

Spectral properties of Schrödinger operators on perturbed lattices

安藤和典 (Inha University, Republic of Korea)

Kazunori Ando (Inha University, Republic of Korea)

磯崎 洋 (筑波大学数理物質系数域)

Hiroshi Isozaki (University of Tsukuba)

森岡 悠 (芝浦工業大学教育イノベーション推進センター)

Hisashi Morioka (Shibaura Institute of Technology)

1 はじめに

本稿では、平行移動不変な構造を持つ無限グラフ上の離散 Schrödinger 作用素のスペクトル理論について述べる ([3]). 特に、連続スペクトルに埋蔵された固有値の非存在と、レゾルベントの極限吸収に焦点を当てる。これらから、スペクトル表示、波動作用素の存在と完全性も得られることは良く知られている。

埋蔵固有値の非存在を示すにあたり重要となるのは、離散 Laplacian に対する Rellich 型定理 (\mathbf{R}^d における定係数線形偏微分方程式に対しては、[6], [8] にはじまり、一般化された結果多数) である。正方格子の場合には [5] で結果が得られているが、本稿では、これをより広いクラスの周期構造を持つ無限グラフに拡張した [3] の結果について述べる。離散 Laplacian 及び離散 Schrödinger 作用素のスペクトルの構造は、 \mathbf{R}^d とは様相が異なりグラフの幾何構造に強く依存している。グラフによっては、ポテンシャルを与えなくても埋蔵固有値を持ったり、簡単なポテンシャルにより非端点の埋蔵固有値の例を作ることができる。Fourier 解析により、このようなグラフの幾何構造は Fermi 面と呼ばれる複素多様体の幾何学的及び代数的性質に反映されている事が分かる。さらに、楕円型作用素では良く知られている一意接続定理も、グラフの場合には幾何構造に強く依存しているようである。特に、カゴメ格子などの一部のグラフでは一意接続定理が全く期待できない。実際、このようなグラフでは、ポテンシャルを与えなくても埋蔵固有値が存在し、適切にポテンシャルを与えれば、任意の値に埋蔵固有値を作ることができる。

極限吸収については、[4], [2] などでは Mourre の不等式による証明が用いられているが、本稿ではこれを使わず、[1] の手法に従い、擬微分作用素の解析を通じて、Hörmander の $B - B^*$ 空間の枠組みで証明ができる。ここでも Fermi 面の特異性の有無が関係してくるが、これは前述の埋蔵固有値の非存在で関わってきたものとは別のものである。散乱問題の順問題を考えている限り、埋蔵固有値の非存在と極限吸収はある程度別の問題として切り分けることができるが、逆散乱問題まで含めると、Rellich 型定理と極限吸収の両方を用いて議論するので、順問題

と比べると必要な仮定はやや強いものとなる。ただし、本稿では逆問題は扱わない。

2 設定

2.1 格子と離散 Laplacian

\mathbf{R}^d 内の平行移動周期的な無限グラフを $\Gamma_0 = \{\mathcal{L}_0, \mathcal{V}_0, \mathcal{E}_0\}$ とおく。ここで、 $\mathbf{v}_j, j = 1, \dots, d$, を \mathbf{R}^d の基底として、

$$\mathcal{L}_0 = \{\mathbf{v}(n); n \in \mathbf{Z}^d\}, \quad \mathbf{v}(n) = \sum_{j=1}^d n_j \mathbf{v}_j,$$

また、相異なる点 $p_1, \dots, p_s \in \mathbf{R}^d, p_i - p_j \notin \mathcal{L}_0, i \neq j$, に対し、頂点集合を

$$\mathcal{V}_0 = \bigcup_{j=1}^s (p_j + \mathcal{L}_0),$$

(無向) 辺集合を \mathcal{E}_0 とした。以下、多重辺やループのない単純グラフのみを考える。我々が想定しているグラフとしては、例えば以下のようなものがある (図 1, 2, 3 を参照)。

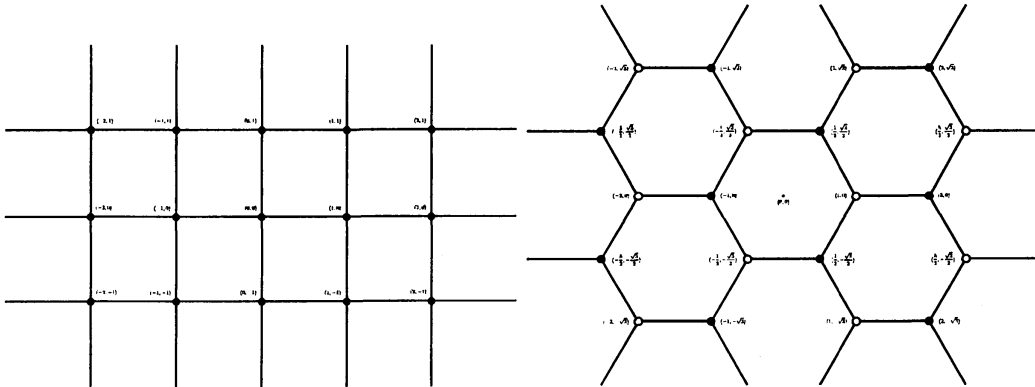


図 1 正方格子及び六角格子

格子 Γ_0 の定義及び図から明らかのように、 Γ_0 は、ある有限な基本領域による \mathcal{L}_0 に沿っての平行移動繰り返しの構造を持っている。頂点の次数は軌道 $p_j + \mathcal{L}_0$ のみに依存するので、 $\deg(v) = \deg_0(j), v \in p_j + \mathcal{L}_0, j = 1, \dots, s$, と書く。また、基本領域に含まれる点 p_1, \dots, p_s に応じて、 \mathcal{V}_0 上で値をとる関数を \mathbf{C}^s -ベクトル値関数とみなす。例えば、 $\ell^2(\mathcal{V}_0)$ は、 $\ell^2(\mathbf{Z}^d; \mathbf{C}^s)$ と同一視し、 $\hat{f}(n) = (\hat{f}_1(n), \dots, \hat{f}_s(n)), n \in \mathbf{Z}^d$, などと書く。 $\ell^2(\mathbf{Z}^d; \mathbf{C}^s)$ の内積は

$$(\hat{f}, \hat{g}) = \sum_{j=1}^s \sum_{n \in \mathbf{Z}^d} \hat{f}_j(n) \overline{\hat{g}_j(n)} \deg_0(j),$$

