数理解析研究所講究録
第1978巻 2015年 96-107

高等学校数学科における活性化教材の開発
–数学を数学に活用する取り組み–

芝浦工業大学・工学部　牧下 英世 (Hideyo Makishita)
College of Engineering,
Shibaura Institute of Technology

概 要

通常，作図は定規とコンパスのみを有限回用いて，与えられた条件に適する図形をつくることをいう（本稿では「作図」という）．本稿では，作図に数学の考えを付加することによって数学的に正確な図形を描画することについて述べる．

ここでは，数学の考えとして二次曲線の利用を，またその手段として図形描画ソフト Cinderella と K$_E$TCindy を用いた教材開発について報告する．

筆者は，数学の考えを用いて正確な図形を描画する取り組みは，高校生に「数学を数学に活用する」ことの有用性を実感させる絶好の教材であると考えている．

1　はじめに

Cinderella は，Graphical User Interface（以降，GUI と表記）として，コンピュータの画面上に，マウスクリックによって点を置いたり点同士を結ぶことなどして図形を作ることができる．定規とコンパスのほか，それらを組合せた操作[1]が用意されており，画面上で視覚的に位置を指示したり操作することによって図形を描画することができる．さらに，Script が用意されており，Character User Interface（以降，CUI と表記）として，コマンドによる図形描画ができる．

Cinderella は，動的幾何ソフトウエア（Dynamic Geometry Software，以降 DGS と表記）であり，数学的に描画された図形を構成する一部（例えば，点や線分）の位置を変化させたときに図形がどのように変化するのかを観察することができる[2]．そのため中学校や高等学校での図形指導において，問題解決のための糸口や生徒の直観的な理解につながることが期待できる．

Cinderella は GUI として図形描画ができるだけでなく，CUI として CindyScript（以降，Script と表記）という Command Line 入力により図形描画ができる．K$_E$TCindy は，その双方が interactive に機能するように開発されたソフトウエアである[3]．この CUI に

---

[1]例えば，角の二等分線やある点を通る垂線や平行線，点対称な図形の描画など．

[2]数学的な手続きによって描画された図形の一部の点や線分などの位置を変更しても，その性質は変わらない．例えば，線分 AB の垂直二等分線，三角形の内接円など．

[3]K$_E$TCindy では，Cinderella から描画データを入力し，CAS（今回は Scilab を使用）実行ファイルに書き出して実行し，LaTeX ファイルを作成し，この LaTeX ファイルをコンパイルすることで図形やグラフなどを PDF として出力ができるように開発された．CAS としては，Scilab のほか，Maxima，R などがある．

よって，これまで定規とコンパスだけでは描けなかった図形が，数学の考えを基にして正確に描画することが実現できた．

本研究は，生徒へ配布する和算の図形問題の印刷教材で，図形描画に窮していた図形が，二次曲線の考えを付加することによってとても簡単に描画できることがわかり，そのためのコマンドと関数式をプログラミングしたことが発端である．

プログラミングでは，画面上に GUI や CUI で描かれた図形から，焦点や準線を指定すれば放物線が，また 2 焦点と 2 焦点間の距離よりも長い長さ（あるいは 2 焦点からの距離の和が一定になる長さ）を指定すれば楕円が，さらに 2 焦点と 2 焦点間の距離の差が一定になるような長さを与えれば双曲線が，それぞれ描けるようにした．詳細については，それぞれの章で述べる．

また，KETCindy により，Cinderella の画面上の図形が，印刷教材として教科書で使用されている図形と同程度の品質で，教育的にもふさわしい図形として出力することが実現した．このシステムによって，生徒の図形分野への興味と関心を高めることが期待できる．本稿の図は Fig.6. を除き他は全て KETCindy で描いたものである．それらの図の品質が教科書にある図と同等もしくはそれ以上に高品質であることを確かめてほしい．

第 2 章では，本稿で取りあげた和算の問題を [4] から引用して紹介した．第 3 章から第 5 章では，Script を併用した図形描画について和算の問題を例に解説した．第 6 章では，まとめと今後の課題として，全体の内容を踏まえ，数学教育や数学科教員養成における課題ついて述べた．附録では，本稿の問題意識となった [6] の内容を引用した．なお，本稿は 2015 年 RIMS での口頭発表したものを [1] として公開しさらに深めた．

