数理解析研究所講究録
第 1979 巻 2015 年 107-119

On a dynamical approach to an inverse problem in potential theory

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所　小野寺 有紹

Michiaki Onodera
Institute of mathematics for industry,
Kyushu University

Abstract. 本稿では, ポテンシャル論の逆問題として現れる楕円型方程式の過剰決定問題について解説する. 過剰決定問題が解をもつという条件が領域の幾何にどのように反映されるかを問い, 特に, その対称性や一意性を得るために有効となる “フロー” を用いた動的な解析手法を導入する. ただし, 本稿では, 結果そのものよりもむしろ問題の背景やアイディアに重点をおき, 詳細については参考文献 [13] に譲る.

1 序

$\mathbb{R}^N$ 上の質量分布 (測度) μ に対し, それが生成する重力場ポテンシャルは

$$P_\mu(x) := E * \mu = \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y)\, d\mu(y)$$

で与えられる. ただし, E は Newton 核 ($-\Delta$ の基本解) であり, 具体的には

$$E(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x| & (N=2), \\ \dfrac{1}{N(N-2)\omega_N|x|^{N-2}} & (N\geq 3) \end{cases}$$

と表される. なお, ω_N は単位円 $\mathbb{B}\subset\mathbb{R}^N$ の体積を表す. 例えば, 原点に単位質量を有する質点は Dirac 測度 δ_0 で表され, $P_{\delta_0}=E$ となる. 特に, $N=3$ のとき, その質点が生成する重力場は

$$\nabla P_{\delta_0}(x) = \nabla E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|^2}\frac{x}{|x|}$$

であり, これはいわゆる逆二乗法則に他ならない. 一方, 領域 Ω および超曲面 Γ 上の一様質量分布 $\mathcal{L}\lfloor_\Omega$, $\mathcal{H}^{N-1}\lfloor_\Gamma$ が生成する重力場ポテンシャルはそれぞれ

$$P_\Omega(x) := \int_\Omega E(x-y)\,dy, \qquad P_\Gamma(x) := \int_\Gamma E(x-y)\,d\mathcal{H}^{N-1}(y)$$

となる. ただし, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}^{N-1}$ はそれぞれ N 次元 Lebesgue 測度, $(N-1)$ 次元 Hausdorff 測度を表す[1].

逆に, 重力場ポテンシャルが与えられたときに, それを生成する領域 Ω, または超曲面 Γ を特定することは可能であろうか？ここでは簡単のため, 与えられる重力場ポテンシャルはコンパクト台をもつある有限測度 μ に対して P_μ の形をとるものと仮定する. また, 以後, 領域 Ω は C^2 級の境界をもつとする.

問題 1.1. 与えられた測度 μ に対して, $\operatorname{supp}\mu \subset \Omega$ であって

$$P_\Omega(x) = P_\mu(x) \qquad (x \notin \overline{\Omega}) \tag{1.1}$$

をみたす領域 Ω は存在するか？また, それは一意に定まるか？

問題 1.2. 与えられた測度 μ に対して, $\operatorname{supp}\mu \subset \Omega$ であって

$$P_{\partial\Omega}(x) = P_\mu(x) \qquad (x \notin \overline{\Omega}) \tag{1.2}$$

をみたす領域 Ω は存在するか？また, それは一意に定まるか？

以下に述べるように, 上記の問題はそれと同値な楕円型方程式の過剰決定問題へと書き換えることができる. この同値な問題に対しては, 最大値原理等の楕円型方程式の標準的解析手法を用いることが可能となる. いま, 函数 u を次のようにポテンシャルの差として定義する:

$$u(x) := P_\mu(x) - P_\Omega(x) = \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y)\,d\mu(y) - \int_\Omega E(x-y)\,dy \qquad (x \in \mathbb{R}^N).$$

このとき, (1.1) が成り立つならば, u は次の楕円型方程式をみたす:

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu - 1 & (x \in \Omega), \\ u = 0 & (x \in \partial\Omega), \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & (x \in \partial\Omega). \end{cases} \tag{1.3}$$

ただし, n は $\partial\Omega$ の単位外向き法線ベクトルである. 実際, u が第一式をみたすことは定義よりしたがう. また, 境界条件については, (1.1) より $u(x) = 0$ $(x \notin \overline{\Omega})$ であ

[1]超曲面に対しては静電場ポテンシャルを考察する方が自然であるが, これもまた同様の公式により与えられる.

