数理解析研究所講究録
第 1980 巻 2016 年 81-94

再生核と 重み付き無限グラフ上の準同型写像について

防衛大学校・総合教育学群　瀬戸　道生 *
Michio Seto
National Defense Academy

概要

この小論は二部に分けられる．第一部は重み付き無限グラフ上の準同型写像と再生核ヒルベルト空間の関係を調べた [5] の要約である．第二部では [5, 6] を準備する際に必要になった de Branges-Rovnyak 理論についてまとめる．

1　再生核ヒルベルト空間とグラフ準同型写像

1.1　グラフと再生核

$G=(V,E)$ をグラフとする．ここで，$V=V(G)$ は頂点の集合，$E=E(G)$ は辺の集合を表す．さらにここでは「頂点数は高々可算」,「各頂点から出ている辺の数は有限」,「無向」,「ループ無し」,「連結」,「原点 0_G をもつ」の 6 条件を仮定する．$W_{x,y}$ を $V\times V$ 上の以下の条件を満たす実数値関数としよう．

$$W_{x,y}>0 \quad (\{x,y\}\in E), \quad W_{x,y}=0 \quad (\{x,y\}\not\in E) \quad \text{and} \quad W_{x,y}=W_{y,x}.$$

この G と $W_{x,y}$ を併せて考えるとき，G を重み付きグラフ，またはネットワークと呼ぶ．V 上の実数値関数 u, v に対し，

$$\mathcal{E}(u,v)=\frac{1}{2}\sum_{x,y\in V} W_{x,y}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y)),$$

$$\mathcal{H}_G=\{u:\mathcal{E}(u,u)<+\infty \quad \text{and} \quad u(0_G)=0\} \quad \text{and} \quad \|u\|^2_{\mathcal{H}_G}=\mathcal{E}(u,u)$$

*本研究は JSPS 科研費 15K04926 の助成を受けたものです．

と定めると，$\mathcal{H}_G$ が再生核ヒルベルト空間となることはよく知られている．$\mathcal{H}_G$ の $x \in V$ に対応する再生核を k_x と表す．今回の話では再生核そのものよりも次に定める再生核の差の方がいろいろな記述に便利である．

$$f_{x,y} := \sqrt{W_{x,y}}(k_x - k_y) \quad (\{x,y\} \in E).$$

このとき，$\{f_{x,y}\}_{\{x,y\}\in E}$ は $\mathcal{H}_G$ のフレームになることがわかる．すなわち，任意の $u \in \mathcal{H}_G$ に対し，次の展開公式が成り立つ．

$$u = \sum_{\{x,y\}\in E} \langle u, f_{x,y}\rangle_{\mathcal{H}_G} f_{x,y} \quad \text{（ノルム位相で収束）.}$$

1.2　グラフ準同型写像と再生核

定義 1.1. $G_1 = (V_1, E_1, W^{(G_1)})$ と $G_2 = (V_2, E_2, W^{(G_2)})$ を重み付きグラフとする．$\varphi : V_1 \to V_2$ が $W^{(G_1)}_{x,y} \le W^{(G_2)}_{\varphi(x),\varphi(y)}$ $(x, y \in V_1)$ を満たすとき，φ は準同型写像と呼ばれる．以下，準同型写像を単に $\varphi : G_1 \to G_2$ と表す．

$\varphi : G_1 \to G_2$ は原点を保存する準同型写像とする．すなわち，$\varphi(0_{G_1}) = 0_{G_2}$ を仮定する．このとき，線型作用素

$$C_\varphi : \mathcal{H}_{G_2} \to \mathcal{H}_{G_1}, \quad u \mapsto u \circ \varphi \quad (u \in \mathcal{H}_{G_2})$$

が定まり，

$$C^*_\varphi k^{(G_1)}_{x_1} = k^{(G_2)}_{\varphi(x_1)} \quad (x_1 \in V_1) \tag{1.1}$$

が成り立つ．この等式 (1.1) は初等的であるが，再生核とグラフ準同型写像を結びつけるという意味で本質的である．さらに，$\varphi : G_1 \to G_2$ が単射ならば，

$$\|C_\varphi\| \le 1 \tag{1.2}$$

が成り立つ．この (1.1) と (1.2) をもとに，グラフ準同型写像の研究に再生核と de Branges-Rovnyak 空間を持ち込むことができる．de Branges-Rovnyak 空間については第二部で必要な事実をまとめた．

