数理解析研究所講究録
第 1980 巻 2016 年 184-199

標本化定理と拡張擬似双直交基底

Sampling Theorems and Extended Pseudobiorthogonal Bases

東京工業大学名誉教授・東京福祉大学教育学部　小川英光
Hidemitsu Ogawa
Tokyo Institute of Technology, Emeritus Professor
Tokyo University of Social Welfare
hiogawa@ed.tokyo-fukushi.ac.jp

1　はじめに

標本化定理は，関数のある種の基底による展開であるとみなすことができる．その基底を正規直交基底に限れば，狭い範囲の標本化定理しか構成できない．標本点のとり方にも強い制約が加わる．これに対して，正規直交基底を正規双直交基底に拡張すれば，再生核が零点をもたないような空間に対しても標本化定理を構成できるし，標本点をもう少し自由にとることができる．しかし，あくまでも標本化定理に現れる関数系は 1 次独立になっていなければいけない．

ところで，標本点が観測システムから自動的に与えられる場合もある．そのようなとき，標本点の数が多すぎることもあれば，少なすぎることもある．前者を過剰標本化 (over-sampling) といい，後者を過少標本化 (under-sampling) という．これらの問題を扱うためには，標本化基底の概念を 1 次従属な関数系に拡張する必要がある．正規直交基底の概念を 1 次従属な系に拡張したものが擬似直交基底であり，正規双直交基底の概念を 1 次従属な系に拡張したものが擬似双直交基底である．これらの基底を使えば，非常に広い範囲の標本化定理を統一的に構成することができる．また，標本化定理に関連した性質である補間と最良近似の関係も明らかにできる．

しかし，これだけではまだ不十分である．擬似双直交基底の範囲では論じることのできない標本化定理も存在する．標本化定理に現れる関数系を，表現したい関数が属する空間の外から選ぶ場面も考えなければいけない．擬似双直交基底の概念をさらに拡張した拡張擬似双直交基底を使えば，このような問題にも適用できる．

本論文では，考え方を整理するために，まず正規直交基底による標本化定理および正規双直交基底による標本化定理といういわゆる古典的標本化定理から話を始める．そして，順次，擬似直交基底，擬似双直交基底，および拡張擬似双直交基底による標本化定理へと議論を進めていく．

2　正規直交基底 (ONB) による標本化定理

標本化定理を現実の問題に応用しようとすれば，有限個の標本点しか扱うことができない．そこで，1 次元または多次元ユークリッド空間の部分集合 $\mathcal{D}$ 上で定義された複素数値関数で構成される有限次元ヒルベルト空間 H_0 を考える．H_0 の次元を N で表す．H_0 の正規直交基底 (ONB) $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ を使って，H_0 の任意の元は，

$$f=\sum_{n=1}^{N}\langle f,\phi_n\rangle\phi_n \qquad : f\in H_0 \tag{1}$$

と表される．この式に現れる内積 $\langle f,\phi_n\rangle$ が，$\mathcal{D}$ 上の点 $\{x_n\}_{n=1}^N$ と重み係数 $\{w_n\}_{n=1}^N$ を用いて，

$$\langle f,\phi_n\rangle = w_n f(x_n) \qquad : 1\le n\le N \tag{2}$$

と表されるとき，$\{\phi_n\}_{n=1}^N$ を H_0 の正規直交標本化基底 (orthonormal sampling basis) といい，$\{x_n\}_{n=1}^N$ を標本点という．また，$\{w_n\}_{n=1}^N$ を正規直交標本化基底 $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ の重み係数という．標本点 $\{x_n\}_{n=1}^N$ は等間隔であってもよいし，不等間隔であってもよい．このとき，(1) は，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} w_n f(x_n)\phi_n(x) \qquad : f \in H_0 \tag{3}$$

となる．(3) を ONB による標本化定理あるいは単に標本化定理という．

H_0 は有限次元ヒルベルト空間であるから，必ず再生核が存在する．その再生核を使って，正規直交標本化基底の存在性を次のように特徴付けることができる．

定理 1 H_0 に正規直交標本化基底 $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ が存在するための必要十分条件は，H_0 の再生核 $K(x,x')$ と $1 \leq m,n \leq N$ なる整数 m, n に対して，

$$K(x_n,x_n) \neq 0, \qquad K(x_m,x_n) = 0 \quad : m \neq n \tag{4}$$

を満たす $\mathcal{D}$ 上の点 $\{x_n\}_{n=1}^N$ が存在することである．このとき，$\{w_n\}_{n=1}^N$ および $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ は，

$$|w_n|^2 = \frac{1}{K(x_n,x_n)}, \qquad \phi_n(x) = \overline{w_n}K(x,x_n) \tag{5}$$

で与えられる．

証明 $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ を，$\{w_n\}_{n=1}^N$ を重み係数とする H_0 の正規直交標本化基底とする．(2) より，任意の $f \in H_0$ に対して，

$$\langle f, \phi_n \rangle = w_n f(x_n) = w_n \langle f, K(\cdot, x_n)\rangle$$

となる．よって，$\langle f, \phi_n - \overline{w_n}K(\cdot,x_n)\rangle = 0$ となり，(5) の第二式が成立する．正規直交標本化基底の重み係数は非零であるから，(5) の ϕ_n に対して，

$$|w_n|^2 K(x_m,x_n) = w_n\phi_n(x_m) = \frac{w_n}{w_m}(w_m\phi_n(x_m)) = \frac{w_n}{w_m}\langle \phi_n, \phi_m\rangle = \delta_{m,n}$$

となり，(5) の第一式と (4) が成立する．

逆に (4) を満たす標本点 $\{x_n\}_{n=1}^N$ が存在したとする．このとき，(5) によって $\{w_n\}_{n=1}^N$ および $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ を定義すれば，

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \langle \overline{w_n}K(\cdot,x_n), \overline{w_m}K(\cdot,x_m)\rangle = w_m\overline{w_n}K(x_m,x_n) = \delta_{m,n}$$

となり，$\{\phi_n\}_{n=1}^N$ は H_0 の ONB になる．この ONB に対して (2) が成立することは，(5) より明らかである． ■

H_0 の再生核 $K(x,x')$ が，ある点 $x_0 \in \mathcal{D}$ に対して $K(x_0,x_0) = 0$ となるための必要十分条件は，x_0 が H_0 のすべての元 f に対する共通の零点になることである．したがって，標本化定理の立場からみれば，(4) の第一式は自然な条件である．また，(4) の第二式は，$\{\phi_n\}_{n=1}^N$ の直交性を要請するものである．

3 正規双直交基底 (BONB) による標本化定理

表現したい信号が属する空間 H_0 に定理 1 の条件を満す再生核がが存在しない場合がある．また，与えられた標本点の組 $\{x_n\}_{n=1}^N$ が条件 (4) を満たさない場合もある．正規直交基底を正規双直交基底に拡張することにより，このような場合にもある程度対応できるようにする．

3.1 正規双直交基底 (BONB)

H_0 の元 $\{\phi_n, \phi_n^*\}_{n=1}^N$ が,

$$\langle \phi_m^*, \phi_n \rangle = \delta_{m,n} \qquad : 1 \leq m, n \leq N \tag{6}$$

を満たすとき, $\{\phi_n, \phi_n^*\}_{n=1}^N$ を H_0 の正規双直交基底 (BiOrthoNormal Basis) といい, BONB と略記する. $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ が1次独立のとき, (6) を満たす $\{\phi_n^*\}_{n=1}^N$ が常に存在し, 一意に定まる. $\{\phi_n^*\}_{n=1}^N$ を $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ の双対基という.

