su は (3.24) の $Z_{s1}u$ に等しい．ゆえに, 次を示せばよい．

Proposition 4.1. $m\ge 7$ を奇数, $1<p<m/2$ とする．任意の $\phi,\psi\in\mathcal{E}$ に対して

$$Z_su=\frac{i}{\pi}\int_0^\infty G_0(\lambda)|V\phi\rangle\langle V\psi|(G_0(\lambda)-G_0(-\lambda))F(\lambda)\lambda^{-1}ud\lambda \tag{4.1}$$

と定義する. $\|Z_s u\|_p \le C_p \|u\|_p$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ が成立する.

Proof. 証明は $G_0(\lambda, x)$ が複雑になる分だけ複雑にはなるが, 原理的には 3 次元の場合と同様である. (3.5) と (3.18) を用いると

$$Z_s u = \frac{i}{\pi} \sum_{j,k=0}^{\frac{m-3}{2}} (-1)^{j+1} C_k c_j Z_{s\ell}^{(j,k)} u, \tag{4.2}$$

$$Z_{s\ell}^{(j,k)} u(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{V\phi(y)}{|x-y|^{m-2-k}} K_\ell^{(j,k)}(|x-y|) dy, \tag{4.3}$$

$$K_\ell^{(j,k)}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{i\lambda\rho} \lambda^{j+k-\ell} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda r} r^{j+1} M(r) dr \right) F(\lambda) d\lambda. \tag{4.4}$$

証明をいくつかの補題に分割する. 補間定理によって $1 < p < \frac{m}{m-1}$ ならびに $\frac{m}{3} < p < \frac{m}{2}$ に対して示せばよい. □

補題 4.2. $m \ge 7$ を奇数, $1 < p < \frac{m}{m-1}$ とする. $0 \le j, k \le \frac{m-3}{2}$ に対して

$$\|\tilde{Z}_{s1}^{(jk)} u\|_p \le C\|u\|_p \tag{4.5}$$

が成立する.

Proof. $2 \le j \le \frac{m-3}{2}$ の時と $j = 0, 1$ の場合を分けて考える.
(1) $2 \le j \le \frac{m-3}{2}$ の場合: Young の不等式によって

$$\|Z_{s\ell}^{(j,k)} u\|_p \le C\|V\phi\|_1 \left(\int_0^\infty \frac{|K_\ell^{(j,k)}(\rho)|^p}{\rho^{(m-2-k)p}} \rho^{m-1} d\rho \right)^{1/p} \tag{4.6}$$

である. $\lambda^{j+k-1} F(\lambda) \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda r} r^{j+1} M(r) dr$ の k 階までの導関数は $\lambda = 0$ において消えるから, $k+1$ 回部分積分を繰り返しその結果に補題 3.3, 3.2 を用いると

$$K_1^{(j,k)}(\rho) \le_{|\cdot|} \sum_{l=0}^{k+1} \frac{C_{jkl}}{\rho^{k+1}} \mathcal{MH}(r^{j+1+l} M)(\rho). \tag{4.7}$$

$1 < p < \frac{m}{m-1}$ の時 $r^{-(m-1)(p-1)}$ は A_p weight だから (4.7) と補題 3.1 によって

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty \frac{|K_1^{(j,k)}(\rho)|^p}{\rho^{(m-2-k)p}} \rho^{m-1} d\rho \right)^{1/p} &\le C \sum_{l=0}^{k+1} \left(\int_0^\infty \frac{|M(r)|^p}{r^{(m-2-j-l)p}} r^{m-1} dr \right)^{1/p} \\ &\le C \left(\int_0^\infty |M(r)|^p r^{m-1} dr \right)^{1/p} + C \left(\int_0^1 \frac{|M(r)|^p}{r^{(m-4)p}} r^{m-1} dr \right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