1.3　グラフ準同型写像と de Branges-Rovnyak 空間

$\varphi : G_1 \to G_2$ を原点を保存する単射準同型写像とする．C^*_φ の値域上に次のようにして新しい内積を入れる．

$$\langle C^*_\varphi u, C^*_\varphi v\rangle_{\mathcal{M}(C^*_\varphi)} = \langle P_{(\ker C^*_\varphi)^\perp} u, P_{(\ker C^*_\varphi)^\perp} v\rangle_{\mathcal{H}_{G_1}} \quad (u, v \in \mathcal{H}_{G_1})$$

ここで，$P_{(\ker C_\varphi^*)^\perp}$ は $(\ker C_\varphi^*)^\perp$ 上への直交射影である．このとき，C_φ^* の値域は内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{M}(C_\varphi^*)}$ によりヒルベルト空間になり，これを $\mathcal{M}(C_\varphi^*)$ と表す．また，(1.2) により，$\mathcal{H}(C_\varphi^*) = \mathcal{M}((I_{\mathcal{H}_{G_2}} - C_\varphi^* C_\varphi)^{1/2})$ を考えることができる．$\mathcal{H}(C_\varphi^*)$ は $\mathcal{M}(C_\varphi^*)$ の擬直交補空間と呼ばれ，$\mathcal{H}_{G_2}$ を次のように分解することができる．

$$\mathcal{H}_{G_2} = \mathcal{M}(C_\varphi^*) + \mathcal{H}(C_\varphi^*), \quad \|u\|_{\mathcal{H}_{G_2}}^2 = \min\{\|v\|_{\mathcal{M}(C_\varphi^*)}^2 + \|w\|_{\mathcal{H}(C_\varphi^*)}^2 : u = v + w\}.$$

ここで何故グラフ理論に de Branges-Rovnyak 理論を持ち込むのかを説明したい．まず，$\mathcal{M}(C_\varphi^*)$ の構成法から，$\mathcal{M}(C_\varphi^*)$ は $\mathcal{H}_{G_1}$ の内積構造を引き継いでいることがわかる．第二に，$\mathcal{H}_G$ の内積構造から G の隣接関係を再現できる．よって，原点を保存する単射準同型写像 $\varphi : G_1 \to G_2$ のデータがヒルベルト空間の埋め込み $\mathcal{M}(C_\varphi^*) \hookrightarrow \mathcal{H}_{G_2}$ の言葉に翻訳されると考えることは自然である（しかしながら，$\varphi : G_1 \to G_2$ の理解のためにはもう一つの埋め込み $\mathcal{M}(C_\varphi) \hookrightarrow \mathcal{H}_{G_1}$ も必要であろう）．第三に，ヒルベルト空間として $\mathcal{M}(C_\varphi^*)$ は $\mathcal{H}_{G_2}$ の部分空間ではなく，線型空間としての商空間 $\mathcal{H}_{G_2}/\mathcal{M}(C_\varphi^*)$ を考えてしまうとグラフの隣接構造が失われてしまうが，両者の内積構造を活かした擬直交補空間 $\mathcal{H}(C_\varphi^*)$ なら考えることができる．さて，以上の三点を踏まえて次のことを提案したい．

提案

二つのグラフ G_1, G_2 に対し，G_2/G_1 は通常意味をもたない記号であるが，
$\mathcal{H}(C_\varphi^*)$ がその代役になるのではないか？

次の定理 1.1 はこの提案を視覚的にサポートする．

定理 1.1. 原点を保存する単射準同型写像 $\varphi : G_1 \to G_2$ に対し，

$$\begin{aligned} \varphi(E_1) &= \{\{\varphi(x_1), \varphi(y_1)\} \in E_2 : x_1, y_1 \in V_1\}, \\ \varphi(G_1) &= (\varphi(V_1), \varphi(E_1)), \\ D_\varphi E &= \{\{x_1, y_1\} \subset V_1 : W_{x_1,y_1} < W_{\varphi(x_1),\varphi(y_1)}\} \end{aligned}$$

と定める．このとき，次が成り立つ．

$$\dim \mathcal{H}(C_\varphi^*) < \infty \Leftrightarrow |D_\varphi E| + |E_2 \setminus \varphi(E_1)| < \infty.$$

