数理解析研究所講究録
第 1978 巻 2015 年 22-27

頂点から内心への変換式・逆変換式の簡明な導出法

龍谷大学・理工学部　大西 俊弘 (Toshihiro Onishi)
Faculty of Science and Technology,
Ryukoku University
龍谷大学・理工学部　山岸 義和 (Yoshikazu Yamagishi)
Faculty of Science and Technology,
Ryukoku University
龍谷大学・理工学部　四ツ谷 晶二 (Shoji Yotsutani)
Faculty of Science and Technology,
Ryukoku University

1　はじめに

点 P が円周上を動くとき，三角形 ABP の重心 G，外心 O の軌跡は，それぞれ円や線分となる．GoeGebra の LocusEquation コマンドを用いれば，それらの方程式を求めることもできる．

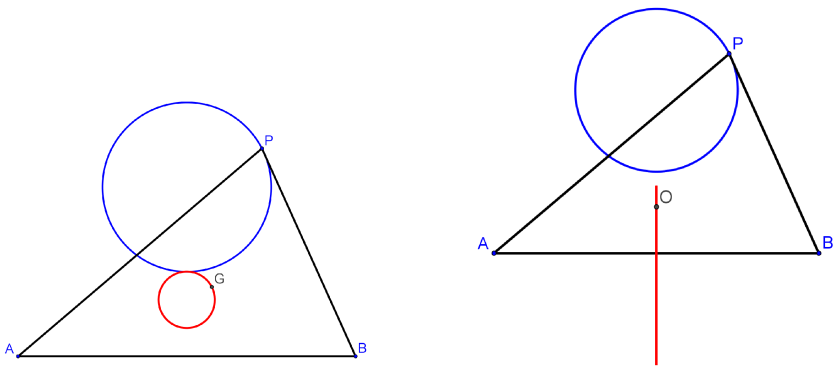

図 1: 頂点が円周上を動くときの重心と外心の軌跡

一方，点 P が円周上を動くとき，三角形 ABP の内心 I の軌跡は，見慣れない曲線となり，普遍的な法則がないように思われる．しかし，点 P が楕円上を動くとき，三角形 ABP の内心 I の軌跡は，元の楕円の焦点を通る楕円となるという美しい性質がある．本研究では，三角形の内心の軌跡について考察を進めることにする．ちなみに，GoeGebra の LocusEquation コマンドを用いても，それらの方程式を求めることはできない．その点からみても，内心の軌跡は重心や外心の軌跡とは性質が異なることが分かる．

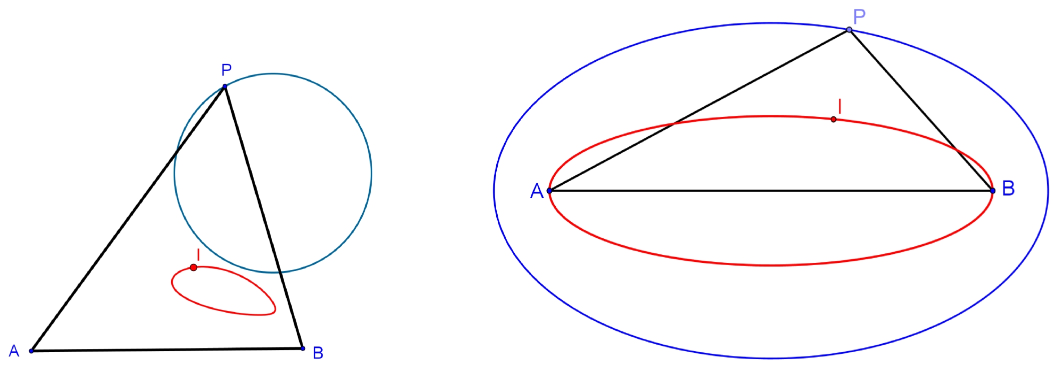

図 2: 頂点が円周上・楕円上を動くときの内心の軌跡

2　内心の軌跡について

2.1　内心のベクトル表示

$\mathrm{BC}=a, \mathrm{CA}=b, \mathrm{AB}=c$ である三角形 ABC の内心を I とする．点 O を基準とする位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，内心 $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ は次式で与えられる

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}$$

$\mathrm{A}(-1,0), \mathrm{B}(1,0), \mathrm{C}(p,q)$，$\mathrm{I}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ とおくと，$a=\sqrt{(p-1)^2+q^2}, b=\sqrt{(p+1)^2+q^2}$ $, c=2, \overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,0), \overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,0), \overrightarrow{\mathrm{OC}}=(p,q)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{\sqrt{(p-1)^2+q^2}(-1,0)+2(p,q)+\sqrt{(p+1)^2+q^2}(1,0)}{\sqrt{(p-1)^2+q^2}+\sqrt{(p+1)^2+q^2}+2}$$

$$=\left(\frac{2p-\sqrt{(p-1)^2+q^2}+\sqrt{(p+1)^2+q^2}}{2+\sqrt{(p-1)^2+q^2}+\sqrt{(p+1)^2+q^2}}, \frac{2q}{2+\sqrt{(p-1)^2+q^2}+\sqrt{(p+1)^2+q^2}}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ の x 成分を簡単にすると（計算は省略）

$$\frac{2p-\sqrt{(p-1)^2+q^2}+\sqrt{(p+1)^2+q^2}}{2+\sqrt{(p-1)^2+q^2}+\sqrt{(p+1)^2+q^2}}=\frac{2p}{\sqrt{(p-1)^2+q^2}+\sqrt{(p+1)^2+q^2}}$$