第一項にヘルダーの不等式, 第二項には (3.34) を用いれば, $0 \le p(m-4) < m$ だから

$$(4.8)\text{ の右辺} \le C(\|(V\psi)*u\|_p + \|(V\psi)*u\|_\infty) \le C(\|V\psi\|_1 + \|V\psi\|_{p'})\|u\|_p.$$

(2) $j=0, j=1$ については単独ではなく $c_0 Z_{s1}^{(0,k)} - c_1 Z_{s1}^{(1,k)}$ をまとめて

$$\|(c_0 Z_{s1}^{(0,k)} - c_1 Z_{s1}^{(1,k)})u\|_p \le C\|u\|_p, \quad 0 \le k \le \tfrac{m-3}{2}. \tag{4.9}$$

を示す. $c_j = C_j|\Sigma|$ で $C_0 - iC_1 = 0$ だったことを思い出しておく. (3.17) を用いて

$$K_1^{(0,k)}(\rho) = \frac{-i}{2\pi}\int_0^\infty e^{i\lambda\rho}\lambda^k F(\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda r}\tilde{M}(r)dr\right)d\lambda. \tag{4.10}$$

と書き直しておく. $\lambda^k F(\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda r}\tilde{M}(r)dr\right)$ の $k-1$ 階までの導関数は $\lambda = 0$ で消え,

$$\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\left(\lambda^k F(\lambda)\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda r}\tilde{M}(r)dr\right)\Bigg|_{\lambda=0} = k!\int_{\mathbb{R}} r^2 M(r)dr,$$

だから $(\partial/\partial\lambda)^{k+1}e^{i\lambda\rho} = (i\rho)^{k+1}e^{i\lambda\rho}$ を用いて部分積分すると

$$\begin{aligned} K_1^{(0,k)}(\rho) &= \frac{i^k}{2\pi\rho^{k+1}}\Bigg(k!\int_{\mathbb{R}} r^2 M(r)dr \\ &+\sum_{l=0}^{k+1}\binom{k+1}{l}\int_0^\infty e^{i\lambda\rho}(\lambda^k F)^{(k+1-l)}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda r}(-ir)^l \tilde{M}drd\lambda\Bigg). \end{aligned} \tag{4.11}$$

同様の部分積分を $K_{1k,1}(\rho)$ に対して施せば

$$\begin{aligned} K_1^{(1,k)}(\rho) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{i\lambda\rho}\lambda^k F(\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda r}r^2 M(r)dr\right)d\lambda \\ &= \frac{i^k}{2\pi i\rho^{k+1}}\Bigg(-k!\int_{\mathbb{R}} r^2 M(r)dr \\ &-\sum_{l=0}^{k+1}\binom{k+1}{l}\int_0^\infty e^{i\lambda\rho}(\lambda^k F)^{(k+1-l)}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda r}(-ir)^l r^2 Mdrd\lambda\Bigg). \end{aligned} \tag{4.12}$$

$c_0 - ic_1 = 0$ によって境界項は打ち消し合って

$$c_0 K_1^{(0,k)}(\rho) - c_1 K_1^{(1,k)}(\rho) = \frac{c_0 i^{k-l}}{\rho^{k+1}}\sum_{l=0}^{k+1}\binom{k+1}{l} \tag{4.13}$$

$$\left(\{\mathcal{F}^*((\lambda^k F)^{(k+1-l)}) * (\mathcal{H}(r^l\tilde{M})\}(\rho) + \{\mathcal{F}^*((\lambda^k F)^{(k+1-l)}) * \mathcal{H}(r^{l+2}M)\}(\rho)\right)$$

$$\le_{|\cdot|} \frac{C}{\rho^{k+1}}\sum_{l=0}^{k+1}(\mathcal{MH}(r^l\tilde{M})(\rho) + \mathcal{MH}(r^{l+2}M)(\rho)). \tag{4.14}$$

