Title	3D-GRAPESを用いた関数の極限の指導について (数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究)
Author(s)	高木, 和久; 八木, 潤
Citation	数理解析研究所講究録 (2015), 1978: 190-193
Issue Date	2015-12
URL	http://hdl.handle.net/2433/224401
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第1978巻 2015年 190-193

3D-GRAPESを用いた関数の極限の指導について

高知工業高等専門学校・総合科学科　高木 和久 (Kazuhisa Takagi)
National Institute of Technology, Kochi College
高知工業高等専門学校・総合科学科　八木 潤 (Jun Yagi)
National Institute of Technology, Kochi College

1　はじめに

GRAPES は大阪教育大学付属高校の友田勝久氏が作成した，関数のグラフを描画するフリーソフトで 3D − GRAPES はその 3 次元版である．本校ではこのソフトウェアを用いて色々な数学の教材を作成し，授業において使用している．本研究発表では $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ を満たす 2 つの関数の比 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ として表される関数の $x \to 0$ のときの極限値を，3D − GRAPES を用いて視覚的に指導した実践例について報告する．

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ や $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ は微分積分において基本的な極限であり，この値を問う問題は 2013 年の大阪大の入試や 2015 年の高等専門学校学習到達度試験にも出題された．しかし，第 3 学年の学生 128 名に対しこの極限値の値を問う内容の試験を行ったところ，表 1 に示すように学生の理解度が低いことが判明した．

表 1．三角関数の極限値を求める問題の正解率

問題	クラス 1	クラス 2	クラス 3
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$	39.0 %	56.1 %	69.8 %
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	12.2 %	17.1 %	18.6 %

通常は，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ は図 1 のようなグラフを使って説明されることが多い．我々は3D-GRAPES を使うことで，極限値に近づいていく様子を動画で視覚的に理解させ，不定形の極限への理解を深めることを試みた．

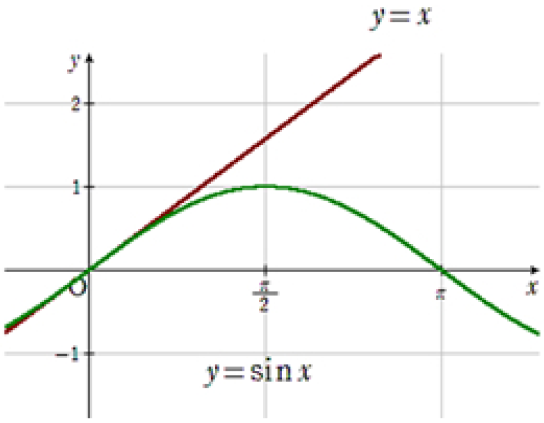

図 1. $y = \sin x$ および $y = x$ のグラフ

2　3D-GRAPES を用いた関数の極限の説明

我々は 3D-GRAPES を用いてこのタイプの極限を視覚的に示すプログラムを作成した．点がスキー競技のダウンヒルのように雪の斜面を滑り降りるようなイメージを考え，両側の斜面を分母および分子の関数のグラフで与える．$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ の場合は，両側の斜面は $y = \sin x$ および $y = x$ のグラフで与えられる (図 2).

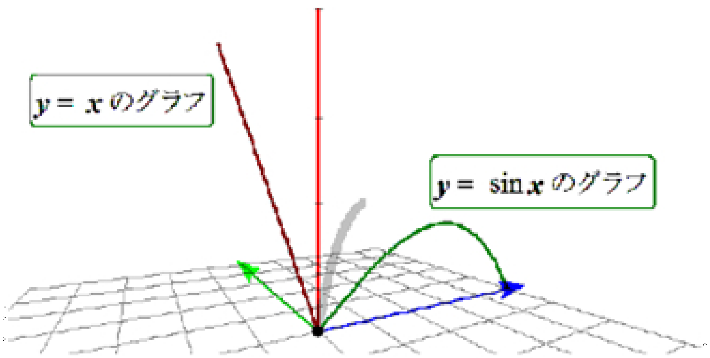

図 2. 関数のグラフを用いて雪の斜面を作成する

$f(x) = \sin x$, $g(x) = x$ とし，$Q = (0, s, g(s))$, $P = (s, 0, f(s))$ とおく．プレーヤーを点 R で表す．R は線分 PQ を $x : \sin x$ に内分する点である．水色の曲線は線分 PQ の中点の軌跡である (図 3). パラメータ s を 0 に近づけるとき R は水色のラインに次第に近づいてゆく．これは $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が成り立つことを示している．