ることと楕円型正則性 $u \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \operatorname{supp}\mu)$ から確かめられる. 同様に, (1.2) が成り立つならば,

$$u(x) := P_\mu(x) - P_{\partial\Omega}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y)\,d\mu(y) - \int_{\partial\Omega} E(x-y)\,d\mathcal{H}^{N-1} \qquad (x \in \mathbb{R}^N)$$

が次の楕円型方程式をみたすことが確かめられる:

$$(1.4) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \mu & (x \in \Omega), \\ u = 0 & (x \in \partial\Omega), \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n} = 1 & (x \in \partial\Omega). \end{cases}$$

ただし, 第三式は各 $x \in \partial\Omega$ で $-\lim_{y\in\Omega, y\to x}(\partial u/\partial n)(y) = 1$ が成り立つことを意味し, それは

$$\left(\frac{\partial P_{\partial\Omega}}{\partial n}\right)_{\mathrm{gap}}(x) := \lim_{y\notin\overline{\Omega}, y\to x} \frac{\partial P_{\partial\Omega}}{\partial n}(y) - \lim_{y\in\Omega, y\to x} \frac{\partial P_{\partial\Omega}}{\partial n}(y) = -1 \qquad (x \in \partial\Omega)$$

からしたがう. 方程式 (1.3), (1.4) は境界条件が二つあることから過剰決定問題と呼ばれ, 一般の領域 Ω 上では解 u をもたない. しかし, 上の議論によって, 領域 Ω が (1.1), (1.2) をみたすときには, それぞれ (1.3), (1.4) が可解であることが了解される. 逆に, (1.3) が解 u をもつ場合, それを $\mathbb{R}^N$ 全体へ零拡張した函数を再び u と書くと, $u = P_\mu - P_\Omega$ が成立することが簡単に確かめられ, よって (1.1) が成立する. (1.4) についても同様である. したがって, 問題 1.1, 1.2 はそれぞれ次の問題と同値になる:

問題 1.3. 与えられた測度 μ に対して, $\operatorname{supp}\mu \subset \Omega$ であって過剰決定問題 (1.3) が可解となる領域 Ω は存在するか？また, それは一意に定まるか？

問題 1.4. 与えられた測度 μ に対して, $\operatorname{supp}\mu \subset \Omega$ であって過剰決定問題 (1.4) が可解となる領域 Ω は存在するか？また, それは一意に定まるか？

これらの問題に対する領域 Ω の存在については, 比較原理を用いた優解劣解法 (Beurling [3], Henrot [9]) や変分法 (Alt & Caffarelli [2], Sakai [15], Gustafsson & Shahgholian [8]) によるものが知られており, 広いクラスの測度 μ に対してその存在性が保証される. 一意性については, 一般の測度 μ に対しては成り立たないことが知られており, 特に問題 1.4 については, Henrot [9] によって $\mu = \alpha\delta_x + \alpha\delta_{-x}$ に対して二つの異なる領域 Ω_1, Ω_2 で (1.2) が可解となるものが等角写像を用いて構成されている. 一方, 測度 μ が一点の近くに十分集中している場合, 問題 1.3 については Sakai [14] による最大値原理を用いた巧みな議論により Ω が一意に定まることが示されている. しかしながら, その議論は問題 1.4 には適用できず, Shahgholian [17] によって (1.4) の可解性を有する領域 Ω のうち凸なものは多くとも一つしか存在し

ないことは示されているものの, 一般の領域 Ω に対する一意性については μ が集中している場合であっても未知であった.

本稿では, 著者による "フロー" を用いた動的手法を用いて, 問題 1.4 の一意性の問題を肯定的に解決する. すなわち, 測度 μ が十分に $N\omega_N\delta_0$ に "近い" 場合に, $\operatorname{supp}\mu\subset\Omega$ であって (1.4) が可解となる領域 Ω が一意に存在することを示す. また, Ω の形状について, それが単位円 $\mathbb{B}$ に "近い" ということをその定量的評価とともに示す.

主定理を述べるため幾つか記号を導入する. k 次の対称性をもつ測度のクラスとして

$$\mathfrak{M}_k := \left\{\nu \;\middle|\; \|\nu\|_{\mathfrak{M}} = N\omega_N,\ \int h\,d\nu = 0 \ \left(h\in\bigcup_{j=1}^{k} H_j\right)\right\}$$

によって定める. ただし, $\|\nu\|_{\mathfrak{M}} := \int d\nu$ であり, H_j は $\mathbb{R}^N$ 上の j 次 $(j\in\mathbb{N})$ の実数値調和多項式全体を指す. また, 符号付き測度 ν に対し, $\nu=\nu_+-\nu_-$ をその Jordan 分解としたとき, ν の全変動ノルムを

$$\|\nu\|_{\mathfrak{M}} := \|\nu_+\|_{\mathfrak{M}} + \|\nu_-\|_{\mathfrak{M}}$$

によって定義する. 領域の境界 $\partial\Omega$ が単位円周 $\mathbb{S}^{N-1} := \partial\mathbb{B}$ からどの程度離れているかを記述するため, $C^d(\mathbb{S}^{N-1})$ を $\mathbb{S}^{N-1}$ 上の d 回連続微分可能な函数全体とし, $\rho(\zeta) > -1$ をみたす $\rho\in C^d(\mathbb{S}^{N-1})$ に対して Ω_ρ を

$$\Omega_\rho := \left\{\left(1+\rho\left(\frac{x}{|x|}\right)\right)x \;\middle|\; x\in\mathbb{B}\setminus\{0\}\right\}\cup\{0\}$$

で定義される星型領域とする. このとき, ノルム $\|\rho\|_{C^d(\mathbb{S}^{N-1})}$ は $\partial\Omega_\rho$ が d 回微分まで込めてどの程度 $\mathbb{S}^{N-1}$ から離れているかを表す.