従って Young の不等式, weighted inequality, 最後に (3.16) を思い出して Hardy の不等式を用いると

$$
\begin{aligned}
&\|(c_0 Z_{s1}^{(0,k)} - c_1 Z_{s1}^{(1,k)})u\|_p \\
&\le C\sum_{l=0}^{k+1}\|V\phi\|_1\left(\int_0^\infty \frac{|\mathcal{M}\mathcal{H}(r^l\tilde{M}(\rho)|^p + |\mathcal{M}\mathcal{H}(r^{l+2}M(\rho)|^p}{\rho^{(m-1)p}}\rho^{m-1}d\rho\right)^{1/p} \\
&\le C\sum_{l=0}^{k+1}\|V\phi\|_1\left(\int_0^\infty (|\tilde{M}(r)|^p r^{pl} + |M(r)|^p r^{p(l+2)})r^{m-1-p(m-1)}dr\right)^{1/p} \\
&\le C\sum_{l=0}^{k+1}\|V\phi\|_1\left(\int_0^\infty |M(r)|^p r^{p(l-m+3)+m-1}dr\right)^{1/p},
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

ここで $0 \le l \le k+1$ の時, $-m+3 \le l-m+3 \le 0$ だから (1) の最後と同様にして

$$
\begin{aligned}
(4.15) &\le C\|V\phi\|_1\left(\int_0^1 |M(r)|^p r^{m-1-p(m-3)}dr + \int_0^\infty |M(r)|^p r^{m-1}dr\right)^{1/p} \\
&\le C\|V\phi\|_1(\|V\psi * u\|_\infty + \|V\psi * u\|_p) \le C\|V\phi\|_1(\|V\psi\|_{p'} + \|V\psi\|_p)\|u\|_p.
\end{aligned}
$$

補題 4.2 の証明が完成した . □

次を示せば Proposition 4.1 の証明が完成する.

補題 4.3. $m \ge 7$ を奇数, $m/3 < p < m/2$ とする. ある定数 C_p が存在して

$$\|Z_s u\|_p \le C_p\|u\|_p, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$$

Proof. $0 \le j, k \le \frac{m-3}{2}$ に対して次を示せばよい.

$$\|Z_{s1}^{(j,k)}u\|_p \le C\|u\|_p \tag{4.16}$$

ふたたび $M(r) = M(r, V\psi * u)$ とする.

$$Z_{s1}^{(j,k)}u(x) = \left(\int_{|y|<1} + \int_{|y|\ge 1}\right)\frac{V\phi(x-y)}{|y|^{m-2-k}}K_{jk,1}(|y|)dy = I_1(x) + I_2(x) \tag{4.17}$$

と分解する. $j \ge 1$ の時,

$$K_1^{(j,k)}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{i\lambda\rho}\lambda^{j+k-1}F(\lambda)\left(\frac{i\partial}{\partial\lambda}\right)^{j-1}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda r}r^2 M(r)dr\right)d\lambda \tag{4.18}$$

に補題 4.2 の証明と違う向きに部分積分を施して

$$\begin{aligned} K_1^{(j,k)}(r) &= \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j-1}{l} \rho^l \{\mathcal{F}^*((\lambda^{j+k-1}F(\lambda))^{(j-1-l)}) * \mathcal{H}(r^2M)\}(\rho) \\ &\leq_{|\cdot|} \sum_{l=0}^{j-1} C_{jl}\rho^l \mathcal{M}\mathcal{H}(r^2M)(\rho) \quad j \geq 1. \end{aligned} \tag{4.19}$$

$j=0$ の時は $\tilde{M}(r)$ を用いて

$$K_1^{(0,k)}(\rho) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^\infty e^{i\lambda\rho}\lambda^k F(\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda r}\tilde{M}(r)dr\right)d\lambda \leq_{|\cdot|} \mathcal{M}\mathcal{H}(\tilde{M})(\rho) \tag{4.20}$$

と評価しておく.

