数理解析研究所講究録
第 1977 巻 2015 年 1-8

カレント代数のフュージョン積と Schur 正値性

東京農工大学工学研究院　直井　克之 (Katsuyuki Naoi)
Institute of Engineering,
Tokyo University of Agriculture and Technology

概要

本稿では著者の論文 "Fusion products and Schur positivity" [Nao15] について，その結果および証明の概略を紹介する。

1 Motivation

本稿では基礎体を複素数体 $\mathbb{C}$ とする。最初に，本研究の motivation について簡単に紹介する。まずは最も簡単な $\mathfrak{sl}_2$ の場合を考えよう。$V(\ell)$ $(\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ で $(\ell+1)$ 次元単純 $\mathfrak{sl}_2$ 加群を表すことにする。以下は，古典的な Clebsch-Gordan の定理である。

$$V(\ell) \otimes V(m) \cong V(\ell+m) \oplus V(\ell+m-2) \oplus \cdots \oplus V(|\ell-m|).$$

このことから以下の事実が従う。

命題 1.1. (i) 二つの非負整数の組 $(\ell_1, \ell_2), (r_1, r_2)$ が $\ell_1+\ell_2 = r_1+r_2$, $|\ell_1-\ell_2| \leq |r_1-r_2|$ を満たすとき，$\mathfrak{sl}_2$ 加群の間の全射準同型 $V(\ell_1) \otimes V(\ell_2) \twoheadrightarrow V(r_1) \otimes V(r_2)$ が存在する。
(ii) ℓ を正の整数とし，$\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \ldots, \ell_p)$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_p)$ をともに ℓ の分割とする。このとき dominance order に関して $\boldsymbol{\ell} \leq \boldsymbol{r}$ ならば，$\mathfrak{sl}_2$ 加群の間の全射準同型

$$V(\ell_1) \otimes \cdots \otimes V(\ell_p) \twoheadrightarrow V(r_1) \otimes \cdots \otimes V(r_p)$$

が存在する。

(i) は Clebsch-Gordan の定理の帰結である。(ii) は

$$(\ldots, \ell_k, \ell_{k+1}, \ldots) < (\ldots, \ell_k+1, \ell_{k+1}-1, \ldots)$$

が, size が同じ分割の集合上の dominance order の cover relation であることと (i) から容易に従う。指標の言葉を用いて, (ii) の結論を「$\mathrm{ch}\left(V(\ell_1)\otimes\cdots\otimes V(\ell_p)\right)-\mathrm{ch}\left(V(r_1)\otimes\cdots\otimes V(r_p)\right)$ は単純加群の指標の非負整数一次結合で表せる」と述べることもできる。よく知られているように単純 $\mathfrak{sl}_{n+1}$ 加群の指標は Schur 多項式と同一視できる。そのためこのことを,「$\mathrm{ch}\left(V(\ell_1)\otimes\cdots\otimes V(\ell_p)\right)-\mathrm{ch}\left(V(r_1)\otimes\cdots\otimes V(r_p)\right)$ は **Schur 正値性を持つ**」ともいう。

以上は $\mathfrak{sl}_2$ の場合の話であるのでほとんど自明であるが, より高いランクの単純 Lie 代数に対しても同様の現象を見つけることは興味深い問題であろうと思われる。実際このような研究はこれまでにも盛んに行われている (e.g., [DP07, LPP07, FH14, CFS14])。本稿ではこれらの結果について網羅的に紹介することはせず, 以下の命題 1.1 の自然な拡張である以下の命題を紹介するにとどめることにする。

命題 1.2 ([CFS14, Theorem 1 (ii)] の特別な場合). $n\geq 1$ とする。α を $\mathfrak{sl}_{n+1}$ の単純ルートとし, 対応する基本ウェイトを ϖ_α と表す。また ℓ を正の整数, $\boldsymbol{\ell}=(\ell_1,\ldots,\ell_p)$, $\boldsymbol{r}=(r_1,\ldots,r_p)$ をともに ℓ の分割とし, dominance order に関して $\boldsymbol{\ell}\leq\boldsymbol{r}$ と仮定する。このとき, $\mathfrak{sl}_{n+1}$ 加群の全射準同型

$$V(\ell_1\varpi_\alpha)\otimes\cdots\otimes V(\ell_p\varpi_\alpha)\twoheadrightarrow V(r_1\varpi_\alpha)\otimes\cdots\otimes V(r_p\varpi_\alpha)$$