さらに，このとき，

$$\mathcal{H}(C_\varphi^*) = \{f_{\varphi(x_1),\varphi(y_1)} : \{x_1, y_1\} \in D_\varphi E\} \vee \{f_{x_2,y_2} : \{x_2, y_2\} \in E_2 \setminus \varphi(E_1)\}.$$

注意 1.1. もちろん $\mathcal{H}(C_\varphi^*)$ の次元が次の興味の対象となるのだが，実際にその次元を求めようとするとサイクルの個数が関連し，グラフ理論的な考察が必要になる．現在，グラフ理論の専門家と研究中である．

$\dim \mathcal{H}(C_\varphi^*) = \infty$ の場合，例えば Vasyunin-Nikol'skiĭ [7] の定理 A180 を適用すれば次を得る．

定理 1.2. $V = V(G_1) = V(G_2)$ を仮定する．準同型写像 $\varphi : G_1 \to G_2$ s.t. $\varphi(x) = x$ $(x \in V)$ が

(i) $\forall k \geq 0\ \exists H_k$（重み付きグラフ）and $\exists \varphi_{k,k+1} : H_{k+1} \to H_k$（準同型写像）s.t. $H_0 = G_2$, $V(H_k) = V$, $|D_{\varphi_{k,k+1}} E| < \infty$ and $\varphi_{k,k+1}(x) = x$ $(x \in V)$,

(ii) $W_{x,y}^{(H_k)} \to W_{x,y}^{(G_1)}$ $(k \to \infty)$ $(x, y \in V)$

と分解されるとき，$\mathcal{H}(C_\varphi^*)$ は次のように分解される．

$$\mathcal{H}(C_\varphi^*) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{\varphi_k}^* \mathcal{H}(C_{\varphi_{k,k+1}}^*) \quad (\varphi_{k+1} := \varphi_k \circ \varphi_{k,k+1},\ \varphi_0 := \mathrm{id.}).$$

この無限和の意味については第二部の定理 2.8 とその証明を参照してほしい．

（今後の展望） 重み無しの有限グラフ G に対し，単射準同型写像による次のような時間発展を考える．

$$(*) \quad \varphi_{s,t} : G_s \to G_t\ (0 \leq s \leq t), \quad G_\infty = G.$$

ここで，$\{G_t\}_{t \geq 0}$ は重み付き有限グラフの系列を表す．適切な仮定の下，$(*)$ は $C_{s,t} = C_{\varphi_{s,t}}$ に関する発展方程式に書き換えられるであろう．Vasyunin-Nikol'skiĭ [7] では de Branges による Bieberbach 予想の証明を詳細に調べあげ，このような作用素の発展方程式を定理 2.8 の連続版に対応する積分で扱う方法を整備している．今の設定にもこの方法を適用できるであろう．まだ確認しなければならないことは多いが，この筋書きが正しければ，再生核ヒルベルト空間の理論からグラフ理論に貢献できるのではないかと思う．

2 de Branges-Rovnyak 理論

de Branges-Rovnyak 理論を標語的に述べると，それはヒルベルト空間内にやわらかい直交分解（quasiorthogonal decomposition, 擬直交分解）を許す理論である．ここに [5, 6] を準備する際に私が勉強したことをまとめる．特に，安藤先生の講義ノート [1] の流儀で，Sarason [4] も参考にし，Vasyunin-Nikol'skiĭ [7] の定理 A180（quasiorthogonal series, 擬直交級数）の理解を目標とした．今回は触れることができなかったが，[7] にはさらに対応する積分論の解説がある．また，Ball と Bolotnikov によるサーベイ [2] は最近の話題も含んでおり有用である．

2.1 引き戻しノルム

$(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ と $(\mathcal{G}, \|\cdot\|_{\mathcal{G}})$ を可分なヒルベルト空間，T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{G}$ への有界線形作用素，P を $(\ker T)^{\perp}$（$\mathcal{H}$ における $\ker T$ の直交補空間）上への直交射影とする．ここで，T の値域 $\operatorname{ran} T = \{Tu \in \mathcal{G} : u \in \mathcal{H}\}$ 上に次のようにして新しい内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_T$ を入れよう．