$j \geq 1$ とする. $\rho \geq 1$ の時, (4.19) は $C\rho^{j-1}\mathcal{M}\mathcal{H}(r^2M)(\rho)$ で評価され $m-k-j-1 \geq 2$. ゆえに, Young の不等式と weighted inequality によって

$$\|I_2\|_p \leq \|V\phi\|_1 \left(\int_1^\infty \frac{|K_1^{(j,k)}|^p}{\rho^{p(m-2-k)}}\rho^{m-1}d\rho\right)^{1/p} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} &\leq C\|V\phi\|_1 \left(\int_1^\infty \frac{|\mathcal{M}\mathcal{H}(r^2M)(\rho)|^p}{\rho^{2p}}\rho^{m-1}d\rho\right)^{1/p} \\ &\leq C\|V\phi\|_1 \left(\int_{\mathbb{R}} |M(r)|^p r^{m-1}dr\right)^{1/p} \leq C\|V\phi\|_1^p\|u\|_p^p, \end{aligned} \tag{4.22}$$

$m/3 < p < m/2$ のとき $|r|^{m-1-2p}$ は A_p weight だからである. $j=0$ の時は, $0 \leq k \leq \frac{m-3}{2}$ の時 $m-2-k \geq 2$ であることに注意して, (4.21) の右辺をまず (4.20) によって評価し, 補題 3.1 を適用し, ついで Hardy の不等式を用いれば

$$\begin{aligned} \|I_2\|_p &\leq \|V\phi\|_1 \left(\int_1^\infty \frac{|\mathcal{M}\mathcal{H}(\tilde{M})(\rho)|^p}{\rho^{2p}}\rho^{m-1}d\rho\right)^{1/p} \\ &\leq C\|V\phi\|_1\left(\int_{\mathbb{R}}|\tilde{M}|^p r^{m-1-2p}dr\right)^{1/p} \leq C\|V\phi\|_1\left(\int_{\mathbb{R}}|M(r)|^p r^{m-1}dr\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

右辺は $\leq C\|V\phi\|_1\|V\psi\|_1\|u\|_p$. これと (4.22) から $\|I_2\|_p \leq C\|u\|_p$ である.

次に $\|I_1\|_p$ を評価する. Hölder の不等式によって

$$|I_1(x)| \leq \left(\int_{|y|<1}\left|\frac{V\phi(x-y)}{|y|^{m-4-k}}\right|^{p'}dy\right)^{1/p'}\left(\int_{|y|<1}\left|\frac{K_{jk}(|y|)}{|y|^2}\right|^p dy\right)^{1/p}. \tag{4.23}$$

$0 < \rho \leq 1$ の時, (4.19) と (4.20) から

$$|K_1^{(j,k)}(\rho)| \leq C_{jk}(\mathcal{MH}(r^2 M)(\rho) + \mathcal{MH}(\tilde{M})(\rho))$$

(ただし $j = 0$ の時, 第二項は不要). ふたたび weighted inequality と Hardy の不等式によって

$$\left(\int_{|y|<1}\left|\frac{K_1^{(j,k)}(|y|)}{|y|^2}\right|^p dy\right)^{1/p} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}}(|M(r)r^2|^p + |\tilde{M}(r)|^p)r^{m-1-2p}d\rho\right)^{1/p}$$
$$\leq C\left(\int_{\mathbb{R}}|M(r)|^p r^{m-1}d\rho\right)^{1/p} \leq C\|V\psi\|_1\|u\|^p. \tag{4.24}$$

$\frac{m}{m-2} < p' < \frac{m}{m-3}$ だから $|x|^{-(m-4)p'}$ は $|x| \leq 1$ 上可積分で $p' \leq p$. ゆえに Minkowski の不等式によって

$$\left\|\left(\int_{|y|<1}\left|\frac{V\phi(x-y)}{|y|^{m-4}}\right|^{p'} dy\right)^{1/p'}\right\|_p \leq C\|V\phi\|_p\left(\int_{|y|<1}\frac{dy}{|y|^{p'(m-4)}}\right)^{1/p'}.$$

ゆえに $\|I_1\|_p \leq C\|u\|_p$ も成立する. 補題 4.3 の証明, 従って Proposition 4.1 の証明も完成した. □

参考文献

[1] S. Agmon, *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **2** (1975), 151–218.