が存在する。ただし, $V(\lambda)$ は最高ウェイト λ の単純 $\mathfrak{sl}_{n+1}$ 加群を表す。

上の命題において, 全射準同型の一意性は (スカラー倍を除いても) 成り立たないことに御注意いただきたい。実際 $\mathfrak{sl}_2$ の場合を考えてもわかるように, 全射準同型 $V(\ell_1\varpi_\alpha)\otimes\cdots\otimes V(\ell_p\varpi_\alpha)\twoheadrightarrow V(r_1\varpi_\alpha)\otimes\cdots\otimes V(r_p\varpi_\alpha)$ の選び方にはかなりの任意性がある。それでは, この全射準同型の "canonical な"構成法はないであろうか？この疑問にある種の解答を与えた, というのが本稿で紹介する [Nao15] の主結果 (の系) である。

2 フュージョン積

まず記号を準備しておく。P_+ を $\mathfrak{sl}_{n+1}$ の支配的整ウェイトの集合とし, $V(\lambda)$ $(\lambda\in P_+)$ で最高ウェイト λ の単純 $\mathfrak{sl}_{n+1}$ 加群を表す。$\mathfrak{sl}_{n+1}[t]=\mathfrak{sl}_{n+1}\otimes\mathbb{C}[t]$ には, $[x\otimes f(t),y\otimes g(t)]=[x,y]\otimes f(t)g(t)$ として, Lie 代数の構造が自然に定まる。これを**カレント代数**と呼ぶ。$\mathfrak{sl}_{n+1}\cong\mathfrak{sl}_{n+1}\otimes 1\subseteq\mathfrak{sl}_{n+1}[t]$ により, $\mathfrak{sl}_{n+1}$ を $\mathfrak{sl}_{n+1}[t]$ の部分 Lie 代数とみなす。

$t=0$ における evaluation 写像

$$\mathfrak{sl}_{n+1}[t] \to \mathfrak{sl}_{n+1} \colon x \otimes f(t) \mapsto f(0)x$$

に関する引き戻しを考えることで, $V(\lambda)$ を $\mathfrak{sl}_{n+1}[t]$ 加群とみなすことができる。記号の乱用により, この $\mathfrak{sl}_{n+1}[t]$ 加群もやはり $V(\lambda)$ と表すことにする。

以下本節では主結果を述べるために必要な, Feigin と Loktev により [FL99] において導入されたフュージョン積について紹介する。P_+ の元の列 $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ が与えられたとする。このとき相異なる複素数の列 $c_1, \dots, c_p$ をとり, $\mathfrak{sl}_{n+1}[t]$ 加群

$$V(\lambda_1)_{c_1} \otimes \cdots \otimes V(\lambda_p)_{c_p} \tag{2.1}$$

を考える。ただし $V(\lambda)_c$ は, $V(\lambda)$ を自己同型

$$\mathfrak{sl}_{n+1}[t] \to \mathfrak{sl}_{n+1}[t] \colon x \otimes f(t) \mapsto x \otimes f(t+c)$$

に関して引き戻して得られる $\mathfrak{sl}_{n+1}[t]$ 加群を表す。各 $V(\lambda_j)_{c_j}$ の最高ウェイトベクトルを v_j と表すと, (2.1) は $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$ から生成される一元生成 $\mathfrak{sl}_{n+1}[t]$ 加群となることが知られている。よってこの加群上にフィルター $F^s = F^s\big(V(\lambda_1)_{c_1} \otimes \cdots \otimes V(\lambda_p)_{c_p}\big)$ を

$$F^s := U(\mathfrak{sl}_{n+1}[t])^{\leq s}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)$$

と定めると, 十分大きい N に対し $F^N = V(\lambda_1)_{c_1} \otimes \cdots \otimes V(\lambda_p)_{c_p}$ が成り立つ。ただし $U(\mathfrak{sl}_{n+1}[t])^{\leq s}$ は（$\mathbb{C}[t]$ の次数から自然に与えられる $U(\mathfrak{sl}_{n+1}[t])$ の次数に関して）次数 s 以下の部分空間を表す。