で定義されている。

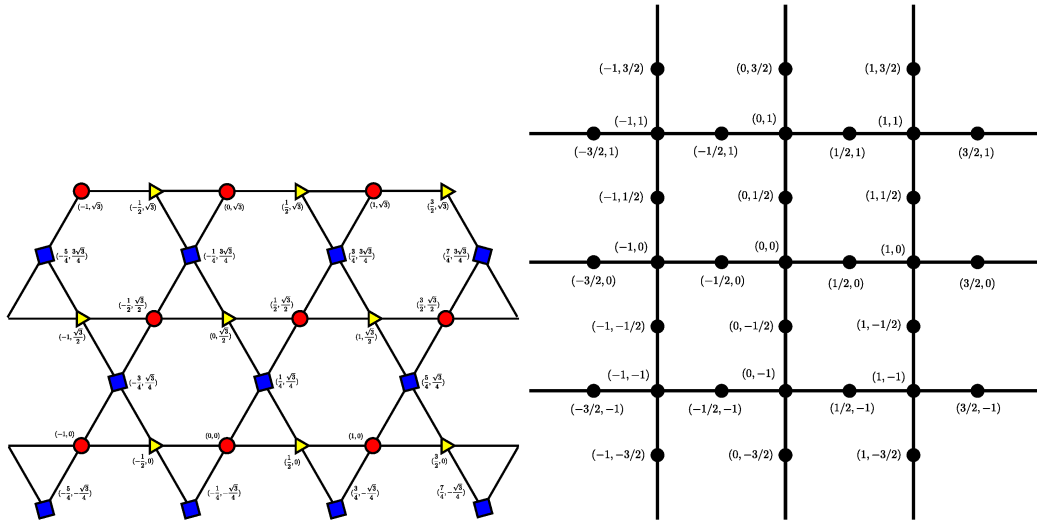


図 2 カゴメ格子及び subdivision

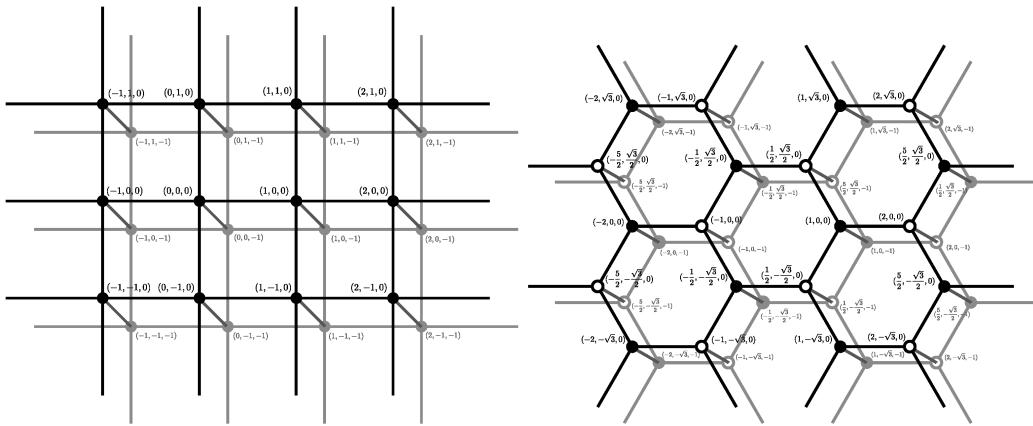


図 3 Ladder 及び Graphite

本稿では、離散 Laplacian を

$$(2.1) \quad (\widehat{\Delta}_{\Gamma_0} \widehat{f})(v) = \frac{1}{\deg(v)} \sum_{w \in \mathcal{V}_0, (w,v) \in \mathcal{E}_0} \widehat{f}(w), \quad v \in \mathcal{V}_0,$$

で定義する。なお、推移 Laplacian や隣接 Laplacian を採用しても以降の議論は同様である。 $\widehat{\Delta}_{\Gamma_0}$ を \mathbf{C}^s -値関数に作用する行列として書き直すと、シフト作用素 $\widehat{S}_j, \widehat{S}_j^*$ の対称行列となる。ただし、 \mathbf{Z}^d 上 \mathbf{C}^1 -値関数 ϕ に対し、 $(\widehat{S}_j \phi)(n) = \phi(n + \mathbf{e}_j)$, $(\widehat{S}_j^* \phi)(n) = \phi(n - \mathbf{e}_j)$ である。

2.2 Fermi 面

ユニタリ作用素 $\mathcal{U}_{\mathcal{L}_0} : \ell^2(\mathcal{V}_0) \rightarrow L^2(\mathbf{T}^d; \mathbf{C}^s)$ を

$$f_j(x) := (\mathcal{U}_{\mathcal{L}_0} \widehat{f})_j(x) = (2\pi)^{-d/2} \sqrt{\deg_0(j)} \sum_{n \in \mathbf{Z}^d} \widehat{f}_j(n) e^{in \cdot x}, \quad j = 1, \dots, s,$$

と定義する. $L^2(\mathbf{T}^d; \mathbf{C}^s)$ の内積は,

$$(f, g) = \sum_{j=1}^s \int_{\mathbf{T}^d} f_j(x) \overline{g_j(x)} dx,$$

と定義する.