BONB を使えば, H_0 の元 f を,

$$f = \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n^* \rangle \phi_n \qquad : f \in H_0 \tag{7}$$

と表すことができる. (7) で $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ と $\{\phi_n^*\}_{n=1}^N$ を交換することができる. したがって, $\{\phi_n^*\}_{n=1}^N$ の双対基は $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ になる.

3.2 BONB による標本化定理

(7) に現れる内積 $\langle f, \phi_n^* \rangle$ が, $\mathcal{D}$ 上の点 $\{x_n\}_{n=1}^N$ と重み係数 $\{w_n\}_{n=1}^N$ を用いて,

$$\langle f, \phi_n^* \rangle = w_n f(x_n) \qquad : 1 \leq n \leq N \tag{8}$$

と表されるとき, $\{\phi_n, \phi_n^*\}_{n=1}^N$ を H_0 の正規双直交標本化基底 (biorthonormal sampling basis) という. このとき, (7) は,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} w_n f(x_n) \phi_n(x) \qquad : f \in H_0 \tag{9}$$

となる. (9) を BONB による標本化定理あるいは単に標本化定理という. $\{\phi_n^*\}_{n=1}^N$ を標本化関数といい, $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ を再構成関数という.

なお, 正規双直交標本化基底の重み係数は非零であるから, (8) を満たす $\{\phi_n, \phi_n^*\}_{n=1}^N$ に対して,

$$\psi_n = w_n \phi_n, \qquad \psi_n^* = \frac{1}{\overline{w_n}} \phi_n^* \qquad : 1 \leq n \leq N \tag{10}$$

とおけば, $\{\psi_n, \psi_n^*\}_{n=1}^N$ は正規双直交標本化基底になり,

$$\langle f, \psi_n^* \rangle = f(x_n), \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \psi_n(x) \tag{11}$$

となる. したがって, (8) で $w_n = 1$ $(1 \leq n \leq N)$ の場合を考えても一般性を失うことはない.

ONB による標本化定理と BONB による標本化定理をあわせて古典的標本化定理とよぶことにする.

定理 2 $\{x_n\}_{n=1}^N$ を $\mathcal{D}$ 上の点とし, H_0 の再生核 $K(x, x')$ に対して, 第 m, n 成分が $K(x_m, x_n)$ で与えられる $N \times N$ 行列を $K = (K_{m,n})$ で表す. H_0 に正規双直交標本化基底 $\{\phi_n, \phi_n^*\}_{n=1}^N$ が存在するための必要十分条件は, 行列 K が正則になるような点 $\{x_n\}_{n=1}^N$ が存在することである. そしてこのとき, K の逆行列を $K^{-1} = (K^{(m,n)})$ で表し,

$$\phi_n^*(x) = K(x, x_n), \qquad \phi_n(x) = \sum_{l=1}^{N} K^{(l,n)} \phi_l^*(x) \qquad : 1 \leq n \leq N \tag{12}$$

とおけば, $\{\phi_n, \phi_n^*\}_{n=1}^N$ は H_0 の正規双直交標本化基底になる.

4 擬似直交基底 (POB) による標本化定理

4.1 擬似直交基底 (POB)

標本点の数が信号空間に対して多すぎる場合を過剰標本化という．このような状況に対応するために，(1)–(3) を 1 次従属な場合へ拡張する．M を N 以上の任意に固定した整数とし，$\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ を H_0 の元の集合とする．H_0 の任意の元が，(1) と同じ形式で，

$$f = \sum_{m=1}^{M} \langle f, \phi_m \rangle \phi_m \qquad : f \in H_0 \tag{13}$$

と表されるとき，$\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ を H_0 の擬似直交基底 (PseudoOrthogonal Basis) といい，POB と略記する [3]．POB は一般には 1 次従属な系であるにも関わらず，ONB のもつ多くの性質を保存している．たとえば，パーセバルの等式や H_0 の再生核 $K(x, x')$ との関係は，

$$\|f\|^2 = \sum_{m=1}^{M} |\langle f, \phi_m \rangle|^2 \qquad : f \in H_0 \tag{14}$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{m=1}^{M} \langle f_1, \phi_m \rangle \overline{\langle f_2, \phi_m \rangle} \qquad : f_1, f_2 \in H_0 \tag{15}$$

$$K(x, x') = \sum_{m=1}^{M} \phi_m(x) \overline{\phi_m(x')} \tag{16}$$

と，ONB の場合と同じ形式で成立する．これらの各式は，$\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ が H_0 の POB になるための必要十分条件になっている．

4.2 POB とフレーム

H_0 の元 $\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ を考える．任意の $f \in H_0$ に対して，

$$\alpha \|f\|^2 \leq \sum_{m=1}^{M} |\langle f, \phi_m \rangle|^2 \leq \beta \|f\|^2 \tag{17}$$

が成立するような f によらない正の定数 α, β が存在するとき，$\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ を H_0 のフレーム (frame) といい，α, β をフレーム限界という．$\alpha = \beta$ のとき，$\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ をタイトフレーム (tight frame) といい，$\alpha = \beta = 1$ のとき，正規化されたタイトフレーム (normalized tight frame) という [1]．(14) より，POB と正規化されたタイトフレームが同じものであることがわかる．

4.3 POB による標本化定理

(13) に現れる内積 $\langle f, \phi_m \rangle$ が，$\mathcal{D}$ 上の点 $\{x_m\}_{m=1}^{M}$ と重み係数 $\{w_m\}_{m=1}^{M}$ を用いて，

$$\langle f, \phi_m \rangle = w_m f(x_m) \qquad : 1 \leq m \leq M \tag{18}$$

と表されるとき，$\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ を H_0 の擬似直交標本化基底 (pseudoorthognoal sampling basis) という．

このとき，(13) は，

$$f(x) = \sum_{m=1}^{M} w_m f(x_m)\phi_m(x) \qquad : f \in H_0 \tag{19}$$

となる．(19) を POB による標本化定理あるいは単に標本化定理という．

擬似直交標本化基底を構成するためには，たとえば次のようにすればよい．H_0 を含む M 次元ヒルベルト空間で，(4) に対応する条件を満たすものを H_0' で表す．$\{\psi_m\}_{m=1}^{M}$ を，$f \in H_0'$ に対して $\langle f, \psi_m \rangle = w_m f(x_m)$ $(1 \le m \le M)$ となる H_0' の正規直交標本化基底とする．H_0' から H_0 への正射影作用素 P を用いて

$$\phi_m = P\psi_m \qquad : 1 \le m \le M$$

とおけば，$\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ は H_0 の擬似直交標本化基底になり，(18), (19) が成立する．