定義 2.1. 上で述べたフィルターから得られる $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graded $\mathfrak{sl}_{n+1}[t]$ 加群

$$\mathrm{gr}_F(V(\lambda_1)_{c_1} \otimes \cdots \otimes V(\lambda_p)_{c_p}) := \bigoplus_{s \geq 0} F^s/F^{s-1}$$

を $V(\lambda_1) * \cdots * V(\lambda_p)$ と表し、**フュージョン積**と呼ぶ。

フュージョン積の定義はパラメータ $c_1, \dots, c_p$ に依っているが、記号の簡略化のためこれを省略した。本稿に現れるフュージョン積は、全て同型を除いてパラメータに依らないことが知られている。

以下の補題は定義から容易に従うが, 一方で重要である。

補題 2.2. (i) $V(\lambda_1) * \cdots * V(\lambda_p)$ は $v_1 * \cdots * v_p$ で生成される。ただし $v_1 * \cdots * v_p$ は，$v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \in F^0\big(V(\lambda_1)_{c_1} \otimes \cdots \otimes V(\lambda_p)_{c_p}\big)$ の自然な射

$$F^0\big(V(\lambda_1)_{c_1} \otimes \cdots \otimes V(\lambda_p)_{c_p}\big) \hookrightarrow V(\lambda_1) * \cdots * V(\lambda_p)$$

における像を表す。
(ii) $\mathfrak{sl}_{n+1}$ 加群として，

$$V(\lambda_1) * \cdots * V(\lambda_p) \cong V(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes V(\lambda_p)$$

が成り立つ。

3 主結果

$I = \{1, \ldots, n\}$ で $\mathfrak{sl}_{n+1}$ の添え字集合を表し，ϖ_i $(i \in I)$ を対応する基本ウェイトとする。また $\mathfrak{sl}_{n+1}$ の三角分解 $\mathfrak{sl}_{n+1} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ を一つ固定し，Δ_+ で $\mathfrak{sl}_{n+1}$ の正ルートの集合を表す。各 $\alpha \in \Delta_+$ に対し h_α でコルートを表し，α, $-\alpha$ に関するルートベクトル e_α, f_α を，$[e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha$ を満たすように選ぶ。以下が [Nao15] の主定理である。

定理 3.1. $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1 \geq \ldots \geq \ell_p)$ を分割とし，$m \in I$ とする。また $1 \leq k$ に対し $L_k = \sum_{j=k}^{p} \ell_j$ とおく。このとき $V(\ell_1\varpi_m) * \cdots * V(\ell_p\varpi_m)$ は，ベクトル v から以下の関係式で生成される $\mathfrak{sl}_{n+1}[t]$ 加群と同型である。

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n}_+[t]v = 0, \quad (h \otimes t^s)v = \delta_{s0}L_1\langle h, \varpi_m\rangle v \ \ \text{for } h \in \mathfrak{h},\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 0},& \\
(f_\alpha \otimes \mathbb{C}[t])v = 0 \ \ \text{for } \alpha \in \Delta_+ \text{ s.t. } \langle h_\alpha, \varpi_m\rangle = 0,& \\
f_\alpha^{L_1+1}v = 0 \ \ \text{for } \alpha \in \Delta_+ \text{ s.t. } \langle h_\alpha, \varpi_m\rangle = 1,& \\
(e_\alpha \otimes t)^s f_\alpha^{r+s} v = 0 \ \ \text{for } \alpha \in \Delta_+, r, s \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ s.t. } \langle h_\alpha, \varpi_m\rangle = 1,& \\
r + s \geq 1 + kr + L_{k+1} \text{ for some } k \in \mathbb{Z}_{>0}.&
\end{aligned}$$

この定理から以下が即座に従う。

系 3.2. $m \in I$, ℓ を正の整数, $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \ldots, \ell_p)$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_p)$ をともに ℓ の分割とし，dominance order に関して $\boldsymbol{\ell} \leq \boldsymbol{r}$ と仮定する。このとき，$\mathfrak{sl}_{n+1}[t]$ 加群の全射準同型

$$V(\ell_1\varpi_m) * \cdots * V(\ell_p\varpi_m) \twoheadrightarrow V(r_1\varpi_m) * \cdots * V(r_p\varpi_m)$$