離散 Laplacian は, $\mathcal{U}_{\mathcal{L}_0}$ により \mathbf{T}^d の行列のかけ算作用素に変換される :

$$(2.2) \quad \mathcal{U}_{\mathcal{L}_0}(-\widehat{\Delta}_{\Gamma_0})\mathcal{U}_{\mathcal{L}_0}^* = H_0(x),$$

ここで, $H_0(x)$ は $s \times s$ の Hermite 行列で, 各成分は三角多項式である.

$\mathbf{T}_{\mathbf{C}}^d = \mathbf{C}^d / (2\pi\mathbf{Z}^d)$ とおく. 以下, 次のようにおく :

$$(2.3) \quad \sigma(H_0) = \bigcup_{x \in \mathbf{T}^d} \{ \lambda \in \mathbf{R} ; \lambda \text{ は } H_0(x) \text{ の固有値} \},$$

$$(2.4) \quad p(x, \lambda) = \det(H_0(x) - \lambda),$$

$$(2.5) \quad M_\lambda = \{ x \in \mathbf{T}^d ; p(x, \lambda) = 0 \},$$

$$(2.6) \quad M_\lambda^{\mathbf{C}} = \{ z \in \mathbf{T}_{\mathbf{C}}^d ; p(z, \lambda) = 0 \},$$

$$(2.7) \quad M_{\lambda, reg}^{\mathbf{C}} = \{ z \in M_\lambda^{\mathbf{C}} ; \nabla_z p(z, \lambda) \neq 0 \},$$

$$(2.8) \quad M_{\lambda, sng}^{\mathbf{C}} = \{ z \in M_\lambda^{\mathbf{C}} ; \nabla_z p(z, \lambda) = 0 \},$$

$$(2.9) \quad \widetilde{\mathcal{T}} = \{ \lambda \in \sigma(H_0) ; M_{\lambda, sng}^{\mathbf{C}} \cap \mathbf{T}^d \neq \emptyset \}.$$

$M_\lambda^{\mathbf{C}}$ を離散 Laplacian の Fermi 面と呼ぶ. Fermi 面の幾何学的構造は, スペクトルの構造に深く関係している.

Example 1. Γ_0 が正方格子の場合 :

$$H_0(x) = -\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos x_j, \quad p(x, \lambda) = -\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos x_j - \lambda.$$

よって, $\sigma(H_0) = [-1, 1]$, $\widetilde{\mathcal{T}} = \{ j/d ; j = -d, -d+2, \dots, d-2, d \}$. さらに,

- $\lambda \in (-1, 1) \setminus \widetilde{\mathcal{T}}$ に対し, M_λ は $(d-1)$ -次元実解析的部分多様体, $M_\lambda^{\mathbf{C}}$ は $(d-1)$ -次元複素解析的部分多様体である.
- $-1 < \lambda < 1$ のとき, $M_{\lambda, sng}^{\mathbf{C}} \subset (\pi\mathbf{Z})^d \cap \mathbf{T}^d$.
- $-1 < \lambda < 1$ のとき, $M_{\lambda, reg}^{\mathbf{C}}$ の各連結成分は \mathbf{T}^d と共通部分を持ち, 共通部分は $(d-1)$ -次元実解析的部分多様体である.

Example 2. Γ_0 が六角格子の場合 :

$$H_0(x) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{ix_1} + e^{ix_2} \\ 1 + e^{-ix_1} + e^{-ix_2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$p(x, \lambda) = \lambda^2 - \frac{3 + 2(\cos x_1 + \cos x_2 + \cos(x_1 - x_2))}{9}.$$

よって, $\sigma(H_0) = [-1, 1]$, $\tilde{\mathcal{T}} = \{-1, -1/3, 0, 1/3, 1\}$. さらに,

- $\lambda \in (-1, 1) \setminus \tilde{\mathcal{T}}$ に対し, M_λ は 1次元実解析的部分多様体, $M_\lambda^{\mathbf{C}}$ は 1次元複素解析的部分多様体である.
- $-1 < \lambda < 0, 0 < \lambda < 1$ のとき, $M_{\lambda, \text{sing}}^{\mathbf{C}} \subset (\pi\mathbf{Z})^2 \cap \mathbf{T}^2$.
- $-1 < \lambda < 0, 0 < \lambda < 1$ のとき, $M_{\lambda, \text{reg}}^{\mathbf{C}}$ の各連結成分は \mathbf{T}^2 と共通部分を持ち, 共通部分は 1次元実解析的部分多様体である.

Example 3. Γ_0 がカゴメ格子の場合 :

$$H_0(x) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{ix_1} e^{-ix_2} & 1 + e^{ix_1} \\ 1 + e^{-ix_1} e^{ix_2} & 0 & 1 + e^{ix_2} \\ 1 + e^{-ix_1} & 1 + e^{-ix_2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$p(x, \lambda) = -\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \left(\lambda^2 + \frac{\lambda}{2} - \frac{\beta(x)}{8}\right),$$

ここで, $\beta(x) = 1 + \cos x_1 + \cos x_2 + \cos(x_1 - x_2)$ である. よって, $\sigma(H_0) = [-1, 1/2]$, $\tilde{\mathcal{T}} = \{-1, -1/2, -1/4, 0, 1/2\}$. $\lambda = 1/2$ は埋蔵固有値である. さらに,

- $\lambda \in (-1, 1/2) \setminus \tilde{\mathcal{T}}$ に対し, M_λ は 1次元実解析的部分多様体, $M_\lambda^{\mathbf{C}}$ は 1次元複素解析的部分多様体である.
- $-1 < \lambda < -1/4, -1/4 < \lambda < 1/2$ のとき, $M_{\lambda, \text{sing}}^{\mathbf{C}} \subset (\pi\mathbf{Z})^2 \cap \mathbf{T}^2$.
- $-1 < \lambda < -1/4, -1/4 < \lambda < 1/2$ のとき, $M_{\lambda, \text{reg}}^{\mathbf{C}}$ の各連結成分は \mathbf{T}^2 と共通部分を持ち, 共通部分は 1次元実解析的部分多様体である.