$$\langle Tu, Tv\rangle_T = \langle Pu, Pv\rangle_{\mathcal{H}}$$

Tu を $\mathcal{H}$ へ引き戻すと $u + \ker T$ となり，$\ker T$ の分だけ膨らんでしまうわけだが，その膨らんだ分を直交射影 P で落としていることに注意する．よって，$Tu = 0$ ならば，

$$\langle Tu, Tv\rangle_T = \langle Pu, Pv\rangle_{\mathcal{H}} = 0$$

が成り立ち，$\langle Tu, Tv\rangle_T$ が Tu, Tv の表現の仕方に依らず定まる．以下では

$$\|Tu\|_T = \sqrt{\langle Tu, Tu\rangle_T} \quad (Tu \in T\mathcal{H})$$

と表す．次の事実はほぼ自明であるが頻繁に用いられる．

補題 2.1. $u \in \operatorname{ran} T$ に対し，$u = Ta$ かつ $\|u\|_T = \|a\|_{\mathcal{H}}$ を満たす $a \in \mathcal{H}$ は $a \in (\ker T)^{\perp}$ として一意に定まる．

証明． $u = Ta$ かつ $a \in (\ker T)^{\perp}$ を仮定する．このとき，$\|u\|_T = \|a\|_{\mathcal{H}}$ は明らかである．また，$u = Tb$ かつ $\|u\|_T = \|b\|_{\mathcal{H}}$ ならば，$a = Pa = Pb$ かつ $\|Pb\|_{\mathcal{H}} = \|b\|_{\mathcal{H}}$. よって，$a = Pa = Pb = b$ が成り立つ．

定理 2.1. $\mathcal{M}(T) = (\operatorname{ran} T, \|\cdot\|_T)$ はヒルベルト空間である．

証明． $\{Tu_n\}_n$ を $\|\cdot\|_T$ に関するコーシー列とする．すなわち，$\|Tu_n - Tu_m\|_T \to 0$ $(n, m \to \infty)$ を仮定する．ここで，初めから $u_n \in (\ker T)^{\perp}$ と選んでよい．このとき，

$$\|Tu_n - Tu_m\|_T = \|P(u_n - u_m)\|_{\mathcal{H}} = \|u_n - u_m\|_{\mathcal{H}}$$

が成り立つので，$\{u_n\}_n$ は $\mathcal{H}$ のコーシー列である．よって，

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{H}} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となる $u \in \mathcal{H}$ が存在する．当然 $u \in (\ker T)^{\perp}$ であるから，

$$\|Tu_n - Tu\|_T = \|P(u_n - u)\|_{\mathcal{H}} = \|u_n - u\|_{\mathcal{H}} \to 0$$

となり，$\mathcal{M}(T)$ が完備であることがわかった．

注意 2.1. これから複数のヒルベルト空間を扱うことになるが，$T:\mathcal{H}\to\mathcal{G}$ に対し，$\|T\|$, T^* は $T:\mathcal{H}\to\mathcal{G}$ としての通常の作用素ノルム，共役作用素を表す．一般に

$$\|Tu\|_{\mathcal{G}}=\|TPu\|_{\mathcal{G}}\le\|T\|\|Pu\|_{\mathcal{H}}=\|T\|\|Tu\|_T$$

が成り立つので，$\mathcal{M}(T)$ から $\mathcal{G}$ への自明な写像 $Tu\mapsto Tu$ は連続である．また，$\|\cdot\|_T$ を $\|\cdot\|_{\mathcal{M}(T)}$ と表すこともある．

定理 2.2 ([1]). $u\in\mathcal{G}$ に対し，

$$u\in T\mathcal{H}\Leftrightarrow\gamma=\sup_{T^*b\neq0}\frac{|\langle b,u\rangle_{\mathcal{G}}|}{\|T^*b\|_{\mathcal{H}}}<\infty.$$

さらに，このとき $\|u\|_T=\gamma$ が成り立つ．

証明．($\Rightarrow$) $u=Ta$ とする．このとき，

$$|\langle b,u\rangle_{\mathcal{G}}|=|\langle b,Ta\rangle_{\mathcal{G}}|=|\langle T^*b,a\rangle_{\mathcal{H}}|\le\|T^*b\|_{\mathcal{H}}\|a\|_{\mathcal{H}}\quad(\forall b\in\mathcal{G}).$$