が存在する。

補題 2.2 (i) より, この全射はスカラー倍を除いて一意であることが分かる。一方で同じ補題の (ii) より, この全射は $\mathfrak{sl}_{n+1}$ 加群の全射

$$V(\ell_1\varpi_m)\otimes\cdots\otimes V(\ell_p\varpi_m)\twoheadrightarrow V(r_1\varpi_m)\otimes\cdots\otimes V(r_p\varpi_m)$$

を与える。よって上の系は, 第 1 節で述べた問題に 1 つの解答を与えている。

4 証明の概略

本節では定理 3.1 の証明について, その概略を紹介する。そのために, 以下証明に必要な二つの補題について述べることにする。

まず一つ目の補題を述べるために, いくつか記号を準備する（やや煩雑であるがご容赦いただきたい)。

$$\widehat{\mathfrak{sl}_{n+1}}=\mathfrak{sl}_{n+1}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}K\oplus\mathbb{C}d$$

を $\mathfrak{sl}_{n+1}$ に付随するアフィン Lie 代数とする。ただし K は標準的中心元, d は次数作用素を表す。$\mathfrak{sl}_{n+1}\cong\mathfrak{sl}_{n+1}\otimes 1\subseteq\widehat{\mathfrak{sl}_{n+1}}$ により, $\mathfrak{sl}_{n+1}$ を $\widehat{\mathfrak{sl}_{n+1}}$ の部分 Lie 代数とみなす。

$$\mathfrak{b}=\mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{h},\quad \widehat{\mathfrak{b}}=\mathbb{C}K\oplus\mathbb{C}d\oplus\mathfrak{b}\oplus t\mathfrak{sl}_{n+1}[t]$$

を, それぞれ $\mathfrak{sl}_{n+1}$, $\widehat{\mathfrak{sl}_{n+1}}$ の Borel 部分代数とする（$t\mathfrak{sl}_{n+1}[t]=\mathfrak{sl}_{n+1}\otimes t\mathbb{C}[t]$ である)。$\widehat{I}=I\cup\{0\}$ とおく。$\widehat{P}$ を $\widehat{\mathfrak{sl}_{n+1}}$ のウェイト格子, $\widehat{P_+}\subseteq\widehat{P}$ を支配的整ウェイトの集合, $\Lambda_i\in\widehat{P}_+$ $(i\in\widehat{I})$ を基本ウェイト, $\widehat{V}(\Lambda)$ を最高ウェイト $\Lambda\in\widehat{P}_+$ の単純最高ウェイト $\widehat{\mathfrak{sl}_{n+1}}$ 加群, $v_\Lambda\in\widehat{V}(\Lambda)$ をその最高ウェイトベクトルとする。W を $\mathfrak{sl}_{n+1}$ の Weyl 群（すなわち $(n+1)$ 次対称群）, $\widehat{W}$ を $\widehat{\mathfrak{sl}_{n+1}}$ の Weyl 群（アフィン Weyl 群）とする。W を自然に $\widehat{W}$ の部分群とみなし, s_i $(i\in\widehat{I})$ で単純鏡映を表す。また**拡大アフィン Weyl 群** $\widetilde{W}$ を

$$\widetilde{W}=W\ltimes P$$

と定義する（[Bou02] を参照)。ただし半直積は $w\in W$, $\lambda\in P$ に対し $w\lambda w^{-1}=w(\lambda)$ により定める。このとき $\Gamma\cong\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ を $\widehat{\mathfrak{sl}_{n+1}}$ の Dynkin 図形を回転させる Dynkin 自己同型のなす群とすると,

$$\widetilde{W}\cong\widehat{W}\rtimes\Gamma$$

という同型が成り立つ。ただし, 半直積は $i\in\widehat{I}$, $\tau\in\Gamma$ に対し $\tau s_i\tau^{-1}=s_{\tau(i)}$ により定める。