例 3 区間 $[0, 2\pi]$ で定義された関数 $\varphi_n(x) = \exp(inx)$ $(n = 0, \pm 1, \ldots, \pm N)$ で張られる空間に，内積

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x \tag{20}$$

を導入したものを N 次以下の三角多項式空間といい，T_N で表す．L を $L \ge 2N+1$ なる任意に固定した整数とし，$x_m = 2\pi m/L$ $(0 \le m \le L-1)$ とおく．

$$\phi_m(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{\sin \frac{2N+1}{2}(x - x_m)}{\sin \frac{1}{2}(x - x_m)} \qquad : 0 \le m \le L-1 \tag{21}$$

で定義される関数系 $\{\phi_m\}_{m=0}^{L-1}$ は T_N の擬似直交標本化基底になり，

$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_{m=0}^{L-1} f(x_m) \frac{\sin \frac{2N+1}{2}(x - x_m)}{\sin \frac{1}{2}(x - x_m)} \tag{22}$$

なる標本化定理が成立する．

T_N は $2N+1$ 次元の空間である．一方，標本点数 L は奇数であってもよいし，偶数であってもよい．この性質によって，(22) の標本化定理は，地上ディジタル放送方式や無線 LAN などの通信の分野 [8] や，CT 画像再構成問題の分野 [2] などで使われている．

このように，$M > N$ のとき，(4) に対応する条件を満たすような空間 H_0' $(\supseteq H_0)$ が存在すれば，過剰標本化の問題にも，正規直交標本化基底と同じ形式で対応できるのである．しかし，これだけではまだ十分でない．適用範囲を広げるために，次節で擬似双直交基底の概念を導入する．

5 擬似双直交基底 (PBOB) による標本化定理

5.1 擬似双直交基底 (PBOB)

擬似双直交基底とは，正規双直交基底 (BONB) の概念を 1 次従属な系に拡張したものである．M を N 以上の任意に固定した整数とし，$\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^{M}$ を H_0 の元の集合とする．H_0 の任意の元

が，(7) と同じ形式で，

$$f = \sum_{m=1}^{M} \langle f, \phi_m^* \rangle \phi_m \qquad : f \in H_0 \tag{23}$$

と表されるとき，$\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^{M}$ を H_0 の擬似双直交基底 (PseudoBiOrthogonal Basis) といい，PBOB と略記する．$\{\phi_m^*\}_{m=1}^{M}$ を $\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ の双対基という．$M > N$ のとき，$\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ に対する双対基 $\{\phi_m^*\}_{m=1}^{M}$ は無限種類存在する [4],[6].

BONB の場合と同様に，(23) で $\{\phi_m^*\}_{m=1}^{M}$ と $\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ を交換することができ，

$$f = \sum_{m=1}^{M} \langle f, \phi_m \rangle \phi_m^* \qquad : f \in H_0 \tag{24}$$

が成立する．したがって，$\{\phi_m^*\}_{m=1}^{M}$ の双対基は $\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ となる．パーセバルの等式や H_0 の再生核 $K(x, x')$ との関係は，

$$\|f\|^2 = \sum_{m=1}^{M} \langle f, \phi_m \rangle \overline{\langle f, \phi_m^* \rangle} \qquad : f \in H_0 \tag{25}$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{m=1}^{M} \langle f_1, \phi_m \rangle \overline{\langle f_2, \phi_m^* \rangle} \qquad : f_1, f_2 \in H_0 \tag{26}$$

$$K(x, x') = \sum_{m=1}^{M} \phi_m^*(x) \overline{\phi_m(x')} \tag{27}$$

と，正規双直交基底の場合と同じ形式で成立する．これらの各式は，$\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^{M}$ が H_0 の PBOB になるための必要十分条件になっている．

5.2 PBOB とフレーム

4.2 節で述べたように，POB と正規化されたタイトフレームは同じものであった．それでは，一般のフレームとの関係はどうであろうか．

(23) より，$\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^{M}$ が H_0 の PBOB ならば，$\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ は全空間 H_0 を張らなければいけない．逆に，$\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ が全空間を張れば，必ず双対基 $\{\phi_m^*\}_{m=1}^{M}$ が存在し，PBOB$\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^{M}$ を構成することできる．

同様に，H_0 は有限次元空間であるから，(17) より，$\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^{M}$ が H_0 のフレームになることと，$\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ が全空間を張ることとは等価になる．すなわち，有限次元の空間に対して，PBOB とフレームは本質的には同じものになっている．ただし，PBOB が $\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^{M}$ に対して与えられた名称であるのに対して，フレームは $\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ だけに対する名称になっていることは注意を要する．このことは，6 節で拡張擬似双直交基底を論じるときに重要になってくる．

一般に，ヒルベルト空間 H_1, H_2 の任意に固定した元 $f \in H_1$，$g \in H_2$ に対して，

$$(f \otimes \overline{g})h = \langle h, g \rangle f \qquad : h \in H_2$$

により定義される作用素 $f \otimes \overline{g}$ を，f と g のノイマン・シャッテン積 (von Neumann–Schatten product) という．$f \otimes \overline{g}$ の $\overline{g}$ は，g の複素共役ではなく，ノイマン・シャッテン積の記号の一部である．$f \otimes \overline{g}$ は H_2 から H_1 への有界線形作用素であり，$(f \otimes \overline{g})^* = g \otimes \overline{f}$ となる [7].

フレーム $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ に対して,

$$T = \sum_{m=1}^{M} (\phi_m \otimes \overline{\phi_m}) \tag{28}$$

で定義される作用素 T をフレーム作用素 (frame operator) という．フレーム作用素は正則であり，正定値自己共役になる．

補題 4 任意の $f \in H_0$ は，フレーム $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を用いて，

$$f = \sum_{m=1}^{M} \langle f, T^{-1}\phi_m \rangle \phi_m = \sum_{m=1}^{M} \langle f, \phi_m \rangle T^{-1}\phi_m \tag{29}$$

と表すことができる [1].

(29) に現れる $\{T^{-1}\phi_m\}_{m=1}^M$ を正準双対フレーム (canonical dual frame) という．擬似双直交性理論を使えば，正準双対フレーム以外にも多くの双対基を構成することができる [4],[6].