2　和算の図

ここでは，次の例 1～例 3 の問題を取りあげた．これら円 P の中心を求めるためには定規とコンパスだけでは難しく，二次曲線の考えを付加する必要がある．ここでは，二次曲線を Script で入力し，KETCindy によって出力できることを示す．

例 1　円の直径が 1 のとき，正方形の一辺はいくらか．

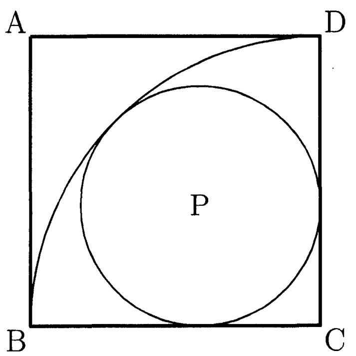


Fig.1.

[答.] $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

例 2　円の直径が 3 のとき，正方形の一辺はいくらか．

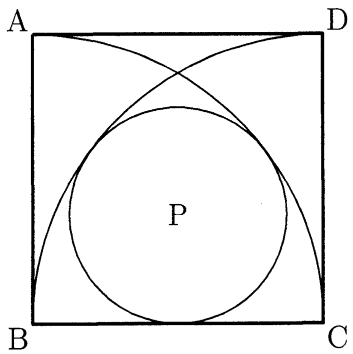


Fig.2.

[答.] 4

例 3　外円 O の内部に大円と小円 P が 2 つずつ入っている．小円 P の直径が 2 であるとき，大円の直径はいくらか．

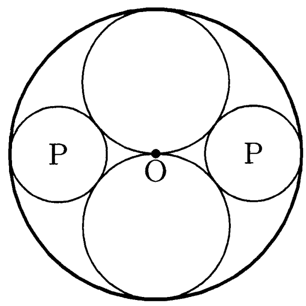


Fig.3.

[答.] 3

和算では，図形に関する問題が多く扱われている．条件に合う図が与えられていれば，解法そのものはそんなに難しくない．しかし，条件が与えられていても問題の図の作図に窮することが少なくない．

3　例1の図形描画：放物線の利用

例1　正方形ABCDの内部に，右の図のように，Cを中心とする四分円Cに内接し，辺BCと辺CDに内接する円Cを中心とする四分円Pがある．

等円の直径の長さが1であるとき，正方形の一辺の長さはどれだけか．

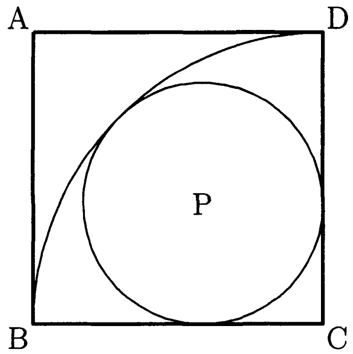


Fig.1.

3.1　円Pの描画の手順

例1の図（Fig.1.）の円Pを求めるための手順の例は，次の通りである．

≪ 手順 ≫

1. 円Pは，四分円Cと対角線ACの交点Eを通る．
2. 円の中心Pは，Eを焦点として，辺BCを準線とする放物線上にある．
3. また，円の中心Pは対角線AC上の点にもある．よって，円の中心Pは，放物線と対角線ACとの交点になる[4]．

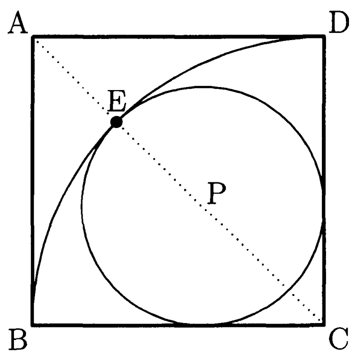


Fig.4.

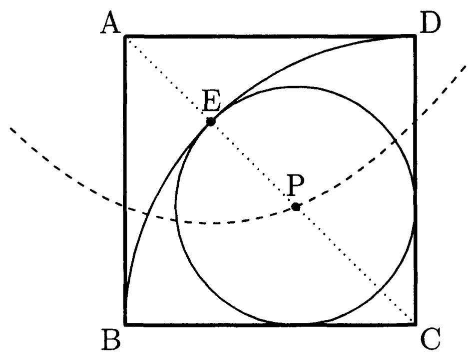


Fig.5.