定理 1.5. ある十分小さい正数 η_0 が存在し, $\|\mu-N\omega_N\delta_0\|_{\mathfrak{M}}+(\operatorname{diam}\operatorname{supp}\mu)^{N-1}<\eta_0$ をみたす任意の測度 μ に対し,

(i) $\operatorname{supp}\mu\subset\Omega$ であって (1.4) が可解となる領域 Ω が一意に存在する;

(ii) ある $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し $\mu\in\mathfrak{M}_k$ であれば, 任意の $\varepsilon>0$ と $d\in\mathbb{N}$ に対して

$$\|\rho\|_{C^d(\mathbb{S}^{N-1})} \le C\left(\|\mu-N\omega_N\delta_0\|_{\mathfrak{M}}+(\operatorname{diam}\operatorname{supp}\mu)^{N-1}\right)^{1+\frac{k+1}{N-1}-\varepsilon} \tag{1.5}$$

が成り立つ. ただし, $\Omega=\Omega_\rho$, $C=C(\varepsilon,k,d)>0$ である.

注意 1.6. 適当なスケール変換により, $\mu\in\mathfrak{M}_k$ と仮定しても一般性を失わない. したがって, 定理 1.5 は一点に十分に凝集している測度に対する領域 Ω の一意存在性とその形状が球に近いことを主張している.

以下の節において定理 1.5 の証明の概要を述べるが, 第 2 節では μ が Dirac 測度の場合に Ω が球であることを証明する. このとき, 良く知られた対称性の議論を用いない別証を与えるが, 第 3 節においてこれを一般化し, μ が対称とは限らない状況でも Ω の一意性を証明できる有効な手段であることをみる. その鍵となる連続的に変化する領域族の存在は, 過剰決定問題 1.4 に付随する "フロー" の導出とその可解性に帰着され, それらは第 4 節において解説する.

2 領域の対称性

本節では, 測度が対称性をもつとき, 特に $\mu = \alpha\delta_0$ $(\alpha > 0)$ であるときに, 過剰決定問題が可解となる領域 Ω もまた球対称であることを示す. この事実自体は既に様々な方法によって証明されているものであるが, ここではパラメーター付き過剰決定問題を考察しそれに対応する領域の族 $\{\Omega(t)\}$ を用いることで元の問題に対する Ω の対称性を証明する. 読者には, この方法が問題の対称性に依存しないことに注意されたい. 特に, 次節以降この方法を発展させることで, μ が対称とは限らない場合においても対応する領域 Ω が一意であることを示す.

命題 2.1 (対称な測度に対する領域の対称性).

(i) $\mu = \omega_N\delta_0$ のとき, (1.3) が可解となる領域は $\Omega = \mathbb{B}$ に限る.

(ii) $\mu = N\omega_N\delta_0$ のとき, (1.4) が可解となる領域は $\Omega = \mathbb{B}$ に限る.

命題 2.1 の証明を述べる前に, この命題と調和函数の平均値の性質の関連性について述べておく. 調和函数 h はその一点での値がそれを中心とする球または球面上の積分平均値と等しいという性質, すなわち

$$\omega_N h(0) = \int_{\mathbb{B}} h\,dx, \qquad N\omega_N h(0) = \int_{\partial\mathbb{B}} h\,d\mathcal{H}^{N-1}$$

をみたす. 特に, $x \notin \overline{\mathbb{B}}$ であるとき $h(y) := E(x-y)$ は $\overline{\mathbb{B}}$ 上で調和であるから, 平均値の性質により (1.1) および (1.2) が $\Omega = \mathbb{B}$ の場合に成立することが分かる. すなわち, $\Omega = \mathbb{B}$ のとき過剰決定問題 (1.3), (1.4) は可解となる. したがって, 残る問題は領域 Ω の一意性となるが, これは等式

$$\omega_N h(0) = \int_{\Omega} h\,dx, \qquad N\omega_N h(0) = \int_{\partial\Omega} h\,d\mathcal{H}^{N-1}$$

がそれぞれ全ての調和函数 h に対して成り立つのは $\Omega = \mathbb{B}$ に限るという主張と同値になり, 全く非自明なものである. なお, 前者の等式については, Epstein [4], Epstein & Schiffer [5], Goldstein & Ow [6], Kuran [10], そして Aharonov & Schiffer & Zalcman [1] によって研究され, $\Omega = \mathbb{B}$ でなければならないことが示されている.