[2] M. Aizenman and B. Simon, *Brownian motion and Harnack inequality for Schrödinger equations*, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 209—273.

[3] G. Artbazar and K. Yajima, *The L^p-continuity of wave operators for one dimensional Schrödinger operators*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **7** (2000), 221-240.

[4] M. Beceanu, *Structure of wave operators for a scaling-critical class of potentials*, Amer. J. Math. **136** (2014), 255–308.

[5] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation spaces, an introduction*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1976).

[6] P. D'Ancona and L. Fanelli, *L^p–boundedness of the wave operator for the one dimensional Schrödinger operator*, Commun. Math. Phys. **268** (2006), 415–438.

[7] D. Finco and K. Yajima, *The L^p boundedness of wave operators for Schrödinger operators with threshold singularities. II. Even dimensional case.* J. Math. Sci. Univ. Tokyo **13** (2006), 277—346.

[8] L. Grafakos, *Modern Fourier analysis*, Springer Verlag, New York (2009).

[9] A. Jensen and T. Kato, *Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions*, Duke Math. J. **46** (1979), 583–611.

[10] A. Jensen and K. Yajima, *A remark on L^2-boundedness of wave operators for two dimensional Schrödinger operators*, Commun. Math. Phys. **225** (2002), 633–637.

[11] A. Jensen and K. Yajima, *On L^p-boundedness of wave operators for 4-dimensional Schrödinger with threshold singularities*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **96** (2008), 136–162.

[12] T. Kato, *Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient*, Comm. Pure Appl. Math **12** (1959), 403–425.

[13] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, New York (1966).

[14] T. Kato, *Wave operators and similarity for non-selfadjoint operators*, Ann. Math. **162** (1966), 258–279.

[15] S. T. Kuroda, *Introduction to Scattering Theory*, Lecture Notes, Aarhus University

[16] M. Murata, *Asymptotic expansions in time for solutions of Schrödinger-type equations*, J. Funct. Anal., **49** (1982), 10–56.

[17] M. Reed and B. Simon, *Methods of moderm mathemtical physics vol II, Fourier analysis, selfadjointness*, Academic Press, New-York, San Francisco, London (1975).

[18] M. Reed and B. Simon, *Methods of moderm mathemtical physics vol III, Scattering theory*, Academic Press, New-York, San Francisco, London (1979).

[19] M. Reed and B. Simon, *Methods of moderm mathemtical physics vol IV, Analysis of Operators*, Academic Press, New-York, San Francisco, London (1978).

[20] , K. Stempakit Transplantation theorems—a survey, J. Fourier Anal. Appl. **17** (2011), 408—430.

[21] E. M. Stein, *Harmonic analysis, real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ. (1993).

[22] R. Weder, *L^p-$L^{p'}$ estimates for the Schrödinger equations on the line and inverse scattering for the nonliner Schrödinger equation with a potential*, J. Funct. Anal. **170** (2000), 37–68.

[23] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis.* Cambridge University Press; 4th edition (1927).

[24] K. Yajima, *The $W^{k,p}$-continuity of wave operators for Schrödinger operators*, J. Math. Soc. Japan **47** (1995), 551-581.

[25] K. Yajima, *The L^p-boundedness of wave operators for two dimensional Schrödinger operators*, Commun. Math. Phys. **208** (1999), 125–152.

[26] K. Yajima, *The L^p boundedness of wave operators for Schrödinger operators with threshold singularities I, Odd dimensional case*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **7** (2006), 43–93.

[27] 谷島賢二, シュレーディンガー方程式 I, 朝倉書店 (2014).

[28] K. Yajima, *Wave operators for Schrödinger operators with threshold singuralities, revisited*, preprint (2015), arXiv 1508.05738.