Example 4. Γ_0 が Ladder の場合 :

$$H_0(x) = \frac{1}{2d+1} \begin{pmatrix} 2 \sum_{j=1}^d \cos x_j & 1 \\ 1 & 2 \sum_{j=1}^d \cos x_j \end{pmatrix},$$

$$p(x, \lambda) = p_+(x, \lambda) p_-(x, \lambda)$$

$$:= \left(\lambda + \frac{1}{2d+1} \left(2 \sum_{j=1}^d \cos x_j + 1 \right) \right) \left(\lambda + \frac{1}{2d+1} \left(2 \sum_{j=1}^d \cos x_j - 1 \right) \right).$$

よって, $\sigma(H_0) = [-1, 1]$. $M_{\lambda, \pm}^{\mathbf{C}} = \{z \in \mathbf{T}_{\mathbf{C}}^d ; p_{\pm}(z, \lambda) = 0\}$ とおくと, $M_\lambda^{\mathbf{C}} = M_{\lambda, +}^{\mathbf{C}} \cup M_{\lambda, -}^{\mathbf{C}}$. $M_{\lambda, \pm}^{\mathbf{C}}$ に特異点を持たせるような λ の集合をそれぞれ $\tilde{\mathcal{T}}_{\pm}$ と書く.

- $\lambda \in (-1, (2d-1)/(2d+1)) \setminus \tilde{\mathcal{T}}_-$ に対し, $M_{\lambda, -}$ は $(d-1)$ -次元実解析的部分多様体, $M_{\lambda, -}^{\mathbf{C}}$ は $(d-1)$ -次元複素解析的部分多様体である.

- $\lambda \in (-(2d-1)/(2d+1), 1) \setminus \tilde{\mathcal{T}}_+$ に対し, $M_{\lambda,+}$ は $(d-1)$ -次元実解析的部分多様体, $M_{\lambda,+}^{\mathbf{C}}$ は $(d-1)$ -次元複素解析的部分多様体である.
- $-1 < \lambda < (2d-1)/(2d+1)$ のとき, $M_{\lambda,-}^{\mathbf{C}}$ の正則部分の各連結成分は \mathbf{T}^d と共通部分を持ち, 共通部分は $(d-1)$ -次元実解析的部分多様体である.
- $-(2d-1)/(2d+1) < \lambda < 1$ のとき, $M_{\lambda,+}^{\mathbf{C}}$ の正則部分の各連結成分は \mathbf{T}^d と共通部分を持ち, 共通部分は $(d-1)$ -次元実解析的部分多様体である.
- $-1 < \lambda < -(2d-1)/(2d+1)$ のとき, $M_{\lambda,+}^{\mathbf{C}} \cap \mathbf{T}^d = \emptyset$.
- $(2d-1)/(2d+1) < \lambda < 1$ のとき, $M_{\lambda,-}^{\mathbf{C}} \cap \mathbf{T}^d = \emptyset$.

その他のグラフについても, それぞれ [3] に示してある.

3 Rellich 型定理と一意接続定理

3.1 Rellich 型定理

Rellich 型定理については, 次の仮定を満たすような Fermi 面を与える格子を考える.

(A-1) 集合 $\mathcal{T}_1 \subset \sigma(H_0)$ が存在し, 次を満たす: $\lambda \in \sigma(H_0) \setminus \mathcal{T}_1$ に対し,

(A-1-1) $M_{\lambda, \text{sing}}^{\mathbf{C}}$ は離散集合.

(A-1-2) $M_{\lambda, \text{reg}}^{\mathbf{C}}$ の各連結成分は \mathbf{T}^d と共通部分を持ち, 共通部分は $(d-1)$ -次元実解析的部分多様体をなす.

離散 Laplacian に対する Rellich 型定理は次の通りである.

Theorem 3.1. (A-1), $\lambda \in \sigma(H_0) \setminus \mathcal{T}_1$ を仮定する. \mathbf{T}^d 上の超関数 u が, 三角多項式を成分に持つ f に対して,

$$(3.1) \quad (H_0(x) - \lambda)u = f \quad \text{on } \mathbf{T}^d,$$

及び

$$(3.2) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \sum_{j=1}^d \int_{\mathbf{T}^d} |\chi(|\sqrt{-\Delta}| < R) u_j(x)| dx = 0,$$

を満たすならば, u の各成分も三角多項式で表される. ここで, $\chi(I)$ は I の特性関数, Δ は \mathbf{T}^d 上の周期的境界条件を持つ Laplacian である.

Corollary 3.2. (A-1), $\lambda \in \sigma(H_0) \setminus \mathcal{T}_1$ を仮定する. \mathcal{V}_0 上関数 \hat{u} が, ある定数 $R_0 > 0$ に対し

$$(3.3) \quad (-\hat{\Delta}_{\Gamma_0} - \lambda)\hat{u} = 0, \quad \text{for } |n| > R_0,$$

$$(3.4) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \sum_{j=1}^s \sum_{R_0 < |n| < R} |\hat{u}_j(n)|^2 = 0,$$

を満たすとする. このとき, 定数 $R_1 > R_0$ が存在して, $|n| > R_1$ に対し $\widehat{u}(n) = 0$ である.