さて, $\Omega = \mathbb{B}$ において (1.3) および (1.4) が可解となることは直接球対称解 u を構成することによっても確認できる. 一方, 領域 Ω の一意性はその対称性を示せば十分であり, (1.3), (1.4) の両方に有効な対称性の議論の代表的なものとして移動平面法 (Serrin [16] 参照) について述べよう. 移動平面法とは, 簡単に述べると, 未知な領域 Ω を超平面, 例えば $H_\lambda = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1 = \lambda\}$, によって分割し, その一方において函数 u 自身と逆側での u の値を超平面に対し反射させて得られる函数 $\tilde{u}$ とを最大値原理によって比較するものである. 切断面の位置 $\lambda \in \mathbb{R}$ を徐々に変化させ, $u < \tilde{u}$ またはその逆が成り立たなくなるような閾値 λ_* に到達すると, その λ_* において $u \equiv \tilde{u}$ でなければならないことが最大値原理により導かれ, したがって領域 Ω が H_{λ_*} に対して対称であることが示される. そして, 超平面の法線方向として x_1 に限らず任意のベクトルを選び上の議論を行うことで, Ω が球対称であることが証明されるのである. この方法による命題 2.1 (i), (ii) の証明の詳細については, それぞれ Gustafsson & Sakai [7], Shahgholian [17] を参照されたい.

以下, 本節の最初で述べたように, 命題 2.1 の別証を与える. (i), (ii) ともに証明は同様であるから, (ii) についてのみ述べることにする. いま, 過剰決定問題 (1.4) ($\mu = N\omega_N\delta_0$) が領域 Ω で解 u をもつと仮定し, 結局 $\Omega = \mathbb{B}$ であることを示そう. そのために, パラメーター t 付き過剰決定問題

$$\begin{cases} -\Delta u = (N\omega_N + t)\delta_0 & (x \in \Omega), \\ \quad u = 0 & (x \in \partial\Omega), \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n} = 1 & (x \in \partial\Omega) \end{cases}$$

を考え, これが $\Omega(t) := B(0, r(t))$ において球対称解 u_t をもつことを注意しておく. ただし, $B(0, r(t))$ は中心が原点で半径が

$$r(t) := \left(1 + \frac{t}{N\omega_N}\right)^{1/(N-1)}$$

の球を表す. このとき, 領域族 $\{\Omega(t)\}_{t\geq 0}$ は $t \geq 0$ に対して連続的に変化する境界 $\partial\Omega(t)$ をもち, $\bigcup_{t\geq 0} \Omega(t) = \mathbb{R}^N$ をみたす. まず, $\Omega \subset \mathbb{B}$ であることを示すために, そうでないと仮定しよう. すると, 領域族 $\{\Omega(t)\}_{t\geq 0}$ の性質からある $t_* > 0$ が存在し

$$\Omega \subset \Omega(t_*), \qquad \partial\Omega \cap \partial\Omega(t_*) \neq \emptyset$$

となる. したがって, $w := u - u_{t_*}$ は Ω 上定義され, そこで劣調和 ($-\Delta w = -t * \delta_0$) であり, 最大値原理から境界 $\partial\Omega$ 上で $w = -u_{t_*} \leq 0$ となる. ここで, $x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega(t_*)$ においては $w(x) = 0 = \max_{\partial\Omega} w$ であるから, Hopf の境界点補題により

$$0 < \frac{\partial w}{\partial n}(x) = \frac{\partial u}{\partial n}(x) - \frac{\partial u_{t_*}}{\partial n}(x) = 1 - 1 = 0$$

となり矛盾が導かれる. よって, $\Omega \subset \mathbb{B}$ を得る. 一方, $\mathbb{B} \subset \Omega$ であることは, $-N\omega_N < t \leq 0$ の場合の領域族 $\{\Omega(t)\}_{-N\omega_N < t \leq 0}$ を用いれば同様の議論により示される. なお, この場合には $r(t) \to 0$ $(t \to -N\omega_N)$ となることに注意されたい.

3 “フロー”による一意性の証明

前節で述べた領域族の考察による Ω の対称性の証明を一般化し, より一般の測度 μ に対する Ω の一意性を示すことが本節の目標である. このとき, 自然な問いとして,

(a) 前節における単位球 $\mathbb{B}$ の役割を演じる領域 Ω_* は?

(b) 前節における球の族 $\{B(0,r(t))\}$ の役割を演じる領域族 $\{\Omega(t)\}$ は?

が挙げられるだろう. 我々はこれらの問いに対して, “フロー” を用いて解答を与える. ここで, Ω_* は単にその上で過剰決定問題 (1.4) が可解となれば良いという訳ではなく, それを出発点として連続的な領域族 $\{\Omega(t)\}$ が生成され得る “良い” 性質をもった領域であることが望まれる. 実際, 前節の議論で用いた $\partial\Omega(t)$ の t についての連続性および $\bigcup_{t\geq 0}\Omega(t)=\mathbb{R}^N$ の二条件をみたす領域族 $\{\Omega(t)\}$ の存在は, 後で詳しく述べるように, 初期領域 Ω_* が球に十分近いという条件下で示される. しかし, 変分法などの抽象的方法による存在定理ではそのような Ω_* の幾何的情報を得るのが難しく, より構成的な方法が必要となる.