5.3 標本化定理の問題の定式化

標本化定理の問題を現実に即した形で再定式化する．1 次元または多次元の領域 $\mathcal{D}$ 上で定義された複素数値関数で構成される無限次元または有限次元ヒルベルト空間 H を考える．標本化定理の問題は，素朴には，H の関数 f をその標本値から再構成する問題である．しかし，現実の応用場面を考えると，f の標本値を直接観測することはできない．何らかの観測装置を通して標本値を得ることになる．ある観測装置を通して f を観測したものを g で表し，g の定義域を $\mathcal{D}'$ で表す．g は再生核ヒルベルト空間 H' に属するものとする．観測装置の入出力関係を A_1 で表せば，$g = A_1 f$ となる．A_1 は，H から H' への有界線形作用素とする．

H' は必ずしも H と一致している必要はない．たとえば，f が帯域制限されていなくても，A_1 がいわゆる低域通過型フィルタの場合，g は帯域制限されることになる．この場合，H' は H の部分空間になり，H が再生核をもたなくても，H' は再生核ヒルベルト空間になる．さらに，CT 画像再構成問題のように，H' が H と完全に異なる場合もある．

さて，$\mathcal{D}'$ 上の有限個の標本点 $\{y_m\}_{m=1}^M$ を考える．標本値 $\{g(y_m)\}_{m=1}^M$ からできる M 次元ベクトルを $\boldsymbol{g}$ で表し，標本値ベクトルとよぶ．関数 g をベクトル $\boldsymbol{g}$ に変換する作用素を A_2 で表し，標本化作用素とよぶ．すなわち，$\boldsymbol{g} = A_2 g$ である．A_1 と A_2 を合成した作用素を A で表す．すなわち，$A = A_2 A_1$ である．A は関数 f を標本値ベクトル $\boldsymbol{g}$ に変換する作用素であり，$\boldsymbol{g} = Af$ となる．A を観測作用素とよぶ．有限個の標本点を使っている限り，A_2 の像 $\mathrm{Im}(A_2)$ は有限次元になり，閉じている．したがって，$\mathrm{Im}(A)$ も $\mathrm{Im}(A^*)$ も閉じている．

標本化定理を構成するということは，標本値ベクトル $\boldsymbol{g} \in \mathbf{C}^M$ から元信号 $f \in H$，あるいは，その最良近似を推定する方法を求めることである．H 上の恒等作用素を I で表す．$H = H'$ かつ $A_1 = I$ のとき，その標本化定理を理想的パルスによる標本化定理という．$A_1 \neq I$ であったり，さらには H と H' が等しくないとき，その標本化定理を現実的パルスによる標本化定理という．

前述のように，現実の問題では有限個の標本点 $\{y_m\}_{m=1}^M$ しか扱うことができない．したがって，H が無限次元空間であったり，あるいは，有限次元であっても標本点数に比して大きすぎる空間である場合は，H の元をすべて厳密に再構成することはできない．標本化定理によって厳密に再構成できる関数は H の有限次元部分空間の元に限られてしまう．本論文では，H の元をすべて対

等に扱うことにする．このような状況で，H の有限次元部分空間をどのように選べばよいであろうか．ここでは，次のような部分空間 S を採用することにする．

[部分空間 S に対する要請]

(i) S に属する f を厳密に再構成できること．

(ii) S に属さない f に対しては，f の S における最良近似を求めることができること．

f が分からないにもかかわらず，$\boldsymbol{g}$ だけから上記の要請を満たすことができるであろうか．この問題を数学的に考えれば次のようになる．S を H の閉部分空間とし，S への正射影作用素を P_S で表す．$f \in H$ の S における最良近似は $P_S f$ で与えられる．元信号 f を知ることなく，$\boldsymbol{g} = Af$ から $P_S f$ を求めることができるための必要十分条件は，任意の $f \in H$ に対して $XAf = P_S f$ を満たす作用素 X が存在することである．この式は，

$$XA = P_S \tag{30}$$

と等価であり，次の補題が成立する．作用素 A の共役作用素を A^* で表す．

補題 5 作用素方程式 (30) が解 X をもつための必要十分条件は $S \subseteq \mathrm{Im}(A^*)$ である．

証明 一般に，X に関する作用素方程式 $XA = B$ が解をもつための必要十分条件は $\mathrm{Ker}(A) \subseteq \mathrm{Ker}(B)$ である．したがって，(30) が解をもつための必要十分条件は $\mathrm{Ker}(A) \subseteq \mathrm{Ker}(P_S)$ となる．この式の両辺の直交補空間をとれば，補題 5 の条件を得る．■

この補題は，元信号 $f \in H$ がわからないにもかかわらず，有限個の観測データ $\{g(y_m)\}_{m=1}^{M}$ からある部分空間 S における f の最良近似を求めることができる場合があること，および，そのような部分空間の中で最大のものが $\mathrm{Im}(A^*)$ であることを意味している．そこで以下では，S として最大の部分空間 $\mathrm{Im}(A^*)$ を考えることにする．$\mathrm{Im}(A^*)$ が前節までに述べてきた H_0 に対応する信号空間である．このとき，(30) は，

$$XA = P_{\mathrm{Im}(A^*)} \tag{31}$$

となる．$\hat{f} = P_{\mathrm{Im}(A^*)} f$ とおけば，標本化定理の問題は $\boldsymbol{g}$ から $\hat{f}$ を構成する問題に帰着される．

5.4 PBOB による標本化定理

PBOB による標本化定理を導く．

補題 6 H' の再生核 $K(y, y')$ を用いて，

$$\psi_m^*(y) = K(y, y_m), \qquad \phi_m^* = A_1^* \psi_m^* \qquad : 1 \leq m \leq M \tag{32}$$

とおけば，任意の $f \in H$ に対して次の関係が成立する．

$$\langle g, \psi_m^* \rangle = g(y_m), \qquad \langle f, \phi_m^* \rangle = g(y_m) \qquad : 1 \leq m \leq M \tag{33}$$

$\mathbf{C}^M$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_m\}_{m=1}^{M}$ を使って，標本化作用素 A_2 は

$$A_2 = \sum_{m=1}^{M} (\boldsymbol{e}_m \otimes \overline{\psi_m^*}), \qquad A_2^* = \sum_{m=1}^{M} (\psi_m^* \otimes \overline{\boldsymbol{e}_m}) \tag{34}$$

と表されるので，次の補題が成立する．

補題 7 次の関係が成立する.

$$\psi_m^* = A_2^* \boldsymbol{e}_m, \qquad \phi_m^* = A^* \boldsymbol{e}_m \qquad : 1 \leq m \leq M \tag{35}$$

さらに, $\{\psi_m^*\}_{m=1}^M$ は $\mathrm{Im}(A_2^*)$ を張り, $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ は $\mathrm{Im}(A^*)$ を張る.

これらの補題より, 次の標本化定理を得る.

定理 8 (現実的パルスによる標本化定理 (1)) $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ の $\mathrm{Im}(A^*)$ における PBOB の意味での双対基とすれば, 次の標本化定理が成立する.

$$\hat{f}(x) = \sum_{m=1}^{M} g(y_m)\phi_m(x) \qquad : f \in H \tag{36}$$

証明 $\hat{f}$ は $\mathrm{Im}(A^*)$ に属しているので, PBOB $\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ を使って,

$$\hat{f} = \sum_{m=1}^{M} \langle \hat{f}, \phi_m^* \rangle \phi_m \tag{37}$$

と表すことができる. 一方, 補題 7, 補題 6 より,

$$\langle \hat{f}, \phi_m^* \rangle = \langle P_{\mathrm{Im}(A^*)} f, \phi_m^* \rangle = \langle f, P_{\mathrm{Im}(A^*)} \phi_m^* \rangle = \langle f, \phi_m^* \rangle = g(y_m)$$

となる. よって, (37) より (36) を得る. ■

(32) の $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ を標本化関数といい, (36) の $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を再構成関数という. $\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ を $\mathrm{Im}(A^*)$ の擬似双直交標本化基底 (pseudobiorthognoal sampling basis) といい, (36) を PBOB による標本化定理という.