[4]Eを焦点，準線を辺CDとする放物線と対角線ACとの交点も求める円Pの中心となる．

3.2 放物線の利用

ここでは，Fig.5. の Script の例（左側）とそれを実行したときに生成される内容（右側）を紹介する．

≪ Script の例 ≫	≪ 生成される内容 ≫
1:Fhead="Parabola";	ファイル名：Parabola
2:Ketinit();	KETCindy を初期化する
3:Addax(0);	座標軸をかかない
4:Listplot([A,B,C,D,A],["dr,2"]);	正方形 ABCD を直線 2 でかく
5:Listplot([A,C],["da,1"]);	対角線 AC を破線でかく
6:Circledata([C,B],["dr,1","Rng=[pi/2,pi]"]);	四分円 C をかく
7:Parabolaplot("1",[E,B,C],["da,1"]);	焦点 E，準線 BC の放物線
8:Putintersect("P","rt1para","sgAC");	放物線と対角線の交点を P とする
9:Circledata([P,E],["dr,1"]);	中心 P，点 E を通る円
10:Pointdata("1",E,["size=5"]);	点 E をサイズ 5 で表示
11:Pointdata("2",P,["size=5"]);	点 P をサイズ 5 で表示
12:Letter([A,"nw","A",B,"sw","B",C,"se","C", D,"ne","D",E,"n2","E",P,"n2","P"]);	点 A, B, C, D, E, P を表示
13:Windispg();	ディスプレイに表示

1行目にはファイル名を，2行目と13行目の間に上記のようなScriptを書けば，KETCindyにより，Cinderella上に図を出力できる．さらに，PDF で実際の図を確認することができる．図や頂点の記号などの変更は，Cinderella に戻って直接図形を変形するか，Script で変更すればよい．同時に，LaTeX で挿入できる Tpic ファイルが 1 行目の名前で作成できる．1 行目のファイル名を layer 環境で差し込めば，自分の思った場所に，KETCindy で作った図を入れることができる [5]．

なお，KETCindy には，数学教育上，教科書で用いられる各種の表現を用意した．例えば，線種として，線（dr），破線（da），点線（do），太さも指定できる．4 行目の Script にある"dr, 2" は，線で，太さ 2 を意味する．なお，線種，太さのデフォルトは，"dr,1" である．

なお，7 行目の放物線を描画する関数式 Parabolaplot は，プログラムによって追加したものである．KETCindy では，関数式や記号が，必要に応じて，生成する関数を付加することができる．今後必要に応じて追加したものをその都度紹介する．

3.3 KETCindy を用いる利点

筆者は数学的に正しく，印刷教材としても高品質な図を自身の数学教育に活用するために，KETCindy を利用している．これにより，印刷教材として高品質な図を，LaTeX に挿入できる．次の Cinderella で表された画面のハードコピーと KETCindy による図の品質を比較してほしい．動きのある幾何教材としては Cindrella の図を見せるとよいだろう．さらに，印刷教材としては KETCindy による図を用いるとよいことが実感できる．

[5] 詳細については，巻末の附録 3 に示した．

また，KETCindy は，Script の記述が数学的で簡潔なことが挙げられよう．

例えば，上記の 7 行目の放物線の Script のように，焦点と準線を指定すればよい．その指定に際しては，GUI である Cinderella の図を見ればよい．なお，点 E を焦点，準線を辺 CD として指定しても，放物線が描ける．その結果と対角線 AC との交点が求める円 P の中心となる．Script では，Parabolaplot([E,C,D]); となる．

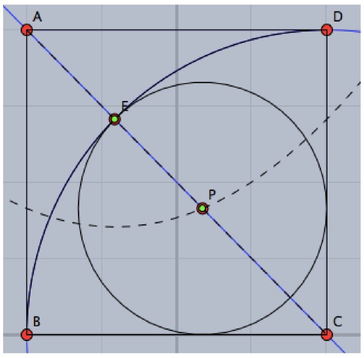


Fig.6.