条件 (3.2), (3.4) は, Hörmander の $\mathcal{B}-\mathcal{B}^*$ 空間の枠組みで記述できる: $N = (N_1, \dots, N_d)$, $N_j = -i\partial/\partial x_j$ とおいて,

$$\mathcal{B}(\mathbf{T}^d) = \left\{ f \in L^2(\mathbf{T}^d); \|f\|_{\mathcal{B}(\mathbf{T}^d)} = \sum_{j=1}^{\infty} r_j^{1/2} \|\chi(r_{j-1} \leq |N| < r_j) f\|_{L^2(\mathbf{T}^d)} < \infty \right\},$$

ただし, $r_{-1} = 0$, $r_j 2^j$, $j \geq 1$ であり,

$$\mathcal{B}^*(\mathbf{T}^d) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbf{T}^d); \|u\|_{\mathcal{B}^*(\mathbf{T}^d)} = \left(\sup_{R>1} \frac{1}{R} \|\chi(|N| < R) u\|_{L^2(\mathbf{T}^d)}^2 \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

である. これらは, ベクトル値 (超) 関数に対しても同様に定義される. また,

$$\mathcal{B}_0^*(\mathbf{T}^d) = \left\{ u \in \mathcal{B}^*(\mathbf{T}^d); \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \|\chi(|N| < R) u\|_{L^2(\mathbf{T}^d)}^2 = 0 \right\},$$

と定める. これらは, 格子上では次のようなノルムで表される:

$$\|\widehat{u}\|_{\widehat{\mathcal{B}}^*} = \left(\sup_{R>1} \frac{1}{R} \sum_{|n|<R} |\widehat{u}(n)|^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

$$\widehat{u} \in \widehat{\mathcal{B}}_0^*(\mathbf{Z}^d) \iff \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \sum_{|n|<R} |\widehat{u}(n)|^2 = 0.$$

さて, Theorem 3.1, Corollary 3.2 の証明であるが, 詳細は [3] にあるので割愛し, 本稿では概要のみを述べる. $H_0(x) - \lambda$ の余因子行列を (3.1) の両辺にかけることにより,

$$p(x, \lambda) I_s u = g,$$

となる. よって, 定理の証明は, 単独化した方程式 $p(x, \lambda) u = g$ に対して示せば良い (\mathbf{C}^1 -値の (超) 関数を再び u, g などと表す).

Lemma 3.3. λ, u は Theorem 3.1 の条件を満たすとする. このとき, $u \in C^\infty(\mathbf{T}^d \setminus M_{\lambda, \text{sing}}^{\mathbf{C}})$ である. 特に, $M_{\lambda, \text{reg}}^{\mathbf{C}} \cap \mathbf{T}^d$ 上で $g(x) = 0$ である.

さらに, 仮定 (A-1-2) により, $g(x) = 0$ は $M_{\lambda, \text{reg}}^{\mathbf{C}}$ 全体に解析接続される.

Lemma 3.4. $M_{\lambda, \text{reg}}^{\mathbf{C}}$ 上で $g(z) = 0$ である.

よって, (A-1-1) により, $g(z)/p(z, \lambda)$ の特異点は除去可能であることが分かる.

Lemma 3.5. $g(z)/p(z, \lambda)$ は $\mathbf{T}_{\mathbf{C}}^d$ 上で解析的である.

次に, $w_j = e^{iz_j}$, $j = 1, \dots, d$, と変数変換する:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{C}}^d \ni z \mapsto w \in \mathbf{C}^d \setminus \bigcup_{j=1}^d A_j, \quad A_j = \{w \in \mathbf{C}^d; w_j = 0\}.$$

すると,

$$\frac{g(z)}{p(z, \lambda)} = \frac{G(w)}{P(w, \lambda)} \prod_{j=1}^d w_j^{\gamma_j - \beta_j}, \quad G, P \in \mathbf{C}[w_1, \dots, w_d],$$

と表すことができる. これまでの議論により, G/P は正則関数であり, $\{w \in \mathbf{C}^d; P(w, \lambda) = 0\}$ 上で $G(w) = 0$ であることが分かる. ($A_j \cap \{w \in \mathbf{C}^d; P(w, \lambda) = 0\}$ も除去可能特異点である.) よって, Hilbert Nullstellensatz により,

Theorem 3.6. $G/P \in \mathbf{C}[w_1, \dots, w_d]$ である.

以上をまとめて, $g(z)/p(z, \lambda)$ は三角多項式であることが分かる.

3.2 一意接続定理と埋蔵固有値の例

離散 Laplacian に対する一意接続定理は, \mathbf{R}^d 上の楕円型作用素に対するものとは少し意味が異なり, 次のような意味である.

Definition 3.7. Γ_0 で一意接続が成り立つとは, \mathcal{V}_0 上で \hat{u} が $(-\hat{\Delta}_{\Gamma_0} - \lambda)\hat{u} = 0$ を満たすとする. 定数 $R_0 > 0$ が存在して, $|n| > R_0$ において $\hat{u}(n) = 0$ ならば, \mathcal{V}_0 上で $\hat{u} = 0$ である.

一意接続定理が成立すれば, Rellich 型定理を用いて埋蔵固有値の非存在が言える. \hat{V} を \mathcal{V}_0 上のスカラーポテンシャルとし, $\#\text{supp}\hat{V} < \infty$ と仮定する. 離散 Schrödinger 作用素 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, $\hat{H}_0 = -\hat{\Delta}_{\Gamma_0}$, に対し, 次の事が分かる.

Theorem 3.8. Γ_0 は, 正方格子, 三角格子, 六角格子, 高次元ダイヤモンド格子, *ladder*, *graphite* のいずれかであるとする. このとき, 一意接続定理が成立する. 特に, $\sigma_p(\hat{H}) \cap (\sigma(\hat{H}_0) \setminus \mathcal{T}_1) = \emptyset$.

なお, Theorem 3.8 で例示された格子は, $\lambda \in \sigma(\hat{H}_0) \setminus \mathcal{T}_1$ で仮定 (A-1) を満たす. 一方で, 格子によっては一意接続定理が成り立たない場合がある.