いま, 定理 1.5 における仮定のように μ が $N\omega_N\delta_0$ に十分近ければ, 定数 $c>0$ および十分小さなコンパクト台をもつ測度 ν に対して

$$\mu = c\delta_0 + \nu$$

と表される. ここで, $|c-N\omega_N|$ および $\|\nu\|_{\mathfrak{M}}$ は十分小さいものと仮定して良い. このとき, 測度 $c\delta_0$ に対して適当な半径 $r_0>0$ の球 $B(0,r_0)$ が (1.4) の可解性を有する領域として対応することは前節でみた通りである. したがって, 測度 μ に対応する領域 Ω_* は $B(0,r_0)$ の摂動として得られることが期待される. そこで, パラメーター付き測度

$$\mu(t) = c\delta_0 + t\nu \qquad (0\leq t\leq 1) \tag{3.1}$$

を導入し, t が 0 から 1 まで動くときの対応する領域 $\Omega_*(t)$ の挙動を考察する. 特に, $\Omega_*(0)=B(0,r_0)$ となる領域族 $\{\Omega_*(t)\}_{0\leq t\leq 1}$ がこの方法により構成されれば, ν が十分小さいときに領域 $\Omega_*=\Omega_*(1)$ の形状が球に近いことが得られるだろう. 実際, 閉曲面 $\partial\Omega_*(t)$ がなす “フロー” を記述する発展方程式を導出しその力学的性質を詳しく解析することで, 定理 1.5 の一意性を除く結果について得ることができる. “フロー” の導出やその諸性質については次節で詳しく述べるが, より一般の測度

$$\mu(t) := \mu_0 + t\nu_0 \qquad (0\leq t<\infty) \tag{3.2}$$

に対し対応する “フロー” の一意存在性が示される. すなわち, 初期領域 $\Omega(0)$ が μ_0 において (1.4) の可解性を有するという条件下で,

(A) 測度 $\mu(t)$ に対応する連続的に変化する $\Omega(t)$ の時間局所存在;

(B) さらに $\Omega(0)$ が十分に球に近く $\nu_0 = \delta_0$ の場合には, $\Omega(t)$ の時間大域的存在

が示される.

さて, 残る問題は (1.4) の可解性を有する領域 Ω の一意性である. そのような領域の一つとして Ω_* を "フロー" を用いて構成したが, 以下, 領域 Ω において (1.4) が解 u をもつとして $\Omega = \Omega_*$ となることを示そう. 前節の対称性の証明を参考にすると, $\Omega \subset \Omega_*$ であることは連続的に変化する領域族 $\{\Omega(t)\}_{0 \le t < \infty}$ で $\Omega(0) = \Omega_*$ かつ $\bigcup_{0 \le t < \infty} \Omega(t) = \mathbb{R}^N$ となるものの存在からしたがう. そして, これは "フロー" の時間大域存在 (B) によって保証される. 一方, 逆の包含関係 $\Omega_* \subset \Omega$ の証明には困難が生じる. それは "フロー" を記述する発展方程式が抽象的には無限次元空間上の放物型方程式となり, 線形化作用素のスペクトルが非有界であることに起因する. そして, 実際には "セミフロー" しか生成されず, 時間が正の方向への可解性しか示されないのである. そこで, この困難を回避するため, 我々は領域 Ω のアプリオリ評価を導出する.

補題 3.1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 十分小さな $\delta > 0$ が存在し, $\|\mu - N\omega_N\delta_0\|_{\mathfrak{M}} + (\mathrm{diam}\,\mathrm{supp}\,\mu)^{N-1} < \delta$ ならば $B(0, 1-\varepsilon) \subset \Omega$ が成り立つ.

この補題は, $\Omega \subset \Omega_*$ であることと Ω_* が球に十分近いことに注意し, 測度 $c\delta_0$ に対応する球対称領域 $B(0, r_0)$ 上の球対称解 u_0 と u とを最大値原理を用いて比較することにより得られる. その際, u_0 が具体的に表示されることを用いる. なお, 同様の議論を用いて対称性を得る方法を著したものとして, 参考文献 [12] を挙げる. さて, 一意性の証明に戻り, $\Omega_* \subset \Omega$ でないと仮定すると, 補題 3.1 および Ω_* の構成の仕方から, ある $0 < t^* < 1$ が存在し (3.1) で定義される測度 $\mu(t^*)$ に対応する領域 $\Omega_*(t^*)$ で

$$\Omega_*(t^*) \subset \Omega, \qquad \partial\Omega_*(t^*) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$$

となるものが得られる. したがって, 同様の議論から矛盾が導かれ, 結果として $\Omega_* \subset \Omega$ も証明される.