よって，$\gamma\le\|a\|_{\mathcal{H}}$ となる．
($\Leftarrow$) γ が有限であったとする．このとき，

$$\varphi:T^*b\mapsto\langle b,u\rangle_{\mathcal{G}}\quad(T^*b\neq0)$$

と定める．$T^*b=0$ のとき，$a\in(\ker T^*)^{\perp}$ と $\varepsilon>0$ に対し

$$0\le|\langle b+\varepsilon a,u\rangle_{\mathcal{G}}|\le\gamma\|T^*(b+\varepsilon a)\|=\gamma\varepsilon\|T^*a\|$$

が成り立つので，$\langle b,u\rangle_{\mathcal{G}}=0$ でなくてはならない．よって，この φ は $\operatorname{ran}T^*$ 上の有界な線型汎関数を定める．さらに $\overline{\operatorname{ran}}T^*$（$\operatorname{ran}T^*$ の $\mathcal{H}$ での閉包）上に連続に拡張することができる．ここで，ヒルベルト空間 $(\overline{\operatorname{ran}}T^*,\|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ に Riesz の表現定理を適用すれば

$$\langle b,u\rangle_{\mathcal{G}}=\varphi(T^*b)=\langle T^*b,a\rangle_{\mathcal{H}}\quad(\forall b\in\mathcal{G})\quad\text{and}\quad\gamma=\|a\|_{\mathcal{H}}$$

を満たす $a\in\overline{\operatorname{ran}}T^*$ が存在し，$u=Ta\in T\mathcal{H}$ を得る．最後に，$a\in\overline{\operatorname{ran}}T^*=(\ker T)^{\perp}$ に注意すれば，$\gamma=\|a\|_{\mathcal{H}}=\|Pa\|_{\mathcal{H}}=\|u\|_T$ が成り立つことがわかる．

$|T^*|=\sqrt{TT^*}$ と表す．次の系は重要である．

系 2.1. ヒルベルト空間として $\mathcal{M}(T)=\mathcal{M}(|T^*|)$ が成り立つ．

証明．まず，$\|T^*b\|_{\mathcal{H}}^2=\||T^*|b\|_{\mathcal{G}}^2$ から

$$\sup_{T^*b\neq0}\frac{|\langle b,u\rangle|_{\mathcal{G}}}{\|T^*b\|_{\mathcal{H}}}=\sup_{|T^*|b\neq0}\frac{|\langle b,u\rangle|_{\mathcal{G}}}{\||T^*|b\|_{\mathcal{G}}}$$

が成り立つ．よって，定理 2.2 により $\mathcal{M}(T)=\mathcal{M}(|T^*|)$ を得る．

2.2 擬直和

$(\mathcal{H}_j, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_j})$ $(j=1,2)$ をヒルベルト空間とし，T_j を $\mathcal{H}_j$ から $\mathcal{G}$ への有界線型作用素とする．このとき，

$$\mathbb{T}: \mathcal{M}(T_1) \oplus \mathcal{M}(T_2) \to \mathcal{G}, \quad u_1 \oplus u_2 \mapsto u_1 + u_2,$$

に対し（$\oplus$ はヒルベルト空間としての通常の直和），$\mathcal{M}(T_1) \dot{+} \mathcal{M}(T_2) = \mathcal{M}(\mathbb{T})$ と定める．$\dot{+}$ は [1] で用いられている記号であるが，以下では単に $+$ と表す．

次の定理から多くのことが導かれる．

定理 2.3 ([1]). $\mathcal{M}(T_1) + \mathcal{M}(T_2) = \mathcal{M}((T_1T_1^* + T_2T_2^*)^{1/2})$

証明．$T = (T_1T_1^* + T_2T_2^*)^{1/2}$ とおき，T_j $(j=1,2)$ に対応する直交射影を P_j とする．証明を二段に分ける．

(Step 1) $u = Ta$ に対し，定理 2.2 と

$$\|T^*b\|_{\mathcal{G}}^2 = \|Tb\|_{\mathcal{G}}^2 = \|T_1^*b\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|T_2^*b\|_{\mathcal{H}_2}^2 \quad (\forall b \in \mathcal{G})$$

から，

$$\|u\|_T^2 = \sup_{T^*b \neq 0} \frac{|\langle b, u\rangle_{\mathcal{G}}|^2}{\|T^*b\|_{\mathcal{G}}^2} = \sup_{(T_1^*b, T_2^*b) \neq (0,0)} \frac{|\langle b, u\rangle_{\mathcal{G}}|^2}{\|T_1^*b\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|T_2^*b\|_{\mathcal{H}_2}^2}$$