図 4 に従い, Γ_0 がカゴメ格子の場合に, 次のようなポテンシャルを考える:

$$\hat{V}(v) = \begin{cases} r, & v = x_j, j = 1, 2, \dots, 6, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

ただし r は任意の定数とする. このとき, $\lambda = r + 1/2$ を固有値に持つ台有限な固有関数

$$\hat{u}(v) = \begin{cases} (-1)^j, & v = x_j, j = 1, 2, \dots, 6, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

が得られる. r は任意であるから, 埋蔵固有値の例になっている.

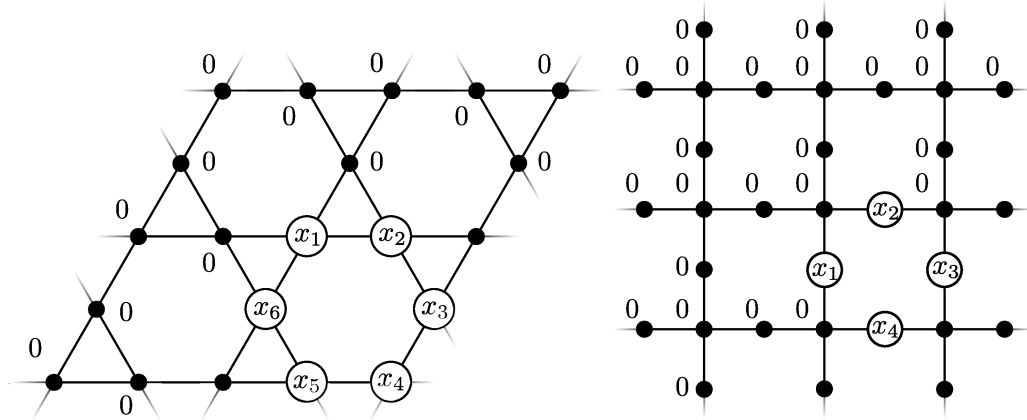


図4 一意接続定理の反例

Γ_0 が subdivision の場合にも同様に,

$$\widehat{V}(v) = \begin{cases} r, & v = x_j, j = 1, 2, 3, 4, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

とすると, $\lambda = r$ を固有値に持つ有限な固有関数

$$\widehat{u}(v) = \begin{cases} (-1)^j, & v = x_j, j = 1, 2, 3, 4, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

が得られる.

ところで, 一意接続定理とは別に, 仮定 (A-1) が成り立たない場合にも埋蔵固有値を持つ例がある. 代表例として, ladder を挙げる. Graphite の場合もほぼ同様である. Ladder の場合には, $-1 < \lambda < -(2d-1)/(2d+1)$, $(2d-1)/(2d+1) < \lambda < 1$ のとき (A-1) を満たさず, \mathbf{R}^d との共通部分を持たないような $M_{\lambda, reg}^C$ の連結成分が存在する. スカラーポテンシャル $\widehat{V}(n) = \text{diag}(c\delta_{no}, c\delta_{no})$, $c \neq 0$, とすると, $(\widehat{H}_0 + \widehat{V} - \lambda)\widehat{u} = 0$ は, Fourier 級数により,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2}{2d+1} \sum_{j=1}^d \cos x_j - \lambda \right) u_1(x) - \frac{1}{2d+1} u_2(x) &= -\frac{c}{2\pi} \widehat{u}_1(0), \\ -\frac{1}{2d+1} u_1(x) + \left(-\frac{2}{2d+1} \sum_{j=1}^d \cos x_j - \lambda \right) u_2(x) &= -\frac{c}{2\pi} \widehat{u}_2(0), \end{aligned}$$

となる. ここで, $u_1(x) = \pm u_2(x) =: v(x)$, $\pm \lambda > (2d-1)/(2d+1)$, の形の解を作る. $c = 2\pi/\widehat{v}_{\pm}(0)$ とおいて, $v_{\pm}(x) = \left(\frac{1}{2d+1} (\pm 1 + 2 \sum_{j=1}^d \cos x_j + \lambda) \right)^{-1}$ が解である. $\widehat{v}_{\pm}(n)$ は有限台ではなく, 急減少している.

4 極限吸収

4.1 極限吸収と放射条件

極限吸収に関して基本的な事実は次の通りである ([1]). $h(x) \in C^\infty(\mathbf{T}^d)$ を実数値関数として,

$$M = \{x \in \mathbf{T}^d ; h(x) = 0\},$$

とおく. ここで, M 上で $\nabla_x h(x) \neq 0$ を仮定する.

Definition 4.1. (1) $u \in S'(\mathbf{R}^d)$ に対し, wave front set $WF^*(u)$ を次のように定義する. $(x_0, \omega) \in \mathbf{R}^d \times S^{d-1}$ が $(x_0, \omega) \notin WF^*(u)$ であるとは, $0 < \delta < 1$, $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, $\chi(x_0) = 1$ が存在して,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{|\xi| < R} |C_{\omega, \delta}(\xi) \widetilde{\chi u}(\xi)|^2 d\xi = 0,$$

を満たす. ただし, $\widetilde{\chi u}$ は χu の Fourier 変換, $C_{\omega, \delta}(\xi)$ は集合 $\{\xi \in \mathbf{R}^d ; \omega \cdot \xi > \delta|\xi|\}$ の特性関数である.

(2) 方程式 $h(x)u = f \in \mathcal{B}(\mathbf{T}^d)$ の解 $u \in \mathcal{B}^*(\mathbf{T}^d)$ が outgoing (incoming) であるとは,

$$WF^*(u) \subset \{(x, \omega_x) ; x \in M\}, \quad (WF^*(u) \subset \{(x, -\omega_x) ; x \in M\}),$$

を満たすことである.