4 "フロー" の導出とその可解性

本節では, 前節で定理 1.5 を証明する上で重要な役割を演じた "フロー" を記述する発展方程式がいかに導出されるかを示し, その "フロー" に関して得られる結果について詳細には立ち入らずに証明の概略について述べる. 以下に述べる "フロー" の導出は形式的なものであるが, 他の関連する問題においても有効な一般的なものである.

いま, パラメーター付き測度 (3.2) に対し, μ_0 および ν_0 は有界領域 Ω_0 内にコンパクトな台をもつ測度であるとし, また Ω_0 は μ_0 に対して (1.4) の可解性を有するものとする. すなわち, 過剰決定問題

$$(4.1)\qquad \begin{cases} -\Delta u_0 = \mu_0 & (x \in \Omega_0), \\ u_0 = 0 & (x \in \partial\Omega_0), \\ -\dfrac{\partial u_0}{\partial n} = 1 & (x \in \partial\Omega_0) \end{cases}$$

は解 u_0 をもつとする. 測度 $\mu(t)$ に対応する領域 $\Omega(t)$ の挙動をみるため, その境界 $\partial\Omega(t)$ の外向き法線方向への成長速度を v_n で表す. このとき, パラメーター (時刻) t が 0 から $\varepsilon > 0$ へと動いたときの $\partial\Omega(\varepsilon)$ および対応する (1.4) の解 u_ε を

$$(4.2)\qquad \begin{aligned} \partial\Omega(\varepsilon) &= \partial\Omega_0 + \varepsilon v_n n + O(\varepsilon^2), \\ u_\varepsilon(x) &= u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

と形式的に展開しておく. ただし, $n = n_{\partial\Omega_0}$ は $\partial\Omega_0$ に対する外向き法線ベクトルである. そこで, $\mu = \mu(\varepsilon)$ に対する (1.4) の Ω と u による可解性から, v_n および u_1 がみたすべき方程式を導出しよう. 実際, (3.2) および (4.2) を (1.4) へ代入し (4.1) を用いることで,

$$-\varepsilon\Delta u_1 = \varepsilon\nu_0 + O(\varepsilon^2) \qquad (x \in \Omega_0),$$

$$\begin{aligned} 0 = u(x + \varepsilon v_n n, t) &= u_0(x + \varepsilon v_n n) + t u_1(x + \varepsilon v_n n) + O(\varepsilon^2) \\ &= u_0(x) + \varepsilon v_n \frac{\partial u_0}{\partial n}(x) + \varepsilon u_1(x) + O(\varepsilon^2) \\ &= -\varepsilon v_n + \varepsilon u_1(x) + O(\varepsilon^2) \qquad (x \in \partial\Omega_0), \end{aligned}$$

および $\partial\Omega_0$ のある接ベクトル τ に対して

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial n_{\partial\Omega(t)}}(x + \varepsilon v_n n, \varepsilon) + 1 + O(\varepsilon^2) \\ &= \frac{\partial u}{\partial n}(x + \varepsilon v_n n, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \tau}(x + \varepsilon v_n n, \varepsilon) + 1 + O(\varepsilon^2) \\ &= \frac{\partial u_0}{\partial n}(x + \varepsilon v_n n) + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial n}(x + \varepsilon v_n n) + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial \tau}(x + \varepsilon v_n n) + 1 + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon v_n \frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2}(x) + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial n}(x) + O(\varepsilon^2) \qquad (x \in \partial\Omega_0) \end{aligned}$$

が得られる. さらに, 二階微分 $\partial^2 u_0/\partial n^2$ に対しては

$$\begin{aligned} 0 = \Delta u_0 &= \Delta_{\partial\Omega_0} u_0 + \frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2} + H \frac{\partial u_0}{\partial n} \\ &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2} - H \qquad (x \in \partial\Omega_0) \end{aligned}$$

が成り立つことを注意しておく. ここで, $\Delta_{\partial\Omega_0}$ は $\partial\Omega_0$ 上の Laplace-Beltrami 作用素であり, $H = H_{\partial\Omega_0}$ は $\partial\Omega_0$ の平均曲率 (ただし, 単位球面 $\mathbb{S}^{N-1}$ に対して $H = N-1$ となるように正規化する) である. したがって, 上記のそれぞれの等式において ε についての高次の項を無視すると, v_n に関する次の方程式が得られる:

$$v_n = u_1 \qquad (x \in \partial\Omega_0).$$

ただし, u_1 は楕円型方程式

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \nu_0 & (x \in \Omega_0), \\ Hu_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial n} = 0 & (x \in \partial\Omega_0) \end{cases}$$