よて，ベクトル表示は,

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\left(\frac{2p}{\sqrt{(p-1)^2+q^2}+\sqrt{(p+1)^2+q^2}}, \frac{2q}{2+\sqrt{(p-1)^2+q^2}+\sqrt{(p+1)^2+q^2}}\right)$$

2.2　内心の軌跡の方程式

定理　三角形を $\mathrm{A}(-1,0), \mathrm{B}(1,0), \mathrm{C}(p,q)$ とおいたとき，点 C を A，B を焦点とする楕円上に動かしたとき，内心 I の軌跡は，楕円

$$x^2 + \frac{y^2}{\frac{a-1}{a+1}} = 1$$

となる．

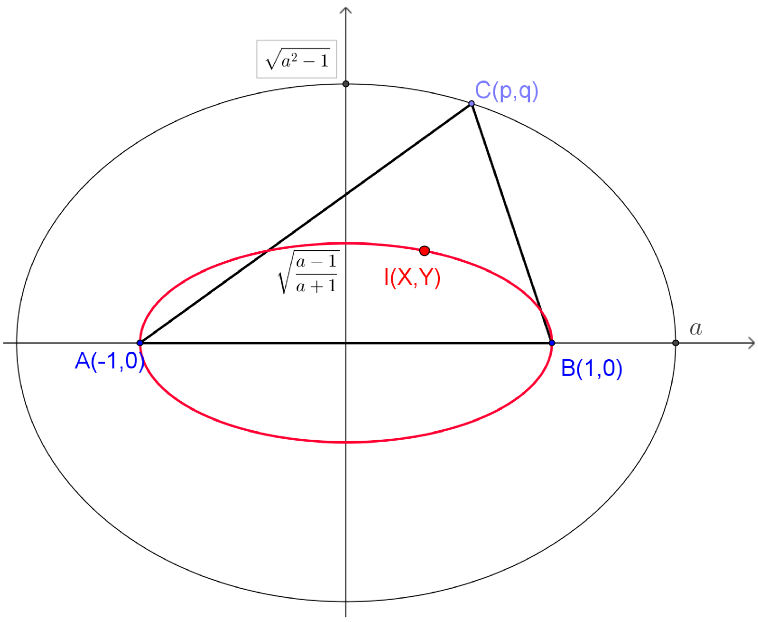

図 3: 頂点が楕円上を動くときの内心の軌跡

証明　A(-1,0)，B(1,0) を焦点とする楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-1} = 1$$

と表すことができる．(但し，$a > 1$)

楕円上の点 $\mathrm{C}(p,q)$ は，媒介変数 θ を用いて，

$$(a\cos\theta, \sqrt{a^2-1}\sin\theta)$$

と表すことができる．すなわち，

$$p = a\cos\theta \qquad q = \sqrt{a^2-1}\sin\theta$$

この関係を用いると，

$$
\begin{aligned}
(p-1)^2+q^2 &= (a\cos\theta-1)^2+(a^2-1)\sin^2\theta \\
&= a^2\cos^2\theta-2a\cos\theta+1+(a^2-1)(1-\cos^2\theta) \\
&= a^2-2a\cos\theta+\cos^2\theta \\
&= (a-\cos\theta)^2
\end{aligned}
$$

$$\sqrt{(p-1)^2+q^2}=a-\cos\theta \qquad (a>1)$$

同様に考えて

$$\sqrt{(p+1)^2+q^2}=a+\cos\theta \qquad (a>1)$$

よって内心の位置ベクトルは次のように表すことができる．

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OI}} &= \left(\frac{2p}{\sqrt{(p-1)^2+q^2}+\sqrt{(p+1)^2+q^2}}, \frac{2q}{2+\sqrt{(p-1)^2+q^2}+\sqrt{(p+1)^2+q^2}}\right) \\
&= \left(\frac{2a\cos\theta}{(a-\cos\theta)+(a+\cos\theta)}, \frac{2\sqrt{a^2-1}\sin\theta}{2+(a-\cos\theta)+(a+\cos\theta)}\right) \\
&= \left(\frac{2a\cos\theta}{2a}, \frac{2\sqrt{a^2-1}\sin\theta}{2(a+1)}\right) \\
&= \left(\cos\theta, \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\sin\theta\right)
\end{aligned}
$$

内心を $\mathrm{I(X, Y)}$ とおくと，上記の式より

$$\mathrm{X}=\cos\theta, \qquad \mathrm{Y}=\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\sin\theta$$

この2式から θ を消去すると

$$\mathrm{X}^2+\left(\frac{\mathrm{Y}}{\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}\right)^2=1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