Lemma 4.2. $u_z = f/(h(x) - z)$, $z \notin \mathbf{R}$ とする. このとき, weak-* の意味での極限 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{\pm i\epsilon} =: u_\pm$ が存在する :

$$(u_{\pm i\epsilon}, g) \rightarrow (u_\pm, g), \quad \forall g \in \mathcal{B}(\mathbf{T}^d).$$

かつ, ある定数 $C > 0$ が存在して,

$$\|u\|_{\mathcal{B}^*(\mathbf{T}^d)} \leq C \|f\|_{\mathcal{B}(\mathbf{T}^d)}.$$

さらに,

$$WF^*(u_\pm) \subset \{(x, \pm \omega_x) ; x \in M\},$$

ここで, $\omega_x \in S^{d-1} \cap T_x(M)^\perp$ 及び $\omega_x \cdot \nabla_x h < 0$, また,

$$u_\pm(x) - \frac{1}{h(x) \mp i0} \otimes (f|_M) \in \mathcal{B}_0^*(\mathbf{T}^d).$$

Lemma 4.3. 方程式 $h(x)u = f \in \mathcal{B}(\mathbf{T}^d)$ の解が outgoing (incoming) であるとは,

$$u = \frac{f(x)}{h(x) - i0}, \quad \left(u = \frac{f(x)}{h(x) + i0} \right),$$

と表されることと同値である。また, *outgoing* な解 u_+ (*incoming* な解 u_-) に対し,

$$\operatorname{Im}(u_{\pm}, f) = \pm\pi \|f|_M\|_{L^2(M)}^2,$$

を満たす。

4.2 離散 Laplacian に関する極限吸収

さて, Γ_0 に戻る. $\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \dots \leq \lambda_s(x)$ を $H_0(x)$ の固有値とすると,

$$p(x, \lambda) = \prod_{j=1}^s (\lambda_j(x) - \lambda).$$

そこで,

$$M_{\lambda,j} = \{x \in \mathbf{T}^d; \lambda_j(x) = \lambda\}, \quad M_{\lambda} = \bigcup_{j=1}^s M_{\lambda,j},$$

と表せる. 次のような仮定を置く.

有限集合 $\mathcal{T}_0 \subset \sigma(H_0)$ が存在して, 次を満たす: $\lambda \in \sigma(H_0) \setminus \mathcal{T}_0$ のとき,

(A-2) $M_{\lambda,j} \cap M_{\lambda,k} = \emptyset, j \neq k$.

(A-3) M_{λ} 上で $\nabla_x p(x, \lambda) \neq 0$.

$P_j(x)$ を固有値 $\lambda_j(x)$ に対応する固有射影とする. コンパクトな区間 $J \subset \sigma(H_0) \setminus \mathcal{T}_0$ を取り, U^{ϵ_0} を $\cup_{\lambda \in J} M_{\lambda}$ の ϵ_0 -近傍とする. すると, 十分小さい $\epsilon_0 > 0$ に対し, $P_j(x) \in C^{\infty}(U^{\epsilon_0})$ である.

$R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$ とおく. また, $\chi \in C^{\infty}(\mathbf{T}^d)$ であって, $x_0 \in M_{\lambda}$ の十分小さな近傍で $\chi(x) = 1$ となるものを取る. $u = R_0(z)f$ とおくと,

$$(\lambda_j(x) - z)\chi(x)P_j u = \chi(x)P_j f.$$

そこで, $h(x) = \lambda_j(x) - \lambda$ とみなすことで, 極限吸収を示すことができる.

Theorem 4.4. (1) $f \in \mathcal{B}(\mathbf{T}^d)$, $\lambda \in \sigma(H_0) \setminus \mathcal{T}_0$ に対し, 次の極限が存在する:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (R_0(\lambda \pm i\epsilon)f, g) = (R_0(\lambda \pm i0)f, g), \quad \forall g \in \mathcal{B}(\mathbf{T}^d).$$

さらに, 次の不等式が成り立つ:

$$\|R_0(\lambda \pm i0)f\|_{\mathcal{B}^*(\mathbf{T}^d)} \leq C\|f\|_{\mathcal{B}(\mathbf{T}^d)}.$$

この $C > 0$ は, λ が $\sigma(H_0) \setminus \mathcal{T}_0$ のコンパクトな区間を動く時, λ に依存しない.

(2) $\sigma(H_0) \setminus \mathcal{T}_0 \ni \lambda \mapsto (R_0(\lambda \pm i0)f, g)$, $f, g \in \mathcal{B}(\mathbf{T}^d)$, は連続写像である.

(3) $u_{\pm} = R_0(\lambda \pm i0)f$ とおくと,

$$WF^*(P_j u_{\pm}) = \{(x, \pm\omega_x); x \in M_{\lambda,j}\}.$$

ただし, $\omega_x \in S^{d-1} \cap T_x(M_{\lambda,j})^\perp$ かつ $\omega_x \cdot \nabla_x \lambda_j(x) < 0$. さらに,

$$P_j u_\pm \mp \frac{1}{\lambda_j(x) - \lambda \mp i0} \otimes (P_j f|_{M_{\lambda,j}}) \in \mathcal{B}_0^*(\mathbf{T}^d).$$

そこで, 次のように定義する.

Definition 4.5.

$$(4.1) \quad (H_0 - \lambda)u = f \in \mathcal{B}(\mathbf{T}^d),$$

の解が *outgoing (incoming)* であるとは,

$$WF^*(P_j u) \subset \{(x, \omega_x) ; x \in M_{\lambda,j}\}, \quad (WF^*(P_j u) \subset \{(x, -\omega_x) ; x \in M_{\lambda,j}\}),$$

を満たすことである. ただし, $\omega_x \in S^{d-1} \cap T_x(M_{\lambda,j})^\perp$ かつ $\omega_x \cdot \nabla_x \lambda_j(x) < 0$.

Theorem 4.6. (4.1) の解が *outgoing (incoming)* であることは,

$$P_j u = \frac{P_j f}{\lambda_j - \lambda - i0}, \quad \left(P_j u = \frac{P_j f}{\lambda_j - \lambda + i0} \right),$$

と同値である.