は有限である．よって，$\{T_1^*b \oplus T_2^*b : b \in \mathcal{G}\}$ 上の連続線型汎関数

$$\varphi : T_1^*b \oplus T_2^*b \mapsto \langle b, u\rangle_{\mathcal{G}}$$

が定まり，さらに，φ は $\{T_1^*b \oplus T_2^*b : b \in \mathcal{G}\}$ の閉包上まで連続に拡張される．よって， Riesz の表現定理により，

$$\langle b, u\rangle_{\mathcal{G}} = \langle T_1^*b \oplus T_2^*b, a_1 \oplus a_2\rangle_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2} \quad \text{and} \quad \|u\|_T^2 = \|a_1\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|a_2\|_{\mathcal{H}_2}^2$$

を満たす $a_i \in \mathcal{H}_i$ $(i=1,2)$ が存在する．従って，$u = T_1a_1 + T_2a_2$, すなわち，

$$\mathcal{M}(T) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{T}) \quad \text{（ベクトル空間として）}$$

が成り立つことがわかった．また，

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathcal{M}(\mathbb{T})} &\leq \|T_1a_1\|_{T_1}^2 + \|T_2a_2\|_{T_2}^2 \\
&= \|P_1a_1\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|P_2a_2\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\
&\leq \|a_1\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|a_2\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\
&= \|u\|_T^2
\end{aligned}$$

が成り立つことに注意しておく．

(Step 2) $u = T_1a_1 + T_2a_2$ に対し，$T_1a_1 \oplus T_2a_2 \in (\ker \mathbb{T})^\perp$ and $a_j \in (\ker T_j)^\perp$ $(j = 1, 2)$ と仮定してよい．このとき，

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{\mathcal{M}(\mathbb{T})} &= \|T_1a_1 + T_2a_2\|^2_{\mathcal{M}(\mathbb{T})}\\ &= \|T_1a_1 \oplus T_2a_2\|^2_{\mathcal{M}(T_1)\oplus\mathcal{M}(T_2)}\\ &= \|T_1a_1\|^2_{T_1} + \|T_2a_2\|^2_{T_2}\\ &= \|a_1\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|a_2\|^2_{\mathcal{H}_2}.\end{aligned}$$

さらに，任意の $b \in \mathcal{G}$ に対し，

$$\begin{aligned}\langle b, u\rangle_{\mathcal{G}} &= \langle b, T_1a_1 + T_2a_2\rangle_{\mathcal{G}}\\ &= \langle T_1^*b, a_1\rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle T_2^*b, a_2\rangle_{\mathcal{H}_2}\\ &= \langle T_1^*b \oplus T_2^*b, a_1 \oplus a_2\rangle_{\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2}.\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}|\langle b, u\rangle|^2_{\mathcal{G}} &\le (\|T_1^*b\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|T_2^*b\|^2_{\mathcal{H}_2})(\|a_1\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|a_2\|^2_{\mathcal{H}_2})\\ &= (\|T_1^*b\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|T_2^*b\|^2_{\mathcal{H}_2})\|u\|^2_{\mathcal{M}(\mathbb{T})}\end{aligned}$$

が成り立つ．従って，$\{T_1^*b \oplus T_2^*b : b \in \mathcal{G}\}$ 上の線型汎関数

$$\varphi : T_1^*b \oplus T_2^*b \mapsto \langle b, u\rangle_{\mathcal{G}}$$

は有界であり，$\|\varphi\| \le \|u\|_{\mathcal{M}(\mathbb{T})}$ が成り立つ．よって，

$$\sup_{T^*b\neq 0} \frac{|\langle b, u\rangle_{\mathcal{G}}|^2}{\|T^*b\|^2_{\mathcal{G}}} = \sup_{(T_1^*b, T_2^*b)\neq(0,0)} \frac{|\langle b, u\rangle|^2_{\mathcal{G}}}{\|T_1^*b\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|T_2^*b\|^2_{\mathcal{H}_2}} = \|\varphi\|^2 \le \|u\|^2_{\mathcal{M}(\mathbb{T})}.$$