再構成関数 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ の構成法を示す. 再生核ヒルベルト空間 H' が決まれば, 再生核 $K(y, y')$ が一意に定まる. $K(y, y')$ で $y' = y_m$ とおけば, (32) の第一式より ψ_m^* が求まる. この ψ_m^* に A_1^* を作用すれば, (32) の第二式より ϕ_m^* が求まる. この $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ に, 擬似双直交性理論における双対基の各種構成法 ([4],[6]) を適用すれば, $\mathrm{Im}(A^*)$ における再構成関数 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が求まる.

次の定理は, 定理 8 の一般性を保証するものである.

定理 9 関数系 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が $\mathrm{Im}(A^*)$ における再構成関数になるための必要十分条件は, それが $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ の $\mathrm{Im}(A^*)$ における PBOB の意味での双対基になることである.

以上の結果を基にすれば, 理想的パルスによる標本化定理を容易に導くことができる. 定理 8, 定理 9 で, $H = H'$, $A_1 = I$ なる場合を考える. したがって, $A = A_2$ となり, $\phi_m = \psi_m$ になる. このとき, $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ であるから, $\mathcal{D}'$ 上の標本点 $\{y_m\}_{m=1}^M$ は $\mathcal{D}$ 上の標本点と見なすことができる. それを強調するために, 理想的パルスによる標本化定理を論じる場合には, $\{y_m\}_{m=1}^M$ を $\{x_m\}_{m=1}^M$ と表すことにする. 定理 8, 定理 9 より, 次の結果を得る.

定理 10 (理想的パルスによる標本化定理) H を再生核 $K(x, x')$ をもつ再生核ヒルベルト空間とする. 与えられた標本点 $\{x_m\}_{m=1}^M \subseteq \mathcal{D}$ に対して,

$$\psi_m^*(x) = K(x, x_m) \qquad : 1 \leq m \leq M \tag{38}$$

とおき, $\{\psi_m\}_{m=1}^M$ を $\{\psi_m^*\}_{m=1}^M$ の $\mathrm{Im}(A_2^*)$ における双対基とする. 任意の $f \in H$ に対する $\mathrm{Im}(A_2^*)$ における最良近似 $\hat{f}$ は,

$$\hat{f}(x) = \sum_{m=1}^{M} f(x_m)\psi_m(x) \qquad : f \in H \tag{39}$$

で与えられる. $\mathrm{Im}(A_2^*)$ におけるすべての再構成関数 $\{\psi_m\}_{m=1}^M$ は, この方法によって構成できる.

定理8，定理10は，さまざまな状況を包含した標本化定理になっている．まず，定理10で与えた理想的パルスによる標本化定理から論じる．

[理想的パルスによる標本化定理の場合]

補題7に示したように，$\mathrm{Im}(A_2^*)$ は (38) で定義される標本化関数 $\{\psi_m^*\}_{m=1}^M$ で張られる空間である．したがって，もし全空間 H が有限次元で，$\{\psi_m^*\}_{m=1}^M$ が H を張っていれば，$\mathrm{Im}(A_2^*) = H$ となる．このとき $\hat{f} = f$ となり，(39) は任意の $f \in H$ を厳密に再構成する．

もう少し詳しく述べれば次のようになる．$\{\psi_m^*\}_{m=1}^M$ が1次独立になるように標本点 $\{x_m\}_{m=1}^M$ が選ばれていれば $\dim \mathrm{Im}(A_2^*) = M$ となり，そうでなければ $\dim \mathrm{Im}(A_2^*) < M$ となる．したがって，

$$\mathrm{Im}(A_2^*) = H \quad \text{かつ} \quad \dim \mathrm{Im}(A_2^*) = M$$

の場合，(39) は従来の古典的標本化定理になる．すなわち，(39) は厳密な f を与え，再構成関数 $\{\psi_m\}_{m=1}^M$ は1次独立になる．一方，

$$\mathrm{Im}(A_2^*) = H \quad \text{かつ} \quad \dim \mathrm{Im}(A_2^*) < M$$

の場合，(39) はいわゆる過剰標本化の場合の標本化定理になる．すなわち，(39) は厳密な f を与えるけれども，再構成関数は1次従属になり，(39) は f の冗長な表現になる．

全空間 H が無限次元空間であったり，たとえ有限次元空間であっても $\{\psi_m^*\}_{m=1}^M$ が H を張っていなければ，$\mathrm{Im}(A_2^*) \subsetneq H$ となる．この場合 (39) は，$\mathrm{Im}(A_2^*)$ に属する f を厳密に再構成し $\hat{f} = f$ となるけれども，$\mathrm{Im}(A_2^*)$ に属さない f に対しては，f の $\mathrm{Im}(A_2^*)$ における最良近似になる．別の表現をすれば，(39) はいわゆる過少標本化の場合の標本化定理になる．したがって，

$$\mathrm{Im}(A_2^*) \subsetneq H \quad \text{かつ} \quad \dim \mathrm{Im}(A_2^*) = M$$

の場合，(39) は H でみれば過少標本化になり，$\mathrm{Im}(A_2^*)$ でみれば古典的標本化定理になる．また，

$$\mathrm{Im}(A_2^*) \subsetneq H \quad \text{かつ} \quad \dim \mathrm{Im}(A_2^*) < M$$

の場合，(39) は H でみれば過少標本化になり，$\mathrm{Im}(A_2^*)$ でみれば過剰標本化になる．以上の結果を表1にまとめて示す．

$\{\psi_m, \psi_m^*\}_{m=1}^M$ の様相は行列を使って論じることもできる．第 m, n 成分が再生核 $K(x, x')$ を使って $K(x_m, x_n)$ で与えられる $M \times M$ 行列 K を考える．K は $\{\psi_m^*\}_{m=1}^M$ のグラム行列になっている．行列 K は，表2の第1列に示すように，標本点 $\{x_m\}_{m=1}^M$ の取り方によって，正則かつ対角行列の場合，正則であるが対角行列でない場合，および，特異行列の場合の三種類に分かれる．

K が正則かつ対角行列の場合，$\{\psi_m^*\}_{m=1}^M$ は直交系になり $\dim \mathrm{Im}(A_2^*) = M$ となる．このとき，$\{\psi_m\}_{m=1}^M$ も直交系になる．表2の第2列には，この状況を "dim $= M$" および "OB" と記してある．

表1 理想的パルスによる標本化定理 ($A = A_2$)