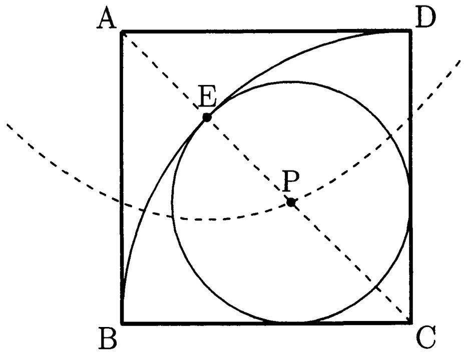


Fig.5.

この KETCindy の利点として，次のことが挙げられる．

≪ 利点 ≫

1. Cinderella を DGS，GUI として活用できる．
2. DGS で作成した図形が，正確でしかも高品質な図であり，生徒に印刷教材として提供できる．
3. 作成した図の改変と印刷教材への挿入が容易である．
4. KETCindy のプログラムは数学的でわかりやすい．
5. フリーウエアであり，学校現場に導入しやすい．

4　例 2 の図形描画：楕円の利用

例 2　正方形 ABCD の内部に，右の図のように点 B と点 C を中心とする 2 つの四分円 B，C と辺 BC に接する円 P がある．

　円の直径の長さが 3 であるとき，正方形の一辺の長さはどれだけか．

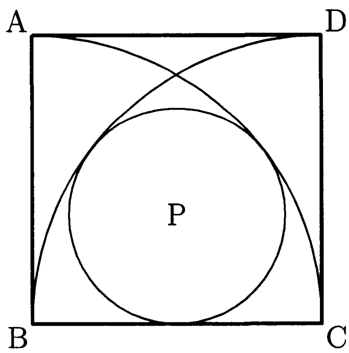


Fig.2.

4.1 円Pの描画の手順

例2の図（Fig.2.）の円Pを描画する手順の例は，次の通りである．

≪ 手順 ≫

1. 円Pは，辺BCの中点Eを通る．
2. 円Pと円B（Bを中心とする四分円）との接点をYとする．
3. 点Eは定円Bの内部の定点であり，円Pは定円B上の点Yで接する．
4. BP + EP = BP + PY = BY = BC = （一定）である．
5. よって，円Pの中心は，2点B，Eを焦点とする楕円上にある．
6. また，円の中心Pは辺BCの垂直二等分線上にもある．よって，求める円の中心Pは，楕円と垂直二等分線の交点である．

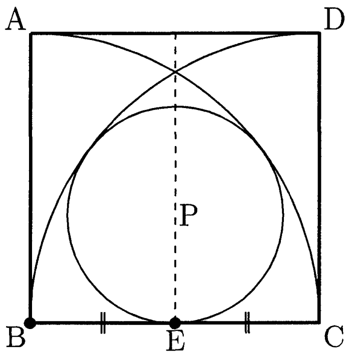


Fig.7.

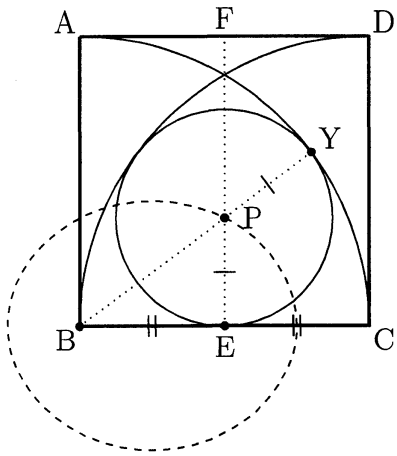


Fig.8.