定理 2.2 により $u \in T\mathcal{H}$ and $\|u\|_T \le \|u\|_{\mathcal{M}(\mathbb{T})}$. (Step 1) で示したことと合わせて，

$$\mathcal{M}(\mathbb{T}) = \mathcal{M}(T) \quad \text{（ヒルベルト空間として）}$$

が成り立つことがわかった．

三つ以上の作用素に対しても次のように述べればよい．

定理 2.4. $j \ge 0$ に対し，T_j を $\mathcal{H}_j$ から $\mathcal{G}$ への有界線型作用素とする．

$$\sum_{j=0}^{\infty} T_jT_j^* = T_0T_0^* + T_1T_1^* + \cdots \quad \text{（強収束）}$$

が存在するとき，

$$\mathbb{T} : \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{M}(T_j) \to \mathcal{G}, \quad (u_0, u_1, \ldots) \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} u_j, \quad \text{and} \quad T = (\sum_{j=0}^{\infty} T_j T_j^*)^{1/2}$$

と定めると，$\mathcal{M}(\mathbb{T}) = \mathcal{M}(T)$ が成り立つ．

証明．$\sum_{j=0}^{\infty} \|u_j\|_{T_j}^2 < \infty$ のとき，$\sum_{j=0}^{\infty} u_j$ が $\mathcal{G}$ で収束することがわかれば，後は定理 2.3 の証明を繰り返すだけである．まず，仮定から

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|T_j^* b\|_{\mathcal{H}_j}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \langle T_j T_j^* b, b \rangle_{\mathcal{G}} < \infty \quad (b \in \mathcal{G})$$

が成り立つ．次に，$u_j = T_j a_j$ を $a_j \in (\ker T_j)^{\perp}$ と選べば，

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\|_{\mathcal{H}_j}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|T_j a_j\|_{T_j}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|u_j\|_{T_j}^2 < \infty$$

が成り立つ．よって，任意の $b \in \mathcal{G}$ に対し，

$$\begin{aligned}
\langle \sum_{j=0}^{n} u_j, b \rangle_{\mathcal{G}} &= \langle \sum_{j=0}^{n} T_j a_j, b \rangle_{\mathcal{G}} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \langle a_j, T_j^* b \rangle_{\mathcal{H}_j} \\
&\to \langle \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T_0^* b \\ T_1^* b \\ \vdots \end{pmatrix}, \rangle_{\bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}_j} \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

となり，$\sum_{j=0}^{\infty} u_j$ が $\mathcal{G}$ で収束することがわかった．

2.3 擬直交補空間

定義 2.1. $T : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ に対し，$\|T\| \leq 1$ のとき $I_{\mathcal{G}} - TT^* \geq O$ であるから，定理 2.3 により

$$\mathcal{G} = \mathcal{M}(T) + \mathcal{M}(\sqrt{I_{\mathcal{G}} - TT^*})$$

が成り立つ．このとき，

$$\mathcal{H}(T) = \mathcal{M}(\sqrt{I_{\mathcal{G}} - TT^*})$$

とおき，$\mathcal{H}(T)$ を $\mathcal{M}(T)$ の $\mathcal{G}$ における擬直交補空間 (quasiorthogonal complement, de Branges-Rovnyak complement),

$$\mathcal{G} = \mathcal{M}(T) + \mathcal{H}(T)$$

を $\mathcal{G}$ の（T に関する）擬直交分解とよぶ．

擬直交分解には次の意味で分解の一意性がある.

定理 2.5. $w \in \mathcal{G}$ に対し,

$$\|w\|_{\mathcal{G}}^2 = \min\{\|u\|_{\mathcal{M}(T)}^2 + \|v\|_{\mathcal{H}(T)}^2 : w = u + v \ (u \in \mathcal{M}(T), v \in \mathcal{H}(T))\}$$

が成り立ち, $\|w\|_{\mathcal{G}}^2 = \|u\|_{\mathcal{M}(T)}^2 + \|v\|_{\mathcal{H}(T)}^2$ を満たす $u \in \mathcal{M}(T)$, $v \in \mathcal{H}(T)$ は $u = TT^*w$, $v = (I_{\mathcal{G}} - TT^*)w$ として一意に定まる.

証明. 補題 2.1 と下の定理 2.6 からわかる.

注意 2.2. 定理 2.5 から, $v \in \mathcal{H}(T)$ に対し,

$$\|v\|_{\mathcal{H}(T)}^2 = \sup_{u \in \mathcal{M}(T)} \{\|u+v\|^2 - \|u\|_{\mathcal{M}(T)}^2\}$$

が導かれる(簡単な証明が [4] にある). この式をもとにすれば, 作用素を用いず幾何的に de Branges-Rovnyak complement を定めることもできる. de Branges-Rovnyak [3] ではそのように話を始めている. 詳しくは [1], [2] を参照.

$\mathcal{G}$ が再生核ヒルベルト空間ならば, 次の公式により $\mathcal{M}(T)$ と $\mathcal{H}(T)$ も再生核をもつことがわかる(Aronszajn の仕事の方が先であるので順番が逆かもしれないが).

定理 2.6. 次が成り立つ.

(i) $\langle u, TT^*a\rangle_{\mathcal{M}(T)} = \langle u, a\rangle_{\mathcal{G}} \ (u \in \mathcal{M}(T), a \in \mathcal{G})$,

(ii) $\langle u, (I_{\mathcal{G}} - TT^*)a\rangle_{\mathcal{H}(T)} = \langle u, a\rangle_{\mathcal{G}} \ (u \in \mathcal{H}(T), a \in \mathcal{G})$.

証明. (i) を示す. $u = Tb \ (b \in (\ker T)^{\perp})$ とする. このとき,

$$\langle u, TT^*a\rangle_{\mathcal{M}(T)} = \langle Tb, TT^*a\rangle_{\mathcal{M}(T)} = \langle b, T^*a\rangle_{\mathcal{H}} = \langle Tb, a\rangle_{\mathcal{G}} = \langle u, a\rangle_{\mathcal{G}}.$$

一般に $\mathcal{M}(T) + \mathcal{H}(T)$ は直和ではない.

定理 2.7 ([4]). $\mathcal{M}(T) \cap \mathcal{H}(T) = T\mathcal{H}(T^*)$.

証明. $Tu \in \mathcal{H}(T) \Leftrightarrow u \in \mathcal{H}(T^*)$ を示せばよい. 次の作用素等式

$$T(I_{\mathcal{H}} - T^*T)^{1/2} = (I_{\mathcal{G}} - TT^*)^{1/2}T$$
$$T^*(I_{\mathcal{G}} - TT^*)^{1/2} = (I_{\mathcal{H}} - T^*T)^{1/2}T^*$$

を利用する．まず，$Tu \in \mathcal{H}(T)$ ならば，$Tu = (I_{\mathcal{G}} - TT^*)^{1/2}v$ と表され，

$$\begin{aligned}(I_{\mathcal{H}} - T^*T)^{1/2}\{(I_{\mathcal{H}} - T^*T)^{1/2}u + T^*v\} &= (I_{\mathcal{H}} - T^*T)u + (I_{\mathcal{H}} - T^*T)^{1/2}T^*v \\ &= (I_{\mathcal{H}} - T^*T)u + T^*(I_{\mathcal{G}} - TT^*)^{1/2}v \\ &= (I_{\mathcal{H}} - T^*T)u + T^*Tu \\ &= u.\end{aligned}$$

よって，$u \in \mathcal{H}(T^*)$ が成り立つことがわかった．
次に，$u \in \mathcal{H}(T^*)$ ならば，$u = (I_{\mathcal{H}} - T^*T)^{1/2}v$ と表される．このとき，

$$Tu = T(I_{\mathcal{H}} - T^*T)^{1/2}v = (I_{\mathcal{G}} - TT^*)^{1/2}Tv$$

であるから，$Tu \in \mathcal{H}(T)$ を得る．

系 2.2. $\mathcal{M}(T) \cap \mathcal{H}(T) = \{0\} \Leftrightarrow TT^*$ は射影作用素．

証明． ($\Rightarrow$) $\mathcal{M}(T) \cap \mathcal{H}(T) = \{0\}$ ならば定理 2.7 により，$\mathcal{H}(T^*) \subseteq \ker T$．よって，$T(I_{\mathcal{H}} - T^*T) = 0$ となり，$T = TT^*T$ を得る．従って，$(TT^*)^2 = TT^*$ となり，TT^* が射影作用素であることがわかった．($\Leftarrow$) は明らか．

2.4 擬直交級数

補題 2.2 ([1])**.** $\mathcal{K}, \mathcal{H}, \mathcal{G}$ を可分なヒルベルト空間とし，