の解である. このようにして構成される曲面 $\partial\Omega_0 + \varepsilon v_n n$ は $\partial\Omega(\varepsilon)$ の近似とみなすことができる. この近似曲面の構成を繰り返し行うことで, $\partial\Omega(2\varepsilon), \partial\Omega(3\varepsilon), \ldots$ の近似およびそれに付随する摂動函数 $u_2, u_3, \ldots$ が得られる. 原理的には, この方法により, 測度 $\mu(t)$ に対する (1.4) の可解性を有する領域 $\Omega(t)$ の近似が構成され, 対応する解 u_t は

$$u_0 + \varepsilon\,(u_1 + u_2 + \cdots + u_l) \qquad (t = l\varepsilon)$$

により近似される. 時間刻み幅 $\varepsilon > 0$ を小さくすればする程それらの近似の精度が上がるため, その極限 $\varepsilon \to 0$ として, 曲面 $\partial\Omega(t)$ に関する次の方程式を得る:

$$\tag{4.3} \begin{aligned} & v_n = p \qquad (x \in \partial\Omega(t)), \\ & \begin{cases} -\Delta p = \nu_0 & (x \in \Omega(t)), \\ Hp + \dfrac{\partial p}{\partial n} = 0 & (x \in \partial\Omega(t)). \end{cases} \end{aligned}$$

ただし, v_n は $\partial\Omega(t)$ の外向き法線方向の符号付き速度を表す. また, $\mu(t)$ に対する (1.4) の解 u_t は

$$u_t(x) := u_0(x) + \int_0^t p(x,s)\,ds$$

により得られる. 以上の議論は各曲面 $\partial\Omega(t)$ の平均曲率 H が正であるという幾何的条件下で数学的に正当化される. すなわち以下の補題が成り立つ. ただし, $\{\partial\Omega(t)\}_{0\le t<T}$ が $C^{3+\alpha}$ 級曲面族 $(0 < \alpha < 1)$ であるとは, 各曲面 $\partial\Omega(t)$ が各点の近傍において局所的に $C^{3+\alpha}$ 級の函数によってグラフ表示され, その時間微分が $C^{2+\alpha}$ 級であることを指す.

補題 4.1 (Onodera [11]). 各曲面の平均曲率が至る所正であるような $C^{3+\alpha}$ 級曲面族 $\{\partial\Omega(t)\}_{0\le t<T}$ に対し, 次の二条件は同値である:

(i) $\{\partial\Omega(t)\}_{0\le t<T}$ は (4.3) の解である;

(ii) 各領域 $\Omega(t)$ において, 測度 (3.2) に対する (1.4) は可解である.

補題 4.1 によって, 前節の議論で用いられた連続的に変化する曲面族の存在は (4.3) の一意可解性に帰着される. さらに, 境界 $\partial\Omega(t)$ をある固定された超曲面 Γ からの摂動としてリトル Hölder 空間 $h^{3+\alpha}(\Gamma)$ 上の函数として表示することで, 曲面の方程式 (4.3) は $h^{3+\alpha}(\Gamma)$ 上の発展方程式とみなされる. ただし, $h^{3+\alpha}(\Gamma)$ は $C^\infty(\Gamma)$ の $C^{3+\alpha}(\Gamma)$ における完備化空間である. Da Prato と Grisvard による最大正則性理論を援用することで発展方程式の一意可解性はその線形化作用素が解析的半群を生成することに帰着され, それは線形化作用素の主要部が Γ の各点近傍において局所的に一階の擬微分作用素で近似されることとその擬微分作用素の解析によって示される.

補題 4.2 (Onodera [11]). 平均曲率が至る所正であるような $h^{3+\alpha}$ 級の初期曲面 $\partial\Omega(0)$ に対し, $h^{3+\alpha}$ 級の (4.3) の時間局所解 $\{\partial\Omega(t)\}_{0\leq t<T}$ が一意に存在する.

注意 4.3. 補題 4.2 において, $h^{3+\alpha}$ を任意の正数 $d\geq 3$ に対する $h^{d+\alpha}$ としても結果はそのまま成り立つ. このことは解析的半群の生成性が空間の補完に対して不変であることからしたがう.

補題 4.1, 4.2 に現れる幾何的条件 $H>0$ は (4.3) が意味をもつために必要な (4.3) 中の楕円型方程式の一意可解性という解析的条件からくる自然なものであり, それは対応する二次形式

$$B(p,q) := \int_\Omega \nabla p\cdot\nabla q\,dx + \int_{\partial\Omega} Hpq\,d\mathcal{H}^{N-1} \qquad (\Omega=\Omega(t))$$

の Sobolev 空間 $H^1(\Omega)$ における強圧性と言っても良い. また, $H>0$ であれば最大値原理から $p>0$ $(x\in\partial\Omega(t))$ であることが導かれる. 実際, p の $\partial\Omega(t)$ 上の最小点 $x\in\partial\Omega(t)$ において $p(x)\leq 0$ とすると, Hopf の境界点補題より

$$0 > \frac{\partial p}{\partial n}(x) = -Hp(x) \geq 0$$

となり矛盾が生じる. したがって, $H>0$ である限り "フロー" (4.3) によって領域 $\Omega(t)$ は単調に拡大していくことが分かる.