4.2 例2のScriptの例

ここでは，Fig.8. のScript例を紹介する．

≪ Scriptの例 ≫	≪ 生成される内容 ≫
4:Listplot([A,B,C,D,A],["dr,2"]);	正方形ABCDをかく
5:Circledata([B,C],["dr,1","Rng=[0,pi/2]"]);	四分円B
6:Circledata([C,B],["dr,1","Rng=[pi/2,pi]"]);	四分円C
7:Listplot([E,F],["da,1"]);	垂直二等分線EF
8:Ellipseplot("1",[B,E,|B − C|],["da,1"]);	2焦点をB，Eとする楕円
9:Putintersect("P","rt1elp","sgEF");	放物線と垂直二等分線の交点P
10:Circledata([P,E],["dr,1"]);	中心P，点Eを通る円
13:Pointdata("3",P,["size=5"]);	点Pをサイズ5で表示
15:Drawsegmark("1",[B,E],["Type=2","Width=0.5"]);	線分が等しいマーク
16:Drawsegmark("2",[C,E],["Type=2","Width=0.5"]);	線分が等しいマーク
17:Windispg();	ディスプレイに表示

$\boxed{\text{註}}$ 例1では，Scriptの全文を紹介したが，例2に関係する主要なScriptのみ記すため，行番号に欠番が発生している．

15 行目，16 行目で紹介した Drawsegmark は，Fig.7.，Fig.8. のように，２つの線分が等しいこと，すなわち，BE = CE であることを，Drawsegmark によって生成される記号によって，視覚的に点 E が辺 BC の中点であることが見て取れる．これは日本の数学の教科書でよく用いられる方法である．

Fig.8. において，2 点 B と E が焦点であることがわかれば，求める点 P が，楕円の性質として，$\mathrm{BP} + \mathrm{EP} = 2a$（$2a$ は，距離の和）となることを満たせばよい．

すなわち，$2a$ が四分円 B の半径であることを見抜くことがここでは最も重要である．それができれば，KETCindy では，それを $2a = |\mathrm{B} - \mathrm{C}|$ と指定するだけで良い．ベクトルの表記に似ていて数学的であり簡潔である．

筆者の「数学を数学に活用する」という主張は，ここにある [2].

5　例 3 の図形描画：双曲線の利用

$\boxed{\text{例 3}}$ 外円 O に，右の図のように，大円が 2 個，小円 P が 2 個入っている．
小円 P の直径が 2 であるとき，大円の直径の長さはどれだけか．

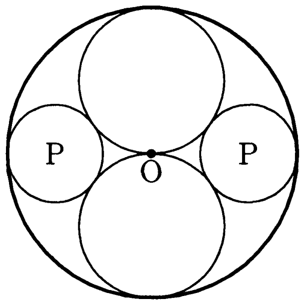


Fig.3.

5.1　円 P の描画の手順

例 3 の図（Fig.3.）の円 P を描画する手順の例は，次の通りである．

2 つの大円 Q を Q1，Q2，2 つの小円 P を P1，P2 とする．2 つの大円の中心 Q1，Q2 は自明である．2 つの小円の中心 P1，P2 を求めることは簡単ではない．ここでは，2 つの小円の中心 P1，P2 を求める手順について述べる．

≪ 手順 ≫

1. 小円 P1，P2 と外円 O との接点をそれぞれ A，B とする．
2. 円 P1 と円 Q1 との接点を Y とする．
3. 求める小円 P1 は，定点 A を通り，定円 Q1 と点 Y で接している．
4. $\mathrm{Q1P1} - \mathrm{AP1} = \mathrm{Q1P1} - \mathrm{AP1} = \mathrm{Q1P1} - \mathrm{P1Y} = \mathrm{Q1Y} = \mathrm{Q1O}$（一定）
5. よって求める小円 P1 の中心は，2 点 A，Q1 を焦点とする双曲線上にある．
6. また，求める P1 は直径 AB 上にもあるから，求める円の中心 P1 は，双曲線と直径 AB との交点である．小円 P2 の中心の作図も同様である [6].

[6] P2 は，2 点 B，Q1 を焦点とする双曲線と直径 AB の交点である．

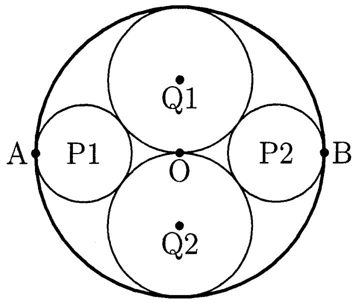


Fig.9.