	$\{\psi_m^*\}$：1次独立 $\dim \mathrm{Im}(A_2^*) = M$	$\{\psi_m^*\}$：1次従属 $\dim \mathrm{Im}(A_2^*) < M$
$\mathrm{Im}(A_2^*) = H$	古典的標本化定理	過剰標本化
$\mathrm{Im}(A_2^*) \subsetneq H$	H で見れば過少標本化 $\mathrm{Im}(A_2^*)$ で見れば古典的標本化定理	H で見れば過少標本化 $\mathrm{Im}(A_2^*)$ で見れば過剰標本化

表 2 標本化定理と PBOB

<table>
<tr><td colspan="2">$A_1 = I$</td><td colspan="3">$A_1 \neq I$</td></tr>
<tr><td>行列 K</td><td>$\dim \mathrm{Im}(A_2^*)$</td><td>A_1</td><td>$\dim \mathrm{Im}(A^*)$</td><td>行列 L</td></tr>
<tr><td rowspan="2">正則，対角</td><td rowspan="2">$\dim = M$
OB</td><td>ユニタリ</td><td>$\dim = M$
OB</td><td>正則，対角</td></tr>
<tr><td>正則</td><td>$\dim = M$
BONB</td><td rowspan="2">正則</td></tr>
<tr><td rowspan="2">正則</td><td rowspan="2">$\dim = M$
BONB</td><td>正則</td><td>$\dim = M$
BONB</td></tr>
<tr><td>特異</td><td>$\dim < M$
PBOB</td><td rowspan="2">特異</td></tr>
<tr><td>特異</td><td>$\dim < M$
PBOB</td><td>任意</td><td>$\dim < M$
PBOB</td></tr>
</table>

OB　：Orthogonal Basis
BONB：BiOrthoNormal Basis
PBOB：PseudoBiOrthogonal Basis

K が正則であるが対角行列でない場合，$\{\psi_m^*\}_{m=1}^M$ は 1 次独立になり，$\dim \mathrm{Im}(A_2^*) = M$ となる．このとき，双対基 $\{\psi_m\}_{m=1}^M$ は一意に定まり，$\{\psi_m, \psi_m^*\}_{m=1}^M$ は $\mathrm{Im}(A_2^*)$ における正規双直交基底 (BONB) になる．表 2 の第 2 列には，この状況を "$\dim = M$" および "BONB" と記してある．

K が特異行列の場合，$\{\psi_m^*\}_{m=1}^M$ は 1 次従属になり，$\dim \mathrm{Im}(A_2^*) < M$ となる．このとき，無限に多くの双対基 $\{\psi_m\}_{m=1}^M$ が存在し，$\{\psi_m, \psi_m^*\}_{m=1}^M$ は $\mathrm{Im}(A_2^*)$ における擬似双直交基底 (PBOB) になる．表 2 の第 2 列には，この状況を "$\dim < M$" および "PBOB" と記してある．

[現実的パルスによる標本化定理の場合]

定理 8 で与えた現実的パルスによる標本化定理について論じる．もし全空間 H が有限次元で，$\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ が H を張っていれば，$\mathrm{Im}(A^*) = H$ となる．このとき $\hat{f} = f$ となり，(36) は任意の $f \in H$ を厳密に再構成する．

もう少し詳しく述べれば次のようになる．現実的パルスによる標本化定理の場合，$\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ の様相は，補題 6 からわかるように，空間 H' の再生核 $K(y, y')$ と標本点 $\{y_m\}_{m=1}^M$ から決まる関数系 $\{\psi_m^*\}_{m=1}^M$ だけでなく，観測装置の特性を表す作用素 A_1 によっても変わってくる．$\{\psi_m^*\}_{m=1}^M$

表 3 現実的パルスによる標本化定理 ($A = A_2 A_1$)

	$\{\psi_m^*\}$：1 次独立 $\dim \mathrm{Im}(A^*) = M$	$\{\psi_m^*\}$：1 次従属 $\dim \mathrm{Im}(A^*) < M$
$\mathrm{Im}(A^*) = H$	古典的標本化定理	過剰標本化
$\mathrm{Im}(A^*) \subsetneq H$	H で見れば過少標本化 $\mathrm{Im}(A^*)$ で見れば古典的標本化定理	H で見れば過少標本化 $\mathrm{Im}(A^*)$ で見れば過剰標本化

が 1 次独立になるように標本点 $\{y_m\}_{m=1}^M$ が選ばれ，しかも $\mathrm{Ker}(A_1) = \{0\}$ が成立していれば，$\dim \mathrm{Im}(A^*) = M$ となり，そうでなければ $\dim \mathrm{Im}(A^*) < M$ となる．したがって，

$$\mathrm{Im}(A^*) = H \quad \text{かつ} \quad \dim \mathrm{Im}(A^*) = M$$

の場合，(36) は従来の古典的標本化定理になる．すなわち，(36) は厳密な f を与え，再構成関数 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ は 1 次独立になる．一方，

$$\mathrm{Im}(A^*) = H \quad \text{かつ} \quad \dim \mathrm{Im}(A^*) < M$$

の場合，(36) はいわゆる過剰標本化になる．すなわち，(36) は厳密な f を与えるけれども，$\{\phi_m\}_{m=1}^M$ は 1 次従属になり，f の冗長な表現になる．

全空間 H が無限次元空間であったり，たとえ有限次元空間であっても $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ が H を張っていなければ，$\mathrm{Im}(A^*) \subsetneq H$ となる．このとき，(36) は，$\mathrm{Im}(A^*)$ に属する f を厳密に再構成し $\hat{f} = f$ となるけれども，$\mathrm{Im}(A^*)$ に属さない f に対しては，f の $\mathrm{Im}(A^*)$ における最良近似になる．別の表現をすれば，(36) は H における過少標本化になる．したがって，

$$\mathrm{Im}(A^*) \subsetneq H \quad \text{かつ} \quad \dim \mathrm{Im}(A^*) = M$$

の場合，(36) は H でみれば過少標本化になり，$\mathrm{Im}(A^*)$ でみれば古典的標本化定理になる．また，

$$\mathrm{Im}(A^*) \subsetneq H \quad \text{かつ} \quad \dim \mathrm{Im}(A^*) < M$$

の場合，(36) は H でみれば過少標本化になり，$\mathrm{Im}(A^*)$ でみれば過剰標本化になる．以上の結果を表 3 にまとめて示す．

$\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ の様相は行列を使って論じることもできる．$\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ のグラム行列を L で表す．さらに，表 2 の第 1 列に現れる行列 K を，空間 H' の再生核 $K(y, y')$ と標本点 $\{y_m\}_{m=1}^M$ から決まる行列とすれば，行列 L は，行列 K と作用素 A_1 の両方の性質によって，正則かつ対角行列の場合，正則であるが対角行列でない場合，および，特異行列の場合の三種類に分かれる．そして，表 2 からわかるように，さまざまな標本化定理を PBOB を使った定理 8 により統一的に論じることができるのである．