よって，内心Iの軌跡は，楕円

$$x^2+\frac{y^2}{\frac{a-1}{a+1}}=1$$

となる．

2.3 頂点から内心への変換式

$$
\begin{aligned}
p &= a\cos\theta \\
q &= \sqrt{a^2-1}\sin\theta = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\times\ a\sin\theta \\
\mathrm{X} &= \cos\theta = \frac{1}{a}\times\ a\cos\theta \\
\mathrm{Y} &= \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\sin\theta = \frac{\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}{1}\times\frac{1}{a}\times\ a\sin\theta
\end{aligned}
$$

であるから，C → I の変換は，次の 3 つの変換の合成変換である

C → Q　　Q → R　　R → I

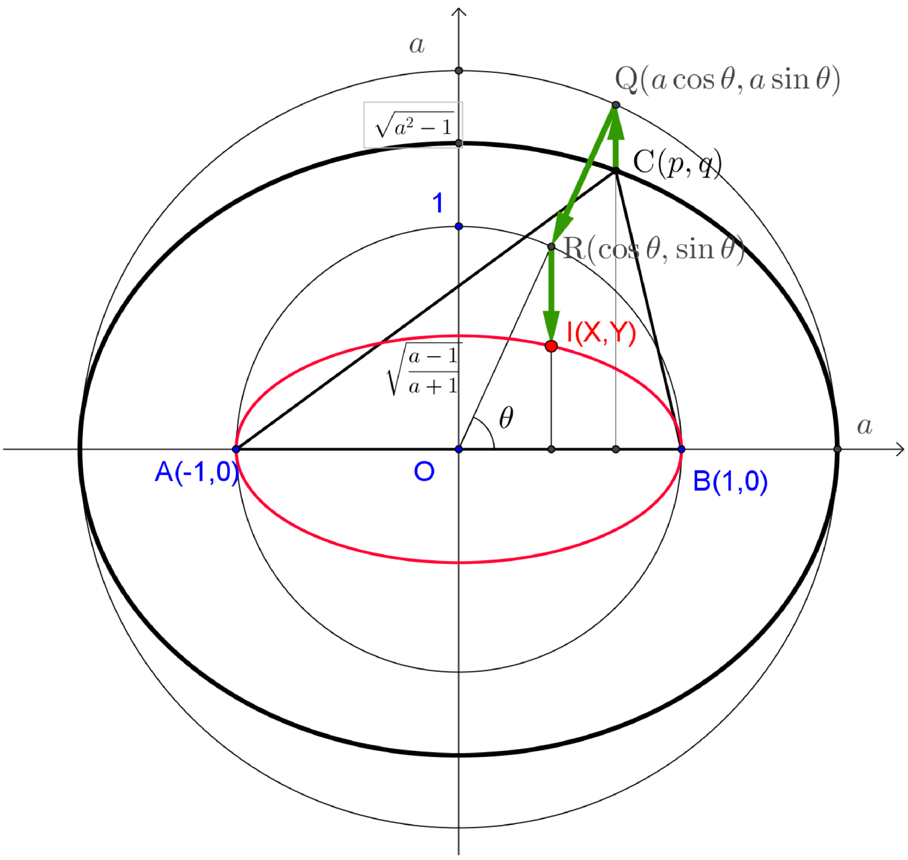

図 4: 頂点が楕円上を動くときの内心の軌跡

2.4 内心から頂点への変換式

定理　I(X, Y) から C(p,q) の変換は,

$$p=\frac{1-\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}{1-\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}^2}\mathrm{X}$$

$$q=\frac{2(1-\mathrm{X}^2)}{1-\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}^2}\mathrm{Y}$$

と表すことができる.

証明　(1) の分母を払うと

$$(a-1)\mathrm{X}^2+(a+1)\mathrm{Y}^2=(a-1)$$

$$1-\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2=a(1-\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}^2)$$

この式を a について解くと

$$a=\frac{1-\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}{1-\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}^2}$$

よって

$$\begin{aligned}
p&=a\cos\theta=\frac{1-\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}{1-\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}^2}\mathrm{X}\\
q&=\sqrt{a^2-1}\sin\theta\\
&=\sqrt{a+1}\frac{\sqrt{(a+1)(a-1)}}{\sqrt{a+1}}\sin\theta\\
&=(a+1)\frac{\sqrt{(a-1)}}{\sqrt{a+1}}\sin\theta\\
&=(a+1)\mathrm{Y}\\
&=\left(\frac{1-\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}{1-\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}^2}+1\right)\mathrm{Y}\\
&=\frac{2(1-\mathrm{X}^2)}{1-\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}^2}\mathrm{Y}
\end{aligned}$$

3 おわりに

点 C が楕円上を動くとき，三角形 ABC の内心 I の軌跡は，元の楕円の焦点を通る楕円となるという美しい関係がある．本稿では，頂点 C から内心 I への変換の立場からこの関係を捉えることができた.

一方，GeoGebra で軌跡の方程式が求められない理由については，まだ解明できていない．また，紙数の関係で触れることが出来なかったが，傍心についても内心と同様の変換式を考えることができる．傍心についても変換の立場から捉えることを今後の課題としたい.