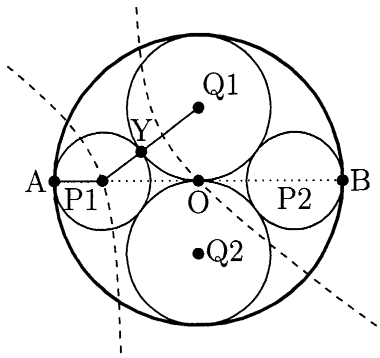


Fig.10.

5.2　例 3 の図の Script の例

ここでは，Fig.10. の Script の例を紹介する．

4:Circledata([A,B],["dr,2"]);	中心 A で B を通る円
5:Circledata([Q1,O]);	中心 Q1 で O を通る円
6:Circledata([Q2,O]);	中心 Q2 で O を通る円
7:Listplot([A,B]);	線分 AB
8:Hyperbolaplot("1",[A, Q1, |Q1 − O|],["da,1"]);	焦点 A,Q1 の双曲線
9:Putintersect("P1","rt1hyp","sgAB");	双曲線と垂直二等分線の交点を P1
10:Hyperbolaplot("2",[B, Q1, |Q1 − O|],["notex"]);	焦点 B,Q1 の双曲線，描画しない
11:Putintersect("P2","rt2hyp","sgAB");	双曲線と垂直二等分線の交点を P2
12:Circledata([P1,A]);	中心 P1，点 A を通る円
13:Circledata([P2,B]);	中心 P2，点 B を通る円
17:Pointdata("4",P1,["size=5"]);	点 P1 をサイズ 5 で表示
20:Listplot([A,B],["da,1"]);	線分 AB を破線で結ぶ
22:Windispg();	ディスプレイに表示

註　例 3 に関係する主要な Script のみを記すため，行番号に欠番が発生している．

8 行目の双曲線の描画に関して，例 2 と同様に，Fig.5. において，2 点 A と Q1 が焦点であることがわかれば，求める点 P が，双曲線の性質として，$|\mathrm{AP} - \mathrm{Q1P}| = 2a$（$2a$ は，距離の差）となることを満たせばよい．それが，円 Q1 の半径であることを見抜くことがここでは重要である．それができれば，KETCindy では，それを $|\mathrm{Q1} - \mathrm{O}|$ として，かける．

なお，P2 を作図するためには，10 行目の 2 点 B と Q1 を焦点とする双曲線を生成すれば良いが，Fig.10. では煩雑になるので，指定のオプションで，10 行目の最後にあるように，"notex" として「描画なし」にした．この場合の描画なしは，TeX ファイルに出力しないという意味であり，GUI である Cinderella には描画している．

6　まとめと今後の課題

ここで取り上げた例1〜例3の図形描画は，定規とコンパスによる作図に，二次曲線の内容を付加することで，KETCindyによって問題解決することができた例である．

通常，定規とコンパスのみを有限回用いて図をつくることを数学では作図という．この作図に数学の内容を付加して，図形をつくることを，筆者は「準作図」と呼ぶことにする．準作図の定義については，慎重に検討する必要があるが,「数学を数学に活用する」観点で，準作図による図形描画の教材開発を，今後も進めていきたい．例えば，準作図を用いれば，正7角形の作図のように，作図不可能である図形に対しても，高次方程式を解くことによって，正7角形が準作図が可能となる．このような教材は，数学を数学に活用する観点でとても有効になると筆者は考える．また，CinderellaのScript機能を用いれば，CASで計算させることによって，容易に各種の問題解決がなされるだろう．筆者は，このように，準作図は数学そのものを数学に活用するものであり，高等学校で学ぶ数学の内容を大局的に俯瞰することにつながると確信する．こういった取り組みは，生徒の数学への興味と関心につながることが期待できる．

次に，KETCindyのように，生成された結果が印刷教材として外部へ美しく出力できるシステムは，生徒や教師の数学教育に資するものである．特に，現在展開されているSSH研究の生徒による研究発表の手段として有効である．実際にSSH研究指定校である茨城県立竜ヶ崎第一高等学校のSSH研究における先進的なソフトウエアの利活用として進行しており，その成果を実証していきたい．