5.5 最良近似と補間

古典的標本化定理では，標本化定理によって得られる関数は標本点上で元信号の標本値と同じ値をとっている．これを，“再構成された関数は補間になっている” と表現することにする．それでは，PBOB による標本化定理ではどうであろうか．また，補間になっていることはよいことなのであろうか．本節では，最良近似と補間の関係について論じる．まずは次の定理が成立する．

定理 11 (36) により再構成された関数 $\hat{f}$ を観測装置 A_1 を通して再び観測したものは，元の関数 f を A_1 を通して観測したものと，標本点上で一致する．すなわち，$\hat{g} = A_1 \hat{f}$ とおけば，$\hat{g}$ は $\{g(y_m)\}_{m=1}^M$ の補間になり，次の関係が成立する．

$$\hat{g}(y_m) = g(y_m) \qquad : 1 \le m \le M \tag{40}$$

それでは，$\hat{f}$ 自身が $\{f(x_m)\}_{m=1}^M$ の補間になるであろうか．この問題を論じるために，$H = H'$ かつ $y_m = x_m$ の場合を考えることにする．ところで，H の任意の閉部分空間 S における最良近似が $\{f(x_m)\}_{m=1}^M$ の補間になるとは限らない．補間になるための条件を求める．

補題 12 H の閉部分空間を S で表し，$f \in H$ の S への正射影を f_S で表す．

$$f_S(x_m) = f(x_m) \qquad : 1 \leq m \leq M \tag{41}$$

が成立するための必要十分条件は，$S \supseteq \mathrm{Im}(A_2^*)$ となることである．

証明 (41) は $A_2 P_S = A_2$ と等価である．さらにこの式は $(A_2^\dagger A_2)P_S = A_2^\dagger A_2$ と等価であるから，$P_{\mathrm{Im}(A_2^*)} = A_2^\dagger A_2$ より補題 12 が成立する． ■

この補題で $S = \mathrm{Im}(A^*)$ の場合を考えれば，次の定理を得る．

定理 13 $\hat{f}$ が $\{f(x_m)\}_{m=1}^M$ の補間になるための必要十分条件は，

$$A_1^* \mathrm{Im}(A_2^*) = \mathrm{Im}(A_2^*) \tag{42}$$

が成立することである．

(42) に現れる二種類の作用素のうち，A_1 は観測装置の特性から決まるものであり，A_2 は標本点によって決まるものである．そして，その相互関係を表すものが (42) である．

理想的パルスによる標本化定理の場合，$A_1 = I$ であるから，(42) は任意の標本点に対して成立し，再構成された関数は常に補間になっている．しかし，現実的パルスによる標本化定理の場合，観測装置の特性 A_1 と標本点のとり方によっては，必ずしも (42) は成立せず，再構成された関数は必ずしも補間にならないのである．

(42) が成立すれば $\mathrm{Im}(A^*) = \mathrm{Im}(A_2^*)$ となるので，補題 12 から直ちに次の結果を得る．

系 14 (42) が成立する場合を考える．H の閉部分空間を S で表し，$f \in H$ の S への正射影を f_S で表す．f_S が $\{f(x_m)\}_{m=1}^M$ の補間になるための必要十分条件は，$S \supseteq \mathrm{Im}(A^*)$ となることである．

補題 12 における条件が $S \supseteq \mathrm{Im}(A_2^*)$ であったのに対して，系 14 における条件は $S \supseteq \mathrm{Im}(A^*)$ になっている．しかも，この条件は補題 5 における条件 $S \subseteq \mathrm{Im}(A^*)$ と丁度逆向きの包含関係になっている．したがって，最良近似の実現性と補間のあいだには次の関係が成立する．

[最良近似の実現性と補間の関係]

(i) $S \subsetneq \mathrm{Im}(A^*)$ ならば，S における最良近似 f_S を f の標本値ベクトル $\boldsymbol{g}$ から求めることができる．しかし，一般には，f_S と f の標本点における値は一致しない．すなわち，f_S は $\{f(x_m)\}_{m=1}^M$ の補間にならない．

(ii) $S \supsetneq \mathrm{Im}(A^*)$ ならば，f_S は $\{f(x_m)\}_{m=1}^M$ の補間になる．しかし，もはや f_S を $\boldsymbol{g}$ から求めることはできない．

(iii) $S = \mathrm{Im}(A^*)$ の場合に限って，f_S を $\boldsymbol{g}$ から求めることができ，同時に，f_S は $\{f(x_m)\}_{m=1}^M$ の補間になる．

5.6 標本化定理再訪

これまでは，標本化定理を擬似双直交性理論の立場で論じてきた．ここでは，作用素論の立場から標本化定理を見直すことにする．

定理 15 (現実的パルスによる標本化定理 (2)) 作用素方程式 (31) の解を X で表す．$\mathbf{C}^M$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_m\}_{m=1}^M$ に対して，

$$\phi_m = X\boldsymbol{e}_m \qquad : 1 \leq m \leq M \tag{43}$$

とおけば，

$$\hat{f}(x) = \sum_{m=1}^{M} g(y_m)\phi_m(x) \qquad : f \in H \tag{44}$$

なる標本化定理が成立する．

(31) の一般解 X は，$\mathrm{Im}(A)$ の直交補空間への正射影作用素を $P_{\mathrm{Im}(A)^\perp}$ で表すとき，

$$X = A^\dagger + YP_{\mathrm{Im}(A)^\perp} \tag{45}$$

で与えられる [7]．ここで，Y は $\mathbf{C}^M$ から H への任意の線形作用素である．したがって，$Y\mathrm{Im}(A)^\perp \boldsymbol{e}_m$ $(1 \leq m \leq M)$ が $\mathrm{Im}(A^*)$ に属さなければ，$\{\phi_m\}_{m=1}^M$ は $\mathrm{Im}(A^*)$ に属さなくなり，$\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ は $\mathrm{Im}(A^*)$ の PBOB にならない．このことは，標本化定理を論じるためには，PBOB だけではまだ不十分であることを意味している．この問題に応えるために，次節で拡張擬似双直交基底の概念を導入する．

6 拡張擬似双直交基底 (EPBOB) による標本化定理

6.1 拡張擬似双直交基底 (EPBOB)

H を無限次元または有限次元ヒルベルト空間とし，H_0 を H の有限次元部分空間とする．H_0 の次元を N とし，$\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ $(M \geq N)$ を H の元の集合とする．H_0 の任意の元が，

$$f = \sum_{m=1}^{M} \langle f, \phi_m^* \rangle \phi_m \qquad : f \in H_0 \tag{46}$$

と表されるとき，$\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ を H_0 の拡張擬似双直交基底 (Extended PseudoBiOrthogonal Basis) といい，EPBOB と略記する．$\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ を $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ の双対基といい，$\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ の逆双対基という [5]．