一つ目の補題は, フュージョン積 $V(\ell_1\varpi_m)*\cdots*V(\ell_p\varpi_m)$ とある $\widehat{\mathfrak{sl}_{n+1}}$ 加群の部分 $\widehat{\mathfrak{b}}$ 加群との, ($\mathfrak{b}\oplus t\mathfrak{sl}_{n+1}[t]$ 加群としての) 同型を主張するものである。以下この部分 $\widehat{\mathfrak{b}}$ 加群の構成について述べる。L を $\widehat{\mathfrak{sl}_{n+1}}$ 加群 $\widehat{V}(\Lambda^1)\otimes\cdots\otimes\widehat{V}(\Lambda^p)$ ($p\in\mathbb{Z}_{>0}$, $\Lambda^j\in\widehat{P}^+$) のある部分 $\widehat{\mathfrak{b}}$ 加群とする。$i\in\widehat{I}$ に対し,

$$F_iL=\sum_{N\geq 0}f_i^NL\subseteq V$$

により新たな部分 $\widehat{\mathfrak{b}}$ 加群 F_iL を定義する (ただし $f_0=e_\theta\otimes t^{-1}$, $\theta\in\Delta_+$ は最高ルート)。各 $\tau\in\Gamma$ に対し, (ベクトル空間としての) 同型写像

$$\widehat{V}(\Lambda^1)\otimes\cdots\otimes\widehat{V}(\Lambda^p)\xrightarrow{\sim}\widehat{V}(\tau\Lambda^1)\otimes\cdots\otimes\widehat{V}(\tau\Lambda^p)$$

で, ウェイト $\lambda\in\widehat{P}$ のウェイト空間をウェイト $\tau(\lambda)\in\widehat{P}$ のウェイト空間へと写すものが自然に定義される。そこで $F_\tau L\subseteq\widehat{V}(\tau\Lambda^1)\otimes\cdots\otimes\widehat{V}(\tau\Lambda^p)$ でこの同型写像に関する L の像を表す。最後に, 各 $w\tau\in\widetilde{W}=\widehat{W}\rtimes\Gamma$ に対し, 最短表示 $w=s_{i_l}\cdots s_{i_1}$ を一つ固定し, 部分 $\widehat{\mathfrak{b}}$ 加群 $F_{w\tau}L$ を

$$F_{w\tau}L=F_{i_l}\cdots F_{i_1}F_\tau L$$

と定める。以上の準備の末, 一つ目の補題が以下のように述べられる。

補題 4.1 ([Nao12, Theorem 6.1] の特別な場合). 定理 3.1 の記号の下で, $\mathfrak{b}\oplus t\mathfrak{sl}_{n+1}[t]$ 加群としての同型

$$\begin{aligned}V(\ell_1\varpi_m)*\cdots*V(\ell_p\varpi_m)\cong F_{-\varpi_m}\Big(&\mathbb{C}v_{(\ell_1-\ell_2)\Lambda_0}\otimes F_{-\varpi_m}\Big(\mathbb{C}v_{(\ell_2-\ell_3)\Lambda_0}\otimes\\&\cdots\otimes F_{-\varpi_m}\Big(\mathbb{C}v_{(\ell_{p-1}-\ell_p)\Lambda_0}\otimes F_{-\varpi_m}\mathbb{C}v_{\ell_p\Lambda_0}\Big)\cdots\Big)\Big)\end{aligned}$$

が存在する。

二つ目の補題は, $\widehat{\mathfrak{b}}$ 加群 L の生成元の annihilator から F_iL の生成元の annihilator を与えるものである。$i\in\widehat{I}$ に対し, $\widehat{\mathfrak{n}}_i$ を

$$\widehat{\mathfrak{n}}_i=\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+\setminus\{\alpha_i\}}\mathbb{C}e_\alpha\oplus t\mathfrak{sl}_{n+1}[t]\ \ (i\in I),\quad \widehat{\mathfrak{n}}_0=\mathfrak{n}_+[t]\oplus t\mathfrak{h}[t]\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+\setminus\{\theta\}}\mathbb{C}(f_\alpha\otimes t)\oplus t^2\mathfrak{n}_-[t]$$

と定める。

補題 4.2 ([Nao13, Lemma 5.3], ただし本質的な部分は [Jos85]). V を可積分 $\widehat{\mathfrak{sl}_{n+1}}$ 加群, $L\subseteq V$ を有限次元部分 $\widehat{\mathfrak{b}}$ 加群とし, $i\in\widehat{I}$ と $\xi\in\widehat{P}$ を $\langle h_i,\xi\rangle\geq 0$ を満たす元とする。さら

に以下が成り立つと仮定する。

(i) L はウェイト ξ のベクトル $v \in T$ で生成され, また v は $e_i v = 0$ を満たす（ただし $e_0 = f_\theta \otimes t$)。