4.3 摂動された格子と離散 Schrödinger 作用素に関する極限吸収

最後に, 摂動を含む場合の極限吸収について述べる. $\Gamma = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ を Γ_0 に対して有限回の摂動 (頂点あるいは辺の除去または付加) を加えた無限グラフとする. Γ の十分遠方では, 元になったグラフ Γ_0 (の外部領域) と同型である. そこで, その外部領域への射影を \widehat{P}_{ext} とおく.

ここで, 離散 Schrödinger 作用素 $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{V}$ を考える. ここで, $\widehat{H}_0 = -\widehat{\Delta}_\Gamma$ は \mathcal{V} 上の離散 Laplacian, \widehat{V} は \mathcal{V} 上のスカラーポテンシャルであり, $\#\text{supp} \widehat{V} < \infty$ と仮定する. Weyl の定理より, $\sigma_{ess}(\widehat{H}) = \sigma(\widehat{H}_0)$ であることが分かる.

ここで, 元のグラフ Γ_0 で一意接続定理が成立しても, 摂動したグラフ Γ では成り立たない場合があることに注意が必要である. 摂動によっては, 台が有限な固有関数を持つ場合がある. そこで,

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \cup \sigma_p(\widehat{H}),$$

とおく. また,

$$\widehat{Q}_1(z) = (\widehat{H}_0 - z)\widehat{P}_{ext}\widehat{R}(z),$$

とおく.

Theorem 4.7. (1) 任意のコンパクトな区間 $J \subset \sigma_{ess}(\widehat{H}) \setminus \mathcal{T}$ に対し, 極限

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\widehat{R}(\lambda \pm i\epsilon)\widehat{f}, \widehat{g}) = (\widehat{R}(\lambda \pm i0)\widehat{f}, \widehat{g}), \quad \widehat{f}, \widehat{g} \in \widehat{\mathcal{B}},$$

が存在する. また, 定数 $C > 0$ が存在して,

$$\|\widehat{R}(\lambda \pm i0)\widehat{f}\|_{\widehat{\mathcal{B}}^*} \leq C\|\widehat{f}\|_{\widehat{\mathcal{B}}}, \quad \lambda \in J,$$

が成り立つ.

(2) $\sigma_{ess}(\widehat{H}) \setminus \mathcal{T} \ni \lambda \mapsto (\widehat{R}(\lambda \pm i0)\widehat{f}, \widehat{g}), \widehat{f}, \widehat{g} \in \widehat{\mathcal{B}}$, は連続写像である.

(3) $\widehat{u}_{\pm} = \widehat{R}(\lambda \pm i0)\widehat{f}$ は *outgoing (+)* または *incoming (-)* である. 特に, $Q_1(\lambda \pm i0) = \mathcal{U}_{\mathcal{L}_0}\widehat{Q}_1(\lambda \pm i0)$ とおくと,

$$P_j u_{\pm} \mp \frac{1}{\lambda_j(x) - \lambda \mp i0} \otimes \left((P_j Q_1(\lambda \pm i0)\widehat{f})|_{M_{\lambda,j}} \right) \in \mathcal{B}_0^*.$$

また, *outgoing (incoming)* な解はこれに限る.

4.4 注釈

以上のように, 仮定 (A-1) 及び \mathcal{T}_1 , 仮定 (A-2), (A-3) 及び \mathcal{T}_0 は, それぞれ埋蔵固有値と極限吸収で別々の役割を担っている. また, 逆問題まで考慮した場合には, これらは分けて考えることはできず, 逆問題を解く仮定で Rellich 型定理を用いるので両方を同時に仮定する必要が出てくる.

最後に, 摂動を含んだ形での埋蔵固有値に関する結果を述べておく.

Theorem 4.8. (1) $\sigma_p(\widehat{H}) \cap (\sigma_{ess}(\widehat{H}) \setminus \mathcal{T}_0)$ が存在すれば離散的に分布し, 高々有限多重度を持つ. 集積点は, 存在するならば \mathcal{T}_0 に限る.

(2) $\sigma_p(\widehat{H}) \cap (\sigma_{ess}(\widehat{H}) \setminus \mathcal{T}_1)$ は高々有限集合である.

(3) Γ で一意接続定理が成り立つならば, $\sigma_p(\widehat{H}) \cap (\sigma_{ess}(\widehat{H}) \setminus \mathcal{T}_1) = \emptyset$.

このように, Fermi 面にどのような仮定を置くかによって, 得られる結果が微妙に異なってくる.

参考文献

- [1] S. Agmon and L. Hörmander, *Asymptotic properties of solutions of differential equations with simple characteristics*, J. d'Anal. Math. **30** (1976), 1-38.
- [2] K. Ando, *Inverse scattering theory for discrete Schrödinger operators on the hexagonal lattice*, Ann. Henri Poincaré, **14** (2013), 347-383.

- [3] K. Ando, H. Isozaki and H. Morioka, *Spectral properties of Schrödinger operators on perturbed lattices*, to appear in Ann. Henri Poincaré.
- [4] H. Isozaki and E. Korotyaev, *Inverse problems, trace formulae for discrete Schrödinger operators*, Ann. Henri Poincaré, **13** (2012), 751-788.
- [5] H. Isozaki and H. Morioka, *A Rellich type theorem for discrete Schrödinger operators*, Inverse Problems and Imaging, **8** (2014), 475-489.
- [6] F. Rellich, *Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten*, Jahresber. Deitch. Math. Verein., **53** (1943), 57-65.
- [7] W. Shaban and B. Vainberg, *Radiation conditions for the difference Schrödinger operators*, Applicable Analysis, **80** (2001), 525-556.
- [8] E. Vekua, *On metaharmonic functions*, Trudy Tbiliss. Mat. Inst. **12** (1943), 105-174.