ICTについて，現状の数学教育で，積極的に取り扱っている事例は多くはないように感じる．今後の課題として，数学教育を担当する私たち教師は，ICTを積極的に活用することが必要であると思う．また，その際に，自分の向き合う学生の習熟などに合った形に，ハードウエアを扱ったり，またはソフトウエアの改変ができる教師があるが必要である．本稿で取り上げた，CinderellaとKETCindyでいえば，簡単な数学的プログラミングができるように，教職課程での科目の工夫が考えられる．今回紹介したKETCindyだけでなく数学指導に関係するハードウエアやソフトウエアについて，中等教育の数学教員が自らの問題解決につながるような知識が必要となる．そのためにも，教員養成や教員研修の中で，ICTについての研修システムの一層の充実が期待される．

謝辞

本稿の執筆にあたり，高遠節夫先生（東邦大学）をはじめ，KETCindyのプロジェクトメンバー各位には大変お世話になった．また，有益な助言をいただいた．

また，渡邊公夫先生（早稲田大学）からは貴重な助言と今後の研究について重要な視点と示唆を賜った．この場を借りてお礼申し上げる．

なお，本研究はJSPS科研費26350198,25350370の助成を受けたものである．

附録

1. 『幾何解法事典』[6]

例1〜例3のScriptによる図形描画では，[6]の第5章 軌跡，第4節 円に関する問題，第4項 二次曲線になる軌跡の問題を参考にした．この問題の結果を利用すれば，本文で述べたように，定規とコンパスによる作図に，二次曲線の考えを付加することによって，円Pを描画することができる．

ここでは参考にした[6]の問題番号1440, 1444, 1443は以下の通りである[7]．参考のために引用して掲載する．

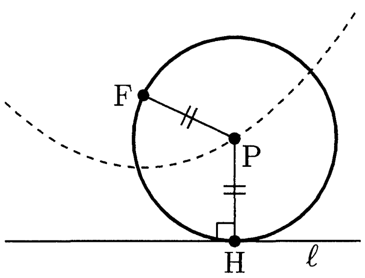
幾何解法事典の問題から

1440. 定直線gとこの直線外の定点Aとがある．Aを通りgに接する円の中心Pの軌跡を求めよ．

1444. 定円F′の内部の定点Fを通り，定円F′に接する円Pの中心の軌跡を求めよ．

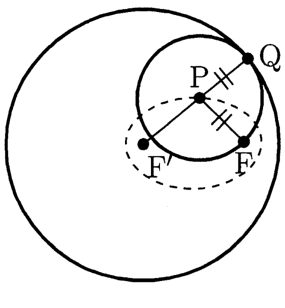
1443. 定円F′の外部の定点Fを通り，定円F′に接する円Pの中心の軌跡を求めよ．

円Pの軌跡は，それぞれFを焦点，gを準線とする放物線，F′，Fを焦点とする楕円，双曲線になる．これをKETCindyで描いてみた．



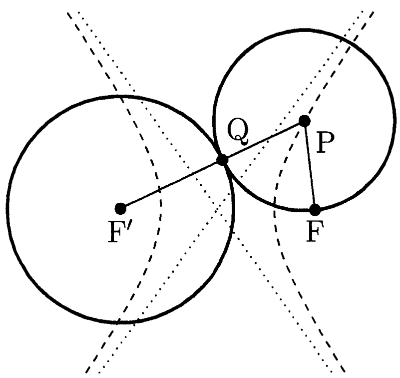
1440.

点Hは円Pとℓとの接点



1444.

点Qは円F′と円Pとの接点

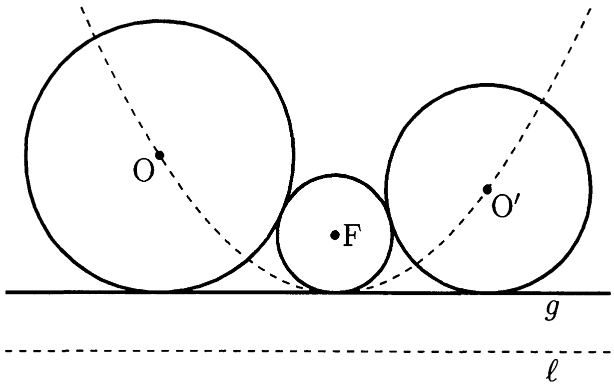


1443.