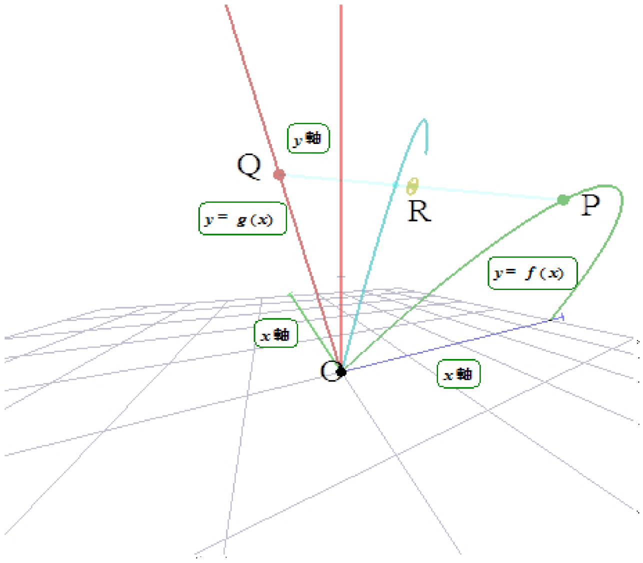

図 3. 3 点 P, Q, R の定義

実際に，$x = 0.01$ では，$\dfrac{\sin x}{x} = 0.99998$ となりほぼ 1 に近い値となる．また，原点に十分近いところでは点 R がほぼ水色の曲線の上に乗っていることがわかる（図 4）．

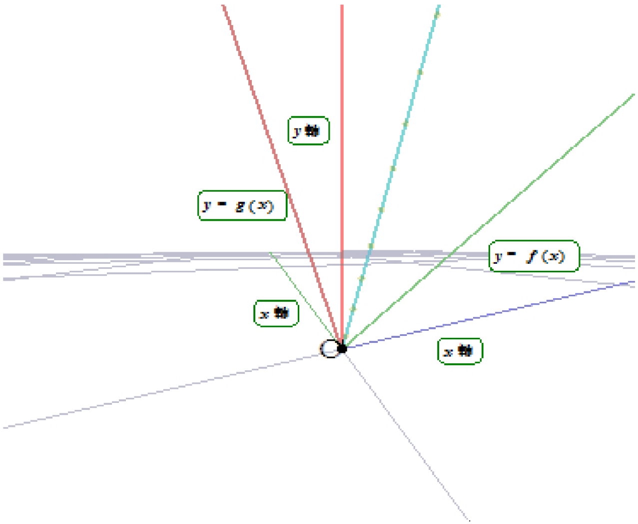

図 4. 原点付近を拡大したところ

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ に関しても，$f(x) = 1-\cos x$, $g(x) = x^2$ とおいて，線分 PQ を $x^2 : 1-\cos x$ に内分する点を R とおくと同様の議論ができる（図 5）．この場合も $x = 0.01$ のところでは $\dfrac{1-\cos x}{x^2} = 0.5$ となり，点 R が原点に近づくほど $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ は $\dfrac{1}{2}$ に近づいていく様子が見てとれる．

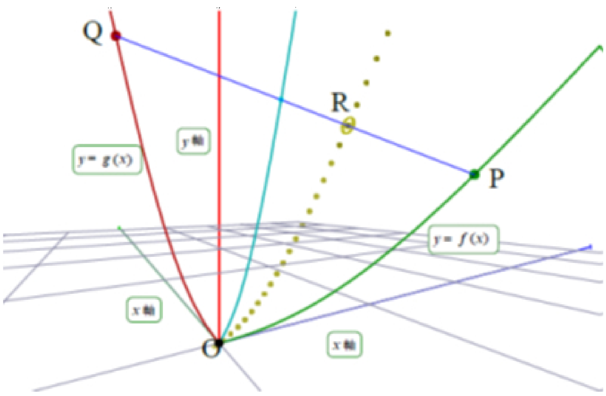

図 5. 極限値 $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ をダウンヒルで表す

3　まとめ

3 次元のグラフを用いて動画によって説明することで収束の様子を分かりやすく説明できるようになった．本校第 3 学年の 3 つのクラスで 3D-GRAPES を用いた三角関数の極限の授業を行い，その後の定期試験で極限値 $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ の値を問う問題を出題した．3D-GRAPES による授業を行ったクラスでは正解率の上昇がみられた．このダウンヒルのプログラムを用いるとロピタルの定理を視覚的に説明することができる．今後はそのような授業にも取り組んでみたい．

参考文献

[1] 高木和久，八木潤：3D-GRAPES を用いた関数の極限の指導について，日本数学教育学会第 40 回研究発表会，2015.