"拡張" の意味は，$\{\phi_m\}_{m=1}^M$ あるいは $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ が必ずしも H_0 に属していなくてもよいということである．このことから，PBOB では自然に思われていたさまざまな性質が EPBOB では成立しなくなる．たとえば，擬似双直交性理論では，(23), (24) のように，$\{\phi_m\}_{m=1}^M$ と $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ を交換することができた．しかし，EPBOB に関しては，たとえ (46) が成立していても，この式の右辺で $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ と $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ を交換したものは，一般には f にならない．この意味で，(46) の拡張擬似双直交展開は非可換な展開になっている．"双対基" と "逆双対基" という二種類の概念を導入したのはこのためである．EPBOB $\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ に対して次の関係が成立する．ただし，P は H から H_0 への正射影作用素である，

$$\|f\|^2 = \sum_{m=1}^{M} \langle f, \phi_m \rangle \overline{\langle f, \phi_m^* \rangle} \qquad : f \in H_0 \tag{47}$$

$$\langle f_1, f_2\rangle = \sum_{m=1}^{M} \langle f_1, \phi_m\rangle \overline{\langle f_2, \phi_m^*\rangle} \qquad : f_1 \in H,\ f_2 \in H_0 \tag{48}$$

$$K(x, x') = \sum_{m=1}^{M} (P\phi_m^*)(x)\overline{\phi_m(x')} \tag{49}$$

このように，PBOB の場合の (25)–(27) とほぼ同じ形式で成立するが，微妙に異なっているので注意を要する．これらの式の中の (48), (49) は，それぞれ，$\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ が H_0 の EPBOB になるための必要十分条件になっている．しかし，最初のパーセバルの等式 (47) は，必要条件ではあるが十分条件ではない．すなわち，このパーセバルの等式を満たすけれども，(46) が成立しない $\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ が無限に存在するのである．

6.2 EPBOB による標本化定理

5.3 節で導入した標本化定理の問題を論じるための枠組を用いて，EPBOB による標本化定理を導く．このとき，補題 6，補題 7 はそのまま成立する．定理 8 に対応して，次の標本化定理が成立する．

定理 16 (現実的パルスによる標本化定理) $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を，(32) で与えられる $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ の $\mathrm{Im}(A^*)$ における EPBOB の意味での逆双対基とすれば，次の標本化定理が成立する．

$$\hat{f}(x) = \sum_{m=1}^{M} g(y_m)\phi_m(x) \qquad : f \in H \tag{50}$$

証明 $\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ は $\mathrm{Im}(A^*)$ の EPBOB であり，$\hat{f}$ は $\mathrm{Im}(A^*)$ に属しているので，

$$\hat{f}(x) = \sum_{m=1}^{M} \langle \hat{f}, \phi_m^*\rangle \phi_m(x) \tag{51}$$

となる．一方，(35) より $\phi_m^* \in \mathrm{Im}(A^*)$ であるから，(33) より，

$$\langle \hat{f}, \phi_m^*\rangle = \langle P_{\mathrm{Im}(A^*)}f, \phi_m^*\rangle = \langle f, P_{\mathrm{Im}(A^*)}\phi_m^*\rangle = \langle f, \phi_m^*\rangle = g(y_m)$$

となる．よって，(51) より (50) を得る． ■

証明の中でも述べたように，$\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ は $\mathrm{Im}(A^*)$ に属している．しかし，$\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ は $\mathrm{Im}(A^*)$ の EPBOB であるから，逆双対基 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ は必ずしも $\mathrm{Im}(A^*)$ に属さない．これが，定理 8 で述べた PBOB による標本化定理と大きく異なるところである．$\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ を $\mathrm{Im}(A^*)$ の拡張擬似双直交標本化基底 (extended pseudobiorthognoal sampling basis) といい，(50) を EPBOB による標本化定理という．

再構成関数 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ の構成法を示す．再生核ヒルベルト空間 H' が決まれば，再生核 $K(y, y')$ が一意に定まる．$K(y, y')$ で $y' = y_m$ とおけば，(32) より ψ_m^* が求まる．この ψ_m^* に A_1^* を作用すれば，(32) より ϕ_m^* が求まる．この $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ に拡張擬似双直交性理論における逆双対基の各種構成法を適用すれば，再構成関数 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が求まる．

たとえば，$\mathbf{C}^M$ から H への任意の線形作用素 Y を用いて，

$$U^* = A^\dagger + YP_{\mathrm{Im}(A)^\perp} \tag{52}$$

$$\phi_m = U^* \boldsymbol{e}_m \tag{53}$$

とおけば，$\{\phi_m\}_{m=1}^M$ は $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ の逆双対基になる．Y を動かすことにより，すべての逆双対基が得られる

定理 16 は，$\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ に対する任意の逆双対基 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が標本化定理の再構成関数になることを意味している．次の定理は，この逆を示すものである．

定理 17 H に属するすべての再構成関数が，$\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ の EPBOB の意味での逆双対基になる．

証明 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を再構成関数とする．$\mathrm{Im}(A^*)$ の任意の元 $\hat{f}$ に対して，(33), (50) より，

$$\sum_{m=1}^{M}\langle\hat{f},\phi_m^*\rangle\phi_m=\sum_{m=1}^{M}g(y_m)\phi_m=\hat{f}$$

となる．これは，$\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ の EPBOB の意味での逆双対基になることを意味している． ■

(52) と (45) の右辺は同じ式であるから，次の定理が成立する．

定理 18 (31) の作用素方程式 $XA=P_{\mathrm{Im}(A^*)}$ から作用素論的に導かれた標本化定理 (定理 15) と，拡張擬似双直交性理論により導かれた標本化定理 (定理 16) は完全に一致する．

すなわち，(44) は $\hat{f}$ の EPBOB による展開になっていたのである．(44) のままでは，これを説明する数学的言葉がなかったが，EPBOB の概念を導入することにより，非常に広い範囲の標本化定理を，各種基底による標本化定理として統一的に論じることができるのである．

参考文献

[1] O. Christensen: “Frames and Bases - An Introductory Course, ” Birkhäuser, Boston, 2008.

[2] 熊沢逸夫, 田島博, 小川英光：“アナログ符号理論に基づく誤りを含む投影データからの画像再構成”, 電子情報通信学会論文誌 (A), vol.J72-A, no.2, pp.425–431, Feb. 1989.

[3] 小川英光, 飯島泰蔵：“擬似直交性理論, ” 電子通信学会論文誌 (D), vol.58-D, no.5, pp.271-278, May 1975.

[4] 小川英光：“擬似双直交性理論, ” 電子通信学会論文誌 (D), vol.J64 -D, no.7, pp.555-562, July 1981.

[5] H. Ogawa and N.-E. Berrached: “A theory of extended pseudo-biorthogonal bases,” *IEICE Transactions on Information and Systems*, vol.E76-D, no.8, pp.890-897, Aug. 1993.

[6] H. Ogawa: “Theory of pseudo biorthogonal bases and its application,” *Kyoto University, RIMS Kokyuroku, no.1067, Reproducing Kernels and their Applications*, pp.24–38, Oct. 1998.

[7] 小川英光：工学系の関数解析, 森北出版, 2010.

[8] 上田裕巳：“周期関数に対する標本化定理と OFDM 信号への適用”, 電子情報通信学会通信方式研究会，no.CS2012-11, pp.25–33, Nov. 2012.