数理解析研究所講究録
第 1977 巻 2015 年 109-120

正則凸錐上の Riesz 超函数

名古屋大学 大学院多元数理科学研究科 伊師英之 (Hideyuki ISHI)
Graduate School of Mathematics
Nagoya University

Marcel Riesz [11] はローレンツ錐 $\Lambda_n=\left\{y\in\mathbb{R}^n\,;\,y_n>\sqrt{y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2}\right\}$ 上のガンマ型積分の公式

$$\int_{\Lambda_n}e^{-{}^t y\eta}(y_n^2-y_1^2-\cdots-y_{n-1}^2)^{\alpha-n/2}\,dy=\Gamma_{\Lambda_n}(\alpha)\,(\eta_n^2-\eta_1^2-\cdots-\eta_{n-1}^2)^{-\alpha}$$
$$(\Re\alpha>\frac{n-2}{2},\ \eta\in\Lambda_n), \tag{1}$$
$$\text{ただし } \Gamma_{\Lambda_n}(\alpha):=\pi^{(n-2)/2}\,2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)\Gamma\Big(\alpha-\frac{n-2}{2}\Big),$$

をふまえ, Λ_n 上の測度 $\mathcal{R}_\alpha^{\Lambda_n}:=\Gamma_{\Lambda_n}(\alpha)^{-1}(y_n^2-y_1^2-\cdots-y_{n-1}^2)^{\alpha-n/2}\,1_{\Lambda_n}(y)\,dy$ がパラメータ $\alpha\in\mathbb{C}$ に関して超函数として解析接続されること, そして $\mathcal{R}_m^{\Lambda_n}$ $(m\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ が微分作用素 $\left((\frac{\partial}{\partial y_n})^2-(\frac{\partial}{\partial y_1})^2-\cdots-(\frac{\partial}{\partial y_{n-1}})^2\right)^m$ の基本解であることを示した ([1] も参照). この構成法から $\alpha=m$ が $\Gamma_{\Lambda_n}(\alpha)$ の極であるとき基本解 $\mathcal{R}_m^{\Lambda_n}$ の台が境界 $\partial\Lambda_n$ に含まれることが容易に分かり, とくに $m=1$ の場合から, n が 4 以上の偶数のときに限り波動方程式のホイヘンスの原理が成立することが説明できる.

Gårding [3] は類似の考察を正定値実 r 次対称行列のなす錐 $\mathrm{Sym}^+(r,\mathbb{R})$ について行った. すなわち Siegel の積分公式 ([6, 14, 16])

$$\int_{\mathrm{Sym}^+(r,\mathbb{R})}e^{-\operatorname{tr}x\xi}(\det x)^{\alpha-(r+1)/2}\,dx=\Gamma_r(\alpha)(\det\xi)^{-\alpha}$$
$$(\Re\alpha>\frac{r-1}{2},\ \xi\in\mathrm{Sym}^+(r,\mathbb{R})), \tag{2}$$
$$\text{ただし } \Gamma_r(\alpha):=\pi^{r(r-1)/4}\Gamma(\alpha)\Gamma\Big(\alpha-\frac{1}{2}\Big)\cdots\Gamma\Big(\alpha-\frac{r-1}{2}\Big),$$

から出発して, ベクトル空間 $\mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$ 上の微分作用素 $\det(\frac{\partial}{\partial x})^m$ の基本解を構成した. 二つの錐 Λ_n と $\mathrm{Sym}^+(r,\mathbb{R})$ 上の解析は対称錐の理論に統合され ([2, 9]), さらには Gindikin [4, 5] により等質錐上の解析へと一般化されている.

我々は等質錐とは限らない一般の正則凸錐上で Riesz のアイディアを展開したい. 詳しい設定は以下のとおりである. 一般に函数の組 $\psi=(\psi_1,\ldots,\psi_r)$ と複素数の組 $\underline{s}=(s_1,\ldots,s_r)\in\mathbb{C}^r$ に対し, べき乗の積 $\prod_{k=1}^r\psi_k^{s_k}$ を $\psi^{\underline{s}}$ と書くものとする. 有限次元実ユークリッド空間 V の中の正則凸錐 Ω 上の正値連続函数の組 $f=(f_1,\ldots,f_r)$ と V 上の斉次多項式函数の組 $F=(F_1,\ldots,F_r)$ について

$$\int_\Omega e^{-(x|\xi)}f^{\underline{s}}(x)\,d\mu_\Omega(x)=\Gamma_f(\underline{s})F^{-\underline{s}}(\xi)\qquad(\xi\in\Omega^*,\ \Re s_k>M_k,\ k=1,\ldots,r) \tag{3}$$

が成り立つとする．ただし $d\mu_\Omega$ は Ω 上の標準測度で $\Omega^* \subset V$ は Ω の双対錐(これらの詳しい説明は§1 を参照), $\Gamma_f(\underline{s})$ は $\underline{s}$ の有理型函数, M_k $(k=1,\dots,r)$ は或る正数である．たとえば Ω が等質錐のときは, F が双対錐 Ω^* に付随する基本相対不変多項式の組となるように f をとることができる ([4, 8])．一般に (3) が成り立つとき, V 上の測度とみなした $\Gamma_f(\underline{s})^{-1} f^{\underline{s}} d\mu_\Omega$ を $\underline{s}$ について解析接続することにより, Riesz 超函数 $\mathcal{R}_{f,\underline{s}} \in \mathcal{S}'(V)$ が全ての $\underline{s} \in \mathbb{C}^r$ について定義できる (§3)．このとき非負整数の組 $\underline{m} \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ について $\mathcal{R}_{f,\underline{m}}$ は微分作用素 $F^{\underline{m}}(\frac{\partial}{\partial x})$ の基本解である (定理 8).