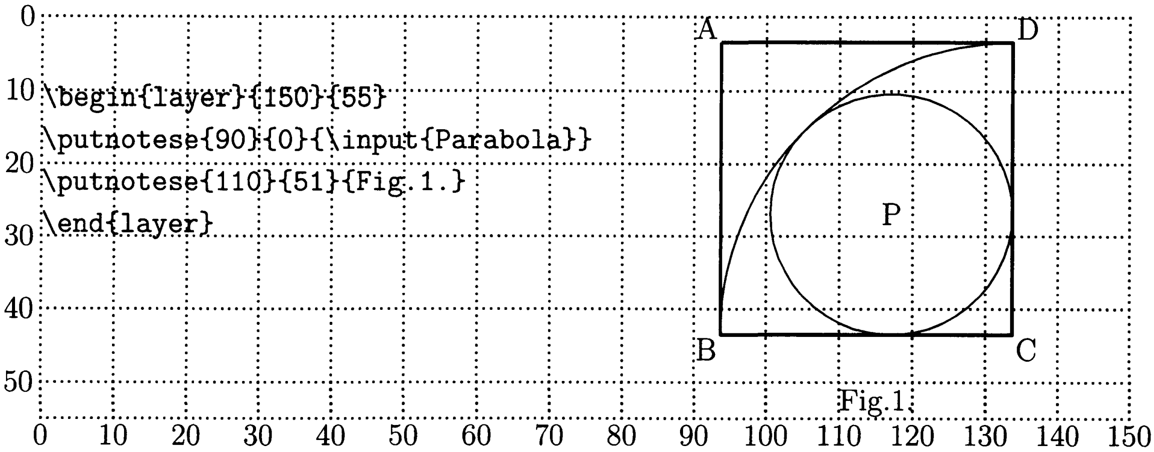
点Qは円F′と円Pとの接点

[7]これらの問題では，「… 軌跡を求めよ」となっているが，本稿の扱う内容にあうようにした．なお，図形はCinderellaとKETCindyによる準作図し，頂点や点については本稿に統一した．

2. 次は和算でよく見られる図である [3][5]．図のように，円 F と共通接線 g の両方に接する円 O，円 O′ を描画するためには，点 F を焦点，ℓ を準線とする放物線をかけばよい．その放物線上の点 O，点 O′ が求める円の中心になる．



3. ここでは KETCindy により生成された tpic ファイルを，layer 環境のもと，LaTeX に挿入する方法を示す．



1 行目は，x, y 座標平面上に $(0,0)$ から $(150,55)$ までの格子点を描くことを意味する．この格子点を見ながら Fig.1 の Parabola の図の位置の座標を考える．2 行目は，Fig.1 の左上が座標 $(90,0)$ にくるように置いたことを意味する．もしこの図でよければ，1 行目を

`\begin{layer}{150}{55}` を `\begin{layer}{150}{0}`

と指定すれば，格子が消えて，第 3 章の例 1 のようになる．すなわち，次のようにすればよい．

```
\begin{layer}{150}{0}
\putnotese{90}{0}{\input{Parabola}}
\putnotese{110}{51}{Fig.1.}
\end{layer}
```

参考文献

[1] Hideyo Makishita: Figure Drawing using KETCindy and its Application to Mathematics Education – Practical example of application of mathematics to mathematics –, 20th Asian Technology Conference in Mathematics Proceeding, Leshan Normal University, pp.374–383, 2015.

[2] Hideyo Makishita: Practice with Computer Algebra Systems in Mathematics Education and Teacher Training Courses, 4th International Conference, Seoul, South Korea, Springer Lecture Notes Volume 8592 of the series Lecture Notes in Computer Science, pp.594–600, 2014.

[3] 牧下英世: 「数学の問題づくりと生徒の情意面に関する実証的研究」, 早稲田大学大学院教育学研究科紀要　別冊 19 号-1, pp.263–274, 2011.

[4] 米光丁: 『和算の基本問題と解法』, 自費出版, 2010.

[5] 佐藤健一, 伊藤洋美, 牧下英世: 『算額道場』, 研成社，2000.

[6] 魚返正，本部均，村勢一郎，旺文社編: 『幾何解法事典』, 旺文社，1959.