(ii) $\mathrm{ad}(e_i)$ 不変な左 $U(\widehat{\mathfrak{n}}_i)$-ideal $\mathcal{I}$ で

$$\mathrm{Ann}_{U(\widehat{\mathfrak{n}}_+)} v = U(\widehat{\mathfrak{n}}_+) e_i + U(\widehat{\mathfrak{n}}_+)\mathcal{I}$$

を満たすものが存在する。

(iii) $\mathrm{ch}\, F_i L = \mathcal{D}_i \mathrm{ch}\, L$ が成り立つ。ただし $\mathcal{D}_i$ は,

$$\mathcal{D}_i(f) = \frac{f - e^{-\alpha_i} s_i(f)}{1 - e^{-\alpha_i}}.$$

により定義される $\mathbb{Z}[\widehat{P}]$ 上の作用素である（**Demazure** 作用素と呼ばれる)。

このとき $v' = f_i^{\langle h_i, \xi \rangle} v$ とおくと $F_i L$ は v' で生成され,

$$\mathrm{Ann}_{U(\widehat{\mathfrak{n}}_+)} v' = U(\widehat{\mathfrak{n}}_+) e_i^{\langle h_i, \xi \rangle + 1} + U(\widehat{\mathfrak{n}}_+) \mathcal{S}_i(\mathcal{I})$$

が成り立つ。ただし $\mathcal{S}_i$ は単純鏡映 s_i に対応する $U(\widehat{\mathfrak{sl}_{n+1}})$ の自己同型を表す。

これら二つの補題を見ると, 定理 3.1 の証明の方針はおのずと想像がつくであろうと思われる。すなわち補題 4.1 により, 定理の証明は本質的に $\widehat{\mathfrak{b}}$ 加群

$$F_{-\varpi_m}\Big(\mathbb{C}v_{(\ell_1-\ell_2)\Lambda_0} \otimes F_{-\varpi_m}\Big(\mathbb{C}v_{(\ell_2-\ell_3)\Lambda_0} \otimes \cdots \otimes F_{-\varpi_m}\Big(\mathbb{C}v_{(\ell_{p-1}-\ell_p)\Lambda_0} \otimes F_{-\varpi_m} \mathbb{C}v_{\ell_p\Lambda_0}\Big) \cdots\Big)\Big)$$

の生成元の annihilator を決定することに帰着できる。そしてこの annihilator を, 補題 4.2 を用いることで帰納的に決定するのである。ただし当然のことながら, 帰納法を進めるためには各段階で annihilator が補題 4.2 の仮定を満たすことを示す必要がある。実際にはここが [Nao15] において本質的な部分であるのだが, 証明は技術的なものであり, 本稿では割愛することにする。

謝辞

研究集会「表現論および関連する調和解析と微分方程式」において講演の機会を与えてくださった竹村先生に, この場を借りて御礼申し上げます。

参考文献

[Bou02] N. Bourbaki. *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4–6.* Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 2002. Translated from the 1968 French original by Andrew Pressley.

[CFS14] V. Chari, G. Fourier, and D. Sagaki. Posets, tensor products and Schur positivity. *Algebra Number Theory*, 8(4):933–961, 2014.

[DP07] G. Dobrovolska and P. Pylyavskyy. On products of $\mathfrak{sl}_n$ characters and support containment. *J. Algebra*, 316(2):706–714, 2007.

[FH14] G. Fourier and D. Hernandez. Schur positivity and Kirillov-Reshetikhin modules. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 10:Paper 058, 9, 2014.

[FL99] B. Feigin and S. Loktev. On generalized Kostka polynomials and the quantum Verlinde rule. In *Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications*, volume 194 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 61–79. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[Jos85] A. Joseph. On the Demazure character formula. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 18(3):389–419, 1985.

[LPP07] T. Lam, A. Postnikov, and P. Pylyavskyy. Schur positivity and Schur log-concavity. *Amer. J. Math.*, 129(6):1611–1622, 2007.

[Nao12] K. Naoi. Fusion products of Kirillov–Reshetikhin modules and the $X = M$ conjecture. *Adv. Math.*, 231(3-4):1546–1571, 2012.

[Nao13] K. Naoi. Demazure modules and graded limits of minimal affinizations. *Represent. Theory*, 17:524–556, 2013.

[Nao15] K. Naoi. Fusion products and Schur positivity. to appear in *Toyama Math. J.*, 37, 2015. arXiv:1504.00109.