我々の主結果は, (3) を満たす一つの例から, Ω の Rothaus 拡大なる高次元の錐上で別の例を構成する系統的な方法を与えたことである (§2)．最も単純な錐である半直線上の積分公式

$$\int_0^\infty e^{-x\xi} x^{\alpha-1}\, dx = \Gamma(\alpha)\xi^{-\alpha} \qquad (\Re\alpha > 0,\ \xi > 0) \tag{4}$$

から出発し, 我々の方法を繰り返し適用することによって, (1), (2) はもとより全ての等質錐上のガンマ型積分公式が得られる．さらには数理統計において知られている ([10, 12]) 以下のような非等質錐上のガンマ型積分公式も, 我々の方法で得られることが分かった (§2, 例 2)．すなわち

$$V := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 & x_5 & 0 & 0 \\ x_5 & x_2 & x_6 & 0 \\ 0 & x_6 & x_3 & x_7 \\ 0 & 0 & x_7 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}(4,\mathbb{R}) \right\} \simeq \mathbb{R}^7,$$

$$\Omega := \left\{ x \in V\,;\, x_1 > 0,\ x_1x_2 - x_5^2 > 0,\ x_2x_3 - x_6^2 > 0,\ x_3x_4 - x_7^2 > 0 \right\}$$

としたとき,

$$\begin{aligned} \int_\Omega e^{-\operatorname{tr} x\xi} (x_1x_2 - x_5^2)^{\alpha-3/2} (x_2x_3 - x_6^2)^{\alpha-3/2} (x_3x_4 - x_7^2)^{\alpha-3/2} x_2^{-\alpha+1} x_3^{-\alpha+1} dx \\ = \pi^{3/2}\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha - 1/2)^3\ (\det\xi)^{-\alpha} \\ (\Re\alpha > 1/2,\ \xi \in V \cap \mathrm{Sym}^+(4,\mathbb{R})). \end{aligned} \tag{5}$$

この例から, V 上の微分作用素

$$\det\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big) = \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \partial x_4} - \frac{1}{4}\frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_7^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_4 \partial x_6^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^4}{\partial x_3 \partial x_4 \partial x_5^2} - \frac{1}{16}\frac{\partial^4}{\partial x_5^2 \partial x_7^2}$$

の基本解の台は $\partial\Omega$ に含まれることが分かる．

§1. 準備.

有限次元実ベクトル空間 V 中の直線を含まない開凸錐 $\Omega \subset V$ を正則凸錐とい

う．ベクトル空間 V の内積 $(\cdot|\cdot)_V$ を一つ固定し，この内積に関する Ω の双対錐 $\{\xi\in V\,;\,(x|\xi)_V>0\ \forall x\in\overline{\Omega}\setminus\{0\}\}$ を Ω^* と書く．正則凸錐 Ω の特性函数 $\chi_\Omega:\Omega\to\mathbb{R}_{>0}$ を $\chi_\Omega(x):=\int_{\Omega^*}e^{-(x|\xi)_V}\,d\xi\quad(x\in\Omega)$ と定め，Ω 上の標準測度 (canonical measure) $d\mu_\Omega$ を $d\mu(x):=\chi_\Omega(x)\,dx$ と定義する．ここで $d\xi$ および dx は内積 $(\cdot|\cdot)_V$ から定まる V 上のユークリッド測度である．

補題 1. ユークリッド空間 V_1,V_2 の中の正則凸錐 $\Omega_i\subset V_i$ $(i=1,2)$ について，線形同型写像 $\Phi:V_1\to V_2$ により $\Phi(\Omega_1)=\Omega_2$ となるならば，$\Phi_*d\mu_{\Omega_1}=d\mu_{\Omega_2}$ が成り立つ．

証明.　それぞれの内積に関する V_1, V_2 の正規直交基底をとり，それらに関する Φ の行列表示を M とする．このとき $x_2=\Phi(x_1)\in V_2$ $(x_1\in V_1)$ ならば，それぞれのユークリッド測度の間に $dx_2=|\det M|\,\Phi_*(dx_1)$ の関係がある．これから

$$(\Phi_*d\mu_{\Omega_1})(x_2)=\chi_{\Omega_1}(\Phi^{-1}(x_2))|\det M|^{-1}dx_2. \tag{6}$$

共役作用素 $\Phi^*:V_2\to V_1$ を $(x_1|\Phi^*(x_2))_{V_1}=(\Phi(x_1)|x_2)_{V_2}$ $(x_1\in V_1,\,x_2\in V_2)$ となるように定義すると $\Phi^*(\Omega_2^*)=\Omega_1^*$ となる．一方 $\xi_1=\Phi^*(\xi_2)\in V_1$ $(\xi_2\in V_2)$ のとき $d\xi_1=|\det M|(\Phi^*)_*\,d\xi_2$ である．よって $x_1\in\Omega_1$ について

$$\begin{aligned}\chi_{\Omega_2}(\Phi(x_1))&=\int_{\Omega_2}e^{-(\Phi(x_1)|\xi_2)_{V_2}}\,d\xi_2=\int_{\Omega_2}e^{-(x_1|\Phi^*(\xi_2))_{V_1}}\,d\xi_2=\int_{\Omega_1}e^{-(x_1|\xi_1)_{V_1}}|\det M|^{-1}\,d\xi_1\\&=|\det M|^{-1}\chi_{\Omega_1}(x_1)\end{aligned}$$

であるから，$x_2=\Phi(x_1)$ とすると $\chi_{\Omega_1}(\Phi^{-1}(x_2))=|\det M|\,\chi_{\Omega_2}(x_2)$．これと (6) を組み合わせて主張を得る．　$\square$

補題 1 より，正則凸錐 $\Omega\subset V$ の標準測度 $d\mu_\Omega$ は内積のとり方に依らずに定まり，しかも Ω の線型自己同型群 $GL(\Omega):=\{g\in GL(V)\,;\,g\Omega=\Omega\}$ の作用に関して不変であることが分かる．なお 1 次元の錐 $\Omega=\mathbb{R}_{>0}$ については $\chi_\Omega(x)=\frac{1}{x}$ であり，$d\mu_\Omega(x)=\frac{dx}{x}$ である．

§2. 正則凸錐の Rothaus 拡大.