さて, 前節で用いられた議論では (4.3) の時間局所可解性だけでは不十分であり, 実際には解の最大存在時刻 $T>0$ に対する評価が必要である. まず Ω_* の構成で必要となる $\Omega_0=B(0,r_0)$ および $\nu_0=\nu$ に対する最大存在時刻の一様評価 $T\geq 1$ については, 最大正則性を用いた発展方程式の解の存在の証明を細部に注意して確認することで確かめられる. 一方, 一意性の証明で鍵となる $\mathbb{R}^N$ を被覆する領域族 $\{\Omega(t)\}_{t\geq 0}$ の存在を保証するためには, $\Omega_0=\Omega_*$ および $\nu_0=\delta_0$ に対する時間大域解の存在が必要になる. これについては, Ω_* が十分球に近いことに注意し, (4.3) の球対称解 (時間大域解) における線形化作用素のスペクトルの分布を調べ, それが漸近安定であることを確かめることにより得られる.

最後に, 定理 1.5 において $\Omega = \Omega_*$ が評価 (1.5) をみたすことについては, Ω_* の構成の際し, 適当なスケール変換を行い, $\eta_0 \to 0$ のときの Ω_* の漸近形状を求める問題を初期領域 Ω_0 が十分球に近く $\nu_0 = \delta_0$ の場合の $\Omega(t)$ の $t \to \infty$ のときの漸近形状を求める問題に帰着することにより得られる. このとき, j 次調和多項式の空間 H_j の基底を $\{h_{j,k}\}_{k=1}^{\dim H_j}$ とすると,

$$m_{j,k}(\partial\Omega(t)) := \int_{\partial\Omega(t)} h_{j,k}\, d\mathcal{H}^{N-1}$$

が (4.3) の可算無限個の保存量となり, それにより (4.3) の不変多様体が特徴付けられる. したがって, その各不変多様体上での解の漸近挙動を考察することによって, より高い次数の対称性をもつ測度 μ に対する $\Omega = \Omega_*$ がより良い評価 (1.5) をもつことが示される. 詳細については参考文献 [13] に譲ることにする.

参考文献

[1] Aharonov, Dov; Schiffer, M. M.; Zalcman, Lawrence, Potato kugel. *Israel J. Math.* **40** (1981), no. 3–4, 331–339 (1982).

[2] Alt, H. W.; Caffarelli, L. A., Existence and regularity for a minimum problem with free boundary. *J. Reine Angew. Math.* **325** (1981), 105–144.

[3] Beurling, A., On free-boundary problems for the Laplace equation. *Sem. on Analytic Funcitons* **1**, Inst. for Advanced Study Princeton (1957), 248–263.

[4] Epstein, Bernard, On the mean-value property of harmonic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* **13** (1962) 830.

[5] Epstein, Bernard; Schiffer, M. M., On the mean-value property of harmonic functions. *J. Analyse Math.* **14** (1965) 109–111.

[6] Goldstein, Myron; Ow, Wellington H., On the mean-value property of harmonic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* **29** (1971) 341–344.

[7] Gustafsson, B.; Sakai, M., Properties of some balayage operators, with applications to quadrature domains and moving boundary problems. *Nonlinear Anal.* **22** (1994), no. 10, 1221–1245.

[8] Gustafsson, B.; Shahgholian, H., Existence and geometric properties of solutions of a free boundary problem in potential theory. *J. Reine Angew. Math.* **473** (1996), 137–179.

[9] Henrot, A., Subsolutions and supersolutions in free boundary problems. *Ark. Mat.* **32** (1994), 79–98.

[10] Kuran, Ü., On the mean-value property of harmonic functions. *Bull. London Math. Soc.* **4** (1972), 311–312.

[11] Onodera, M., Geometric flows for quadrature identities. *Math. Ann.* **361** (2015), no. 1–2, 77–106.

[12] Onodera, M., On the symmetry in a heterogeneous overdetermined problem. *Bull. Lond. Math. Soc.* **47** (2015), no. 1, 95–100.

[13] Onodera, M., On rigidity of the mean value formula for harmonic functions. *preprint.*

[14] Sakai, M., Quadrature Domains. Lecture Notes in Mathematics, 934. *Springer-Verlag, Berlin-New York*, 1982.

[15] Sakai, M., Application of variational inequalities to the existence theorem on quadrature domains. *Trans. Amer. Math. Soc.* **276** (1983), 267–279.

[16] Serrin, James, A symmetry problem in potential theory. *Arch. Rational Mech. Anal.* **43** (1971), 304–318.

[17] Shahgholian, Henrik, Quadrature surfaces as free boundaries. *Ark. Mat.* **32** (1994), no. 2, 475–492.