正則凸錐 $\Omega\subset V$ に対し，線型写像 $\phi:V\to\mathrm{Sym}(m,\mathbb{R})$ で

$$x\in\Omega\Rightarrow\phi(x)\in\mathrm{Sym}^+(m,\mathbb{R}) \tag{7}$$

となるものを考える．このとき

$$\widetilde{V}^\phi:=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^m\oplus V,\quad \widetilde{\Omega}^\phi:=\left\{(c,v,x)\in\widetilde{V}^\phi\,;\,x\in\Omega,\ \begin{pmatrix}\phi(x)&v\\ {}^t v&c\end{pmatrix}\in\mathrm{Sym}^+(m+1,\mathbb{R})\right\}$$

と定義すると, $\widetilde{\Omega}^{\phi} \subset \widetilde{V}^{\phi}$ は正則凸錐である. これを錐 Ω の ϕ による Rothaus 拡大とよぶ. さて $x \in \Omega$ のとき (7) より $\phi(x)$ は可逆だから

$$\begin{pmatrix} \phi(x) & v \\ {}^{\mathrm{t}}v & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & \\ {}^{\mathrm{t}}v\phi(x)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(x) & \\ & c - {}^{\mathrm{t}}v\phi(x)^{-1}v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & \phi^{-1}(x)v \\ & 1 \end{pmatrix}$$

となる. よって

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega}^{\phi} &= \left\{ (c,v,x) \in \widetilde{V}^{\phi}\,;\, x \in \Omega,\ c - {}^{\mathrm{t}}v\phi(x)^{-1}v > 0 \right\} \\ &= \{ (c' + {}^{\mathrm{t}}v'\phi(x)v',\ \phi(x)v',\ x)\,;\, x \in \Omega,\ v' \in \mathbb{R}^m,\ c' > 0 \} \end{aligned} \tag{8}$$

を得る.

ベクトル空間 $\widetilde{V}^{\phi}$ の内積を

$$(\tilde{x}|\tilde{\xi})_{\widetilde{V}^{\phi}} := \lambda c + 2{}^{\mathrm{t}}\beta v + (x|\xi)_V \quad (\tilde{x} = (c,v,x),\ \tilde{\xi} = (\lambda,\beta,\xi) \in \widetilde{V}^{\phi})$$

と定義する. この内積に関する $\widetilde{\Omega}^{\phi}$ の双対錐を考えよう. 写像 $q_{\phi} : \mathbb{R}^m \to V$ を

$$(x|q_{\phi}(v))_V = {}^{\mathrm{t}}v\phi(x)v \qquad (v \in \mathbb{R}^m,\ x \in V)$$

となるように定めると, q_{ϕ} は V 値二次形式であり Ω^* に関して正値, すなわち

$$v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \Rightarrow q_{\phi}(v) \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \tag{9}$$

が成り立つ. 逆に (9) を満たす V 値二次形式 q について, $q = q_{\phi}$ となるような線型写像 ϕ で (7) を満たすものが一意的に定まる.

補題 2 (Rothaus [12]). Rothaus 拡大 $\widetilde{\Omega}^{\phi}$ の双対錐は以下のように記述される:

$$(\widetilde{\Omega}^{\phi})^* = \left\{ (\lambda,\beta,\xi) \in \widetilde{V}^{\phi}\,;\, \lambda > 0,\ \xi - \frac{1}{\lambda}q_{\phi}(\beta) \in \Omega^* \right\}.$$

証明. 錐 $\widetilde{\Omega}^{\phi}$ の閉包 $\overline{\widetilde{\Omega}^{\phi}}$ は, (8) より次のように表せる:

$$\overline{\widetilde{\Omega}^{\phi}} = \{ (c' + {}^{\mathrm{t}}v'\phi(x)v',\ \phi(x)v',\ x)\,;\, x \in \overline{\Omega},\ v' \in \mathbb{R}^m,\ c' \geq 0 \}.$$

いま $\tilde{x} = (c' + {}^{\mathrm{t}}v'\phi(x)v',\ \phi(x)v',\ x) \in \overline{\widetilde{\Omega}^{\phi}}$ と $\tilde{\xi} = (\lambda,\beta,\xi) \in \widetilde{V}^{\phi}$ について

$$\begin{aligned} (\tilde{x}|\tilde{\xi})_{\widetilde{V}^{\phi}} &= \lambda(c' + {}^{\mathrm{t}}v'\phi(x)v') + 2{}^{\mathrm{t}}\beta\phi(x)v' + (x|\xi)_V \\ &= \lambda c' + \lambda{}^{\mathrm{t}}\Big(v' + \frac{1}{\lambda}\beta\Big)\phi(x)\Big(v' + \frac{1}{\lambda}\beta\Big) + (x|\xi - \frac{1}{\beta}q_{\phi}(\beta))_V. \end{aligned} \tag{10}$$

この右辺が任意の $c' \geq 0$, $v' \in \mathbb{R}^m$, $x \in \overline{\Omega}$ (ただし $(c',v',x) \neq (0,0,0)$) について正になるには $\lambda > 0$ かつ $\xi - \frac{1}{\lambda}q_{\phi}(\beta) \in \Omega^*$ が必要十分であり, したがって主張は示さ

れた. $\square$

Rothaus [12] は全ての等質錐が 1 次元の錐 $\mathbb{R}_{>0}$ を繰り返し Rothaus 拡大することによって実現されることを示した. 我々は $\widetilde{\Omega}^\phi$ 上の解析を Ω 上の解析に帰着する方法を探究する. このような発想は Gindikin [4, 5] や Vinberg [15] による等質錐の研究に, しばしばみられるものである.

補題 3. Rothaus 拡大 $\widetilde{\Omega}^\phi$ の特性函数は, Ω の特性函数を用いて次のように表される:

$$\chi_{\widetilde{\Omega}^\phi}(\tilde{x}) = (2\pi)^{m/2}\Gamma(1+\frac{m}{2})(c - {}^{\mathrm{t}}v\phi(x)^{-1}v)^{-1-\frac{m}{2}}(\det\phi(x))^{-1/2}\chi_\Omega(x)$$
$$(\tilde{x} = (c, v, x) \in \widetilde{\Omega}^\phi).$$

証明. 補題 2 より

$$(\widetilde{\Omega}^\phi)^* = \{\, (\lambda, \lambda\beta', \xi' + \lambda q_\phi(\beta'))\,;\, \lambda > 0,\ \beta' \in \mathbb{R}^m,\ \xi' \in \Omega^* \,\}.$$

と書け, $\tilde{\xi} = (\lambda, \lambda\beta', \xi' + \lambda q_\phi(\beta')) \in (\widetilde{\Omega}^\phi)^*$ と $\tilde{x} = (c, v, x) \in \widetilde{V}^\phi$ について

$$\begin{aligned}(\tilde{x}|\tilde{\xi})_{\widetilde{V}^\phi} &= \lambda c + 2\lambda{}^{\mathrm{t}}\beta' v + (x|\xi' + \lambda q_\phi(\beta'))_V \\ &= \lambda(c - {}^{\mathrm{t}}v\phi(x)^{-1}v) + \lambda{}^{\mathrm{t}}\Big(\beta' + \phi(x)^{-1}v\Big)\phi(x)\Big(\beta' + \phi(x)^{-1}v\Big) + (x|\xi')\end{aligned}$$

である. さて $\widetilde{V}^\phi$ の内積の定義から $\tilde{\xi} = (\lambda, \beta, \xi)$ のとき $d\tilde{\xi} = 2^{m/2}\, d\lambda d\beta d\xi$ であり, よって $\tilde{\xi} = (\lambda, \lambda\beta',\, \xi' + \lambda q_\phi(\beta'))$ ならば $d\tilde{\xi} = 2^{m/2}\lambda^m\, d\lambda d\beta' d\xi'$ である. これから

$$\begin{aligned}\chi_{\widetilde{\Omega}^\phi}(\tilde{x}) &= \int_{(\widetilde{\Omega}^\phi)^*} e^{-(\tilde{x}|\tilde{\xi})}\, d\tilde{\xi} \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\Omega^*} e^{-\lambda(c - {}^{\mathrm{t}}v\phi(x)^{-1}v)} e^{-\lambda{}^{\mathrm{t}}(\beta'+\phi(x)^{-1}v)\phi(x)(\beta'+\phi(x)^{-1}v)} e^{-(x|\xi')} 2^{m/2}\lambda^m\, d\lambda d\beta' d\xi'.\end{aligned}$$

ここで

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\lambda{}^{\mathrm{t}}(\beta'+\phi(x)^{-1}v)\phi(x)(\beta'+\phi(x)^{-1}v)}\, d\beta' = \pi^{m/2}\lambda^{-m/2}(\det\phi(x))^{-1/2}$$

だから

$$\chi_{\widetilde{\Omega}^\phi}(\tilde{x}) = (2\pi)^{m/2}(\det\phi(x))^{-1/2}\int_0^\infty e^{-\lambda(c - {}^{\mathrm{t}}v\phi(x)^{-1}v)}\lambda^{m/2}\, d\lambda \int_{\Omega^*} e^{-(x|\xi')}\, d\xi'.$$

したがって (4) から主張を得る. $\square$

補題 3 の計算と同様にして, 次が示される.

命題 4. 正則凸錐 Ω 上の函数 f, 双対錐 Ω^* 上の函数 F および定数 A との間に

$$\int_{\Omega^*} e^{-(x|\xi)}F(\xi)\,d\xi = A\chi_\Omega(x)\,f(x)^{-1} \qquad (x\in\Omega)$$

という関係が成り立っているとする. このとき $\alpha\in\mathbb{C}$ に対し

$$f^\phi_\alpha(\tilde{x}) := (c-{}^{\mathrm{t}}v\phi(x)v)^\alpha f(x) \quad (\tilde{x}=(c,v,x)\in\widetilde{\Omega}^\phi), \tag{11}$$

$$F^q_\alpha(\tilde{\xi}) := \lambda^\alpha F\big(\xi-\frac{1}{\lambda}q_\phi(\beta)\big) \quad (\tilde{\xi}=(\lambda,\beta,\xi)\in(\widetilde{\Omega}^\phi)^*) \tag{12}$$

とおくと

$$\int_{(\widetilde{\Omega}^\phi)^*} e^{-(\tilde{x}|\tilde{\xi})}F^q_\alpha(\tilde{\xi})\,d\tilde{\xi} = \frac{A\,\Gamma(\alpha+1+\frac{m}{2})}{\Gamma(1+\frac{m}{2})}\chi_{\widetilde{\Omega}^\phi}(\tilde{x})f^\phi_\alpha(\tilde{x})^{-1}$$
$$(\Re\alpha > -1-\frac{m}{2},\ \tilde{x}\in\widetilde{\Omega}^\phi)$$

が成り立つ.

証明. 補題 3 の証明のように $\tilde{\xi}=(\lambda,\lambda\beta',\,\xi'+\lambda q_\phi(\beta'))$ とすると $F^q_\alpha(\tilde{\xi})=\lambda^\alpha F(\xi')$ であり, 左辺は次のように計算される：

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\Omega^*} e^{-\lambda(c-{}^{\mathrm{t}}v\phi(x)^{-1}v)}e^{-\lambda{}^{\mathrm{t}}(\beta'+\phi(x)^{-1}v)\phi(x)(\beta'+\phi(x)^{-1}v)}e^{-(x|\xi')}\lambda^\alpha F(\xi')2^{m/2}\lambda^m\,d\lambda d\beta' d\xi'$$
$$=(2\pi)^{m/2}(\det\phi(x))^{-1/2}\int_0^\infty e^{-\lambda(c-{}^{\mathrm{t}}v\phi(x)^{-1}v)}\lambda^{\alpha+m/2}\,d\lambda\int_{\Omega^*}e^{-(x|\xi')}F(\xi')\,d\xi'.$$

したがって (4) と補題 3 から主張は従う. □

命題 4 の双対として次の公式が成り立つ.

命題 5. 正則凸錐 Ω 上の函数 f, 双対錐 Ω^* 上の函数 F および 定数 B との間に

$$\int_\Omega e^{-(x|\xi)}f(x)\,d\mu_\Omega(x) = BF(\xi)^{-1} \qquad (\xi\in\Omega^*) \tag{13}$$

という関係が成り立っているとする. このとき (11) と (12) によって定まる f^ϕ_α と F^q_α について

$$\int_{\widetilde{\Omega}^\phi} e^{-(\tilde{x}|\tilde{\xi})}f^\phi_\alpha(\tilde{x})\,d\mu_{\widetilde{\Omega}^\phi}(\tilde{x}) = (2\pi)^m B\Gamma(1+\frac{m}{2})\Gamma(\alpha-\frac{m}{2})\,F^q_\alpha(\tilde{\xi})^{-1}$$
$$(\Re\alpha > \frac{m}{2},\ \tilde{\xi}\in(\widetilde{\Omega}^\phi)^*)$$

が成り立つ.

証明. 元 $\tilde{x}=(c,v,x)\in\widetilde{\Omega}^{\phi}$ について $d\tilde{\xi}=2^{m/2}\,dcdvdx$ であり, 補題 3 から

$$d\mu_{\widetilde{\Omega}^{\phi}}(\tilde{x})=(2\pi)^{m/2}\Gamma(1+\frac{m}{2})(c-{}^{\mathrm{t}}v\phi(x)^{-1}v)^{-1-\frac{m}{2}}(\det\phi(x))^{-1/2}\,2^{m/2}dcdvd\mu_{\Omega}(x).$$

さらに $\tilde{x}=(c'+{}^{\mathrm{t}}v'\phi(x)v',\ \phi(x)v',\ x)$ とすると

$$d\mu_{\widetilde{\Omega}^{\phi}}(\tilde{x})=2^{m}\pi^{m/2}\Gamma(1+\frac{m}{2})(c')^{-1-\frac{m}{2}}(\det\phi(x))^{1/2}\,dcdvd\mu_{\Omega}(x).$$

よって (10) から

$$\begin{aligned}
&\int_{\widetilde{\Omega}^{\phi}}e^{-(\tilde{x}|\tilde{\xi})}f_{\alpha}^{\phi}(\tilde{x})\,d\mu_{\widetilde{\Omega}^{\phi}}(\tilde{x})\\
&=2^{m}\pi^{m/2}\Gamma(1+\frac{m}{2})\int_{0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\Omega}e^{-\lambda c'}e^{\lambda^{\mathrm{t}}(v'+\frac{1}{\lambda}\beta)\phi(x)(v'+\frac{1}{\lambda}\beta)}e^{(x|\xi-\frac{1}{\beta}q_{\phi}(\beta))}\\
&\qquad\qquad\times(c')^{\alpha-m/2-1}f(x)(\det\phi(x))^{1/2}\,dc'dv'd\mu_{\Omega}(x).
\end{aligned}$$

ここで

$$\int_{\mathbb{R}^m}e^{\lambda^{\mathrm{t}}(v'+\frac{1}{\lambda}\beta)\phi(x)(v'+\frac{1}{\lambda}\beta)}\,dv'=\pi^{m/2}\lambda^{-m/2}(\det\phi(x))^{-1/2}$$

だから (4) および (13) より

$$\begin{aligned}
&\int_{\widetilde{\Omega}^{\phi}}e^{-(\tilde{x}|\tilde{\xi})}f_{\alpha}^{\phi}(\tilde{x})\,d\mu_{\widetilde{\Omega}^{\phi}}(\tilde{x})\\
&=(2\pi)^{m}\Gamma(1+\frac{m}{2})\lambda^{-m/2}\int_{\Omega}e^{-\lambda c'}(c')^{\alpha-m/2-1}\,dc'\int_{0}^{\infty}e^{(x|\xi-\frac{1}{\beta}q_{\phi}(\beta))}f(x)\,d\mu_{\Omega}(x)\\
&=(2\pi)^{m}\Gamma(1+\frac{m}{2})\Gamma(\alpha-\frac{m}{2})\,\lambda^{-\alpha}\cdot BF\Big(\xi-\frac{1}{\beta}q_{\phi}(\beta)\Big)^{-1}.
\end{aligned}$$

したがって主張は示された. □

以後 f と F は関係式 (3) をみたす函数の組 $(f_1,\dots,f_r)$ と $(F_1,\dots,F_r)$ をそれぞれ表すものとする. このとき $\widetilde{\Omega}^{\phi}$ 上の正値函数の組 $\tilde{f}=(\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_{r+1})$ と $\widetilde{V}^{\phi}$ 上の斉次多項式の組 $\tilde{F}=(\tilde{F}_1,\dots,\tilde{F}_{r+1})$ を次のように定義する. まず

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_k(\tilde{\xi})&:=(F_k)_{d_k}^{q}(\tilde{\xi})=\lambda_k^{d_k}F_k(\xi-\frac{1}{\lambda}q_{\phi}(\beta))\qquad(k=1,\dots,r),\\
\tilde{F}_{r+1}(\tilde{\xi})&:=\lambda
\end{aligned}$$

とする. ここで d_k は自然数で, $\tilde{F}_k$ が多項式になるように十分大きくとる. たとえば $d_k\geq d_K':=\deg F_k$ ならば $\tilde{F}_k(\tilde{\xi})=\lambda^{d_k-d_k'}F_k(\lambda\xi-q_{\phi}(\beta))$ だから $\tilde{F}_k$ は多項式になる. 多項式 F_k の形によっては, d_k をもっと小さくとることもできる. 一方

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_k(\tilde{x})&:=(f_k)_{d_k}^{\phi}(\tilde{x})=(c-{}^{\mathrm{t}}v\phi(x)^{-1}v)^{d_k}f_k(x)\quad(k=1,\dots,r),\\
\tilde{f}_{r+1}(\tilde{x})&:=c-{}^{\mathrm{t}}v\phi(x)^{-1}v
\end{aligned}$$

と定義する.

定理 6. パラメータ $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{r+1}) \in \mathbb{C}^{r+1}$ について

$$\Gamma_{\tilde{f}}(\underline{\sigma}) := (2\pi)^m \Gamma\Big(\frac{m}{2}+1\Big)\Gamma\Big(\sigma_{r+1} + \sum_{k=1}^{r} d_k\sigma_k - \frac{m}{2}\Big)\Gamma_f(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$$

とおくと,

$$\int_{\widetilde{\Omega}^\phi} e^{-(\tilde{x}|\tilde{\xi})}\tilde{f}^{\underline{\sigma}}(\tilde{x})\, d\mu_{\widetilde{\Omega}^\phi}(\tilde{x}) = \Gamma_{\tilde{f}}(\underline{\sigma})\tilde{F}^{-\underline{\sigma}}(\tilde{\xi}) \tag{14}$$
$$(\xi \in (\widetilde{\Omega}^\phi)^*,\ \Re\sigma_{r+1} > \frac{m}{2},\ \Re\sigma_k > M_k,\ k = 1, \ldots, r)$$

が成り立つ.

証明. 定義から $\underline{\sigma}' := (\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in \mathbb{C}^r$ および $\alpha := \sigma_{r+1} + \sum_{k=1}^r d_k\sigma_k$ とおくと, $\tilde{f}^{\underline{\sigma}} = (f^{\underline{\sigma}'})^\phi_\alpha$ かつ $\tilde{F}^{\underline{\sigma}} = (F^{\underline{\sigma}'})^q_\alpha$ である. したがって命題 5 を適用して主張を得る. □

証明から分かるように, 積分の収束条件の一つである $\Re\sigma_{r+1} > \frac{m}{2}$ は, より弱い $\Re(\sigma_{k+1} + \sum_{k=1}^r d_k\sigma_k) > \frac{m}{2}$ で置き換えられる.

例 1. 線型写像 $\phi : \mathbb{R} \ni x \mapsto xI_m \in \mathrm{Sym}(m, \mathbb{R})$ は 1 次元錐 $\Omega := \mathbb{R}_{>0}$ に関して条件 (7) をみたす. 対応する二次形式は $q_\phi : \mathbb{R} \ni \beta \mapsto \|\beta\|^2 := \sum_{j=1}^m \beta_j^2 \in \mathbb{R}$ である. このとき $\widetilde{V}^\phi = \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^m\oplus\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{m+2}$ であり, $\widetilde{\Omega}^\phi = \Big\{ (c, v, x) \in \widetilde{V}^\phi ;\ x > 0, c - \frac{1}{x}\|v\|^2 > 0 \Big\}$ (これは $(\widetilde{\Omega}^\phi)^*$ と一致) かつ $d\mu_{\widetilde{\Omega}^\phi}(c, v, x) = 2^m\pi^{m/2}\Gamma(\frac{m}{2}+1)(cx - \|v\|^2)^{-\frac{m}{2}-1}\, dcdvdx$. さらに $f_1(x) = x$, $F_1(\xi) = \xi$, $d_1 = 1$ とすると

$$\tilde{f}_1(c, v, x) = cx - \|v\|^2, \quad \tilde{f}_2(c, v, x) = c - \frac{1}{x}\|v\|^2,$$
$$\tilde{F}_1(\lambda, \beta, \xi) = \lambda\xi - \|\beta\|^2, \quad \tilde{F}_2(\lambda, \beta, \xi) = \lambda$$

であり, $\Gamma_{\tilde{f}}(s_1, s_2) = (2\pi)^m\Gamma(\frac{m}{2}+1)\Gamma(s_1)\Gamma(s_1 + s_2 - \frac{m}{2})$. いま

$$n := m+2, \quad c = y_n - y_1, \quad x = y_n + y_1, \quad v_j = y_{j+1}\ (j = 1, \ldots, n)$$
$$\lambda = (\eta_n - \eta_1)/2, \quad \xi = (\eta_n + \eta_1)/2, \quad \beta_j = \eta_{j+1}/2\ (j = 1, \ldots, n)$$

と変数変換すると $(c, v, x) \in \widetilde{\Omega}^\phi \Leftrightarrow y \in \Lambda_n$ であり,

$$\tilde{f}_1(c, v, x) = y_n^2 - y_1^2 - \cdots - y_{n-1}^2, \quad \tilde{f}_2(c, v, x) = \frac{y_n^2 - y_1^2 - \cdots - y_{n-1}^2}{y_n + y_1},$$
$$\tilde{F}_1(\lambda, \beta, \xi) = (\eta_n^2 - \eta_1^2 - \cdots - \eta_{n-1}^2)/4, \quad \tilde{F}_2(\lambda, \beta, \xi) = (\eta_n - \eta_1)/2.$$

これらを (14) に代入して整理すると

$$\int_{\Lambda_n} e^{-{}^t y\eta}(y_n+y_1)^{-s_2}(y_n^2-y_1^2-\cdots-y_{n-1}^2)^{s_1+s_2-n/2}\,dy$$
$$=\Gamma_{\Lambda_n}(s_1,s_2)\,(\eta_n-\eta_1)^{-s_2}(\eta_n^2-\eta_1^2-\cdots-\eta_{n-1}^2)^{-s_1}$$
$$(\Re s_1>0,\ \Re(s_1+s_2)>\frac{n-2}{2},\ \eta\in\Lambda_n),$$

ただし $\Gamma_{\Lambda_n}(s_1,s_2):=\pi^{(n-2)/2}\,2^{2s_1+s_2-1}\Gamma(s_1)\Gamma\Big(s_1+s_2-\dfrac{n-2}{2}\Big)$,

となり, とくに $s_1=\alpha, s_2=0$ を代入して (1) を得る.

例 2. ベクトル空間 $V=\{x\in\mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})\,;\,x_{ij}=0 \text{ if } |i-j|\ge 2\}$ および, その部分空間 $V_k:=\{x\in V\,;\,x_{ij}=0 \text{ if } i>k \text{ or } j>k\})$ $(k=1,\dots,r)$ を考える. 錐 $\Omega_k\subset V_k$ を

$$\Omega_k:=\left\{x\in V_k\,;\,x_{11}>0,\ \begin{vmatrix}x_{\ell-1,\ell-1} & x_{\ell,\ell-1}\\ x_{\ell,\ell-1} & x_{\ell\ell}\end{vmatrix}>0\ (1<\ell\le k)\right\}$$

によって定める. 線型写像 $\phi_k: V_k\ni x\mapsto x_{kk}\in\mathbb{R}=\mathrm{Sym}(1,\mathbb{R})$ は Ω_k に関して (7) を満たし, $\widetilde{\Omega}_k^{\phi_k}$ は自然に Ω_{k+1} と同一視できる. すなわち $\Omega_1\simeq\mathbb{R}_{>0}$ から Rothaus 拡大を繰り返して Ω_k が得られるので, これらは正則凸錐である. しかも $\Omega:=\Omega_r\subset V$ は, 内積 $(x|\xi):=\mathrm{tr}\,x\xi$ に関して $\mathrm{Sym}^+(r,\mathbb{R})\cap V$ の双対錐である ([10]). 補題 3 を繰り返し適用して

$$d\mu_\Omega(x)=\pi^{r-1}\frac{\prod_{\ell=2}^{r-1}x_{\ell\ell}}{\prod_{\ell=2}^{r}\begin{vmatrix}x_{\ell-1,\ell-1} & x_{\ell,\ell-1}\\ x_{\ell,\ell-1} & x_{\ell\ell}\end{vmatrix}^{3/2}}\,dx$$

がわかる. ただし dx は各成分のルベーグ測度の直積を表す. さらに定理 6 を繰り返し適用することで $f=(f_1,\dots,f_r)$ と $F=(F_1,\dots,F_r)$ が次のように得られる:

$$f_k(x):=\prod_{k\le\ell\le r}\Big(x_{\ell\ell}-\frac{x_{\ell,\ell-1}^2}{x_{\ell-1,\ell-1}}\Big)\qquad(k=2,\dots,r),$$
$$f_1(x):=x_{11}f_2(x),$$
$$F_k(\xi):=\det(\xi_{ij})_{k\le i\le r,\,k\le j\le r}\qquad(k=1,\dots,r).$$

このとき

$$\Gamma_f(\underline{s}):=\pi^{3(r-1)/2}\Gamma(s_1)\prod_{k=2}^{r}\Gamma(s_1+\cdots+s_k-\frac{1}{2})$$

とすると条件 $\Re s_1>0$, $\Re(s_1+\cdots+s_k)>1/2$ $(k=2,\dots,r)$ のもとで (3) が成り立ち, とくに $r=4$, $s_1=\alpha$, $s_2=s_3=s_4=0$ を代入すると (5) が得られる.

定理 6 の双対として, 命題 4 から次が従う.

定理 7. 或る有理型函数 $\gamma_F(\underline{s})$ と正数 N_k $(k=1,\dots,r)$ について

$$\int_{\Omega^*} e^{-(x|\xi)} F^{\underline{s}}(\xi)\, d\xi = \gamma_F(\underline{s})\chi_\Omega(x) f^{-\underline{s}}(x) \qquad (x\in\Omega,\ \Re s_k > N_k,\ k=1,\dots,r)$$

が成り立つならば

$$\int_{(\widetilde{\Omega}^\phi)^*} e^{-(\tilde{x}|\tilde{\xi})} \tilde{F}^{\underline{\sigma}}(\tilde{\xi})\, d\tilde{\xi} = \gamma_{\tilde{F}}(\underline{\sigma})\chi_{\widetilde{\Omega}^\phi}(\tilde{x}) \tilde{f}^{-\underline{\sigma}}(\tilde{x})$$

$$(\tilde{x}\in\widetilde{\Omega}^\phi,\ \Re\sigma_{r+1}>0,\ \Re\sigma_k > N_k,\ k=1,\dots,r),$$

$$\text{ただし } \gamma_{\tilde{F}}(\underline{\sigma}) := \frac{\Gamma(\sigma_{r+1}+\sum_{k=1}^r d_k\sigma_k + 1 + \frac{m}{2})\gamma_F(\sigma_1,\dots,\sigma_r)}{\Gamma(1+\frac{m}{2})},$$

が成り立つ.

§3. Riesz 超函数.

関係式 (3) のもとで $\Re s_k > M_k$ $(k=1,\dots,r)$ となるパラメータ $\underline{s}\in\mathbb{C}^r$ に対し, ベクトル空間 V 上の緩増加超函数 $\mathcal{R}_{f,\underline{s}}\in\mathcal{S}'(V)$ を

$$\langle \mathcal{R}_{f,\underline{s}}, \varphi\rangle := \frac{1}{\Gamma_f(\underline{s})}\int_\Omega \varphi(x) f^{\underline{s}}(x)\, d\mu_\Omega(x) \qquad (\varphi\in\mathcal{S}(V)) \tag{15}$$

と定義する.

定理 8. パラメータ $\underline{s}$ の正則函数として $\langle\mathcal{R}_{f,\underline{s}},\varphi\rangle$ は $\mathbb{C}^r$ 全体に解析接続される. この意味で $\mathcal{R}_{f,\underline{s}}\in\mathcal{S}'(V)$ は全ての $\underline{s}\in\mathbb{C}^r$ について定義され, 次が成り立つ:
(i) 任意の $\underline{s}\in\mathbb{C}^r$ と $\xi\in\Omega^*$ について $\langle\mathcal{R}_{f,\underline{s}}, e^{-(x|\xi)}\rangle_x = F^{-us}(\xi)$. 正確には, 左辺は Ω の閉包上で $e^{-(x|\xi)}$ と等しいような急減少函数を代入したものと考える.
(ii) 任意の $\underline{s},\underline{s}'\in\mathbb{C}^r$ について $\mathcal{R}_{f,\underline{s}} * \mathcal{R}_{f,\underline{s}'} = \mathcal{R}_{f,\underline{s}+\underline{s}'}$.
(iii) $\mathcal{R}_{f,(0,\dots,0)} = \delta$ (Dirac の δ 超函数).
(iv) 非負整数の組 $\underline{m}\in\mathbb{Z}^r_{\ge 0}$ について $F^{\underline{m}}(\frac{\partial}{\partial x})\mathcal{R}_{f,\underline{m}} = \delta$. ただし $F^{\underline{m}}(\frac{\partial}{\partial x})$ は $F^{\underline{m}}(\frac{\partial}{\partial x})e^{(x|\xi)} = F(\xi)$ $(\forall\xi\in V)$ で特徴付けられる微分作用素である.
(v) もし $\operatorname{supp}\varphi\subset V\setminus\partial\Omega$ ならば, 全ての $\underline{s}\in\mathbb{C}^r$ について $\langle\mathcal{R}_{f,\underline{s}},\varphi\rangle = \frac{1}{\Gamma_f(\underline{s})}\int_\Omega \varphi(x) f^{\underline{s}}(x)\, d\mu_\Omega(x)$ が成り立つ.
(vi) 任意の $\underline{s}\in\mathbb{C}^r$ について $\operatorname{supp}\mathcal{R}_{f,\underline{s}}$ は Ω の閉包 $\overline{\Omega}$ に含まれる.
(vii) $\operatorname{supp}\mathcal{R}_{f,\underline{s}}$ が境界 $\partial\Omega$ に含まれる必要十分条件は $\frac{1}{\Gamma_f(\underline{s})}=0$.

証明. パラメータ $\underline{s}$ が $\Re s_k > M_k$ $(k=1,\dots,r)$ を満たす範囲では, (3) から $\langle\mathcal{R}_{f,\underline{s}}, e^{-(x|\xi)}\rangle_x = F^{-\underline{s}}(\xi)$ $(\xi\in\Omega^*)$ が成り立つ. よってラプラス変換の一意性から, 任意の $\underline{m}\in\mathbb{Z}^r_{\ge 0}$ について $F^{\underline{m}}(\frac{\partial}{\partial x})\mathcal{R}_{f,\underline{s}+\underline{m}} = \mathcal{R}_{f,\underline{s}}$ が成り立つ. すなわち

$$\langle F^{\underline{m}}(\frac{\partial}{\partial x})\mathcal{R}_{f,\underline{s}+\underline{m}},\varphi\rangle = \langle\mathcal{R}_{f,\underline{s}},\varphi\rangle$$

であるが, 左辺は $\Re s_k > M_k - m_k$ $(k = 1, \dots, r)$ の範囲で定義でき, $\underline{s}$ の函数として正則である. 非負整数 m_k は任意にとれるから, $\mathcal{R}_{f,\underline{s}}$ は $\underline{s} \in \mathbb{C}^r$ 全体に解析接続される.

解析接続の一意性から (i) が (全ての $\underline{s} \in \mathbb{C}^r$ に対して) 成り立ち, (ii), (iii), (iv) はラプラス変換の一意性から従う. もし $\operatorname{supp}\varphi \subset V \setminus \partial\Omega$ ならば, 全ての $\underline{s} \in \mathbb{C}^r$ について, 積分 $\int_\Omega \varphi(x) f^{\underline{s}}(x)\, d\mu_\Omega(x)$ が収束して $\underline{s}$ の正則函数を定めるので, (v) が成り立つ. さらに (vi), (vii) は (v) から従う. □

このようにして得られた $\mathcal{R}_{f,\underline{s}} \in \mathcal{S}'(V)$ $(\underline{s} \in \mathbb{C}^r)$ を Riesz 超函数とよぶ. 定理 8 の系として次が得られる.

系 9. 非負整数の組 $\underline{m} \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ について $F^{\underline{m}}(\frac{\partial}{\partial x})$ の基本解 $\mathcal{R}_{f,\underline{m}}$ の台が $\partial\Omega$ に含まれる (すなわちホイヘンスの原理が成り立つ) 必要十分条件は $\frac{1}{\Gamma_f(\underline{m})} = 0$ である.

References

[1] J. J. Duistermaat, *M. Riesz's families of operators*, Nieuw Arch. Wisk. **9** (1991), 93–101.

[2] J. Faraut and A. Korányi, "Analysis on symmetric cones," Clarendon Press, Oxford, 1994.

[3] L. Gårding, *The solution of Cauchy's problem for two totally hyperbolic linear differential equations by means of Riesz integrals*, Ann. of Math. **48** (1947), 785–826.

[4] S. G. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys **19** (1964), 1–89.

[5] —, "Tube domains and the Cauchy problem," Transl. Math. Monogr. **11**, Amer. Math. Soc., 1992.

[6] A. E. Ingham, *An integral which occurs in statistics*, Proc. Cambr. Philos. Soc. **29** (1933), 271–276.

[7] H. Ishi, *Positive Riesz distributions on homogeneous cones*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 161–186.

[8] —, *Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications*, J. Lie Theory **11** (2001), 155–171.

[9] M. Köcher, "Jordan algebras and their applications", Lecture notes, Univ. Minnesota, Minneapolis, 1962.

[10] G. Letac and H. Massam, *Wishart distributions for decomposable graphs*, The Annals of Statistics **35** (2007), 1278–1323.

[11] M. Riesz, *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, Acta Math. **81** (1949), 1–223.

[12] O. S. Rothaus, *The construction of homogeneous convex cones*, Ann. of Math. **83** , 358–376, Correction: ibid **87** (1968), 399.

[13] A. Roverato, *Cholesky decomposition of a hyper inverse Wishart matrix*, Biometrika **87** (2000), 99–112.

[14] G. L. Siegel, *Über die analytische tehorie der quadratische Formen*, Ann. of Math. **36** (1935), 527–606.

[15] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc. **12** (1963), 340–403.

[16] J. Wishart, *The generalized product monent distribution in samples from a normal multivariate population*, Biometrika **20A** (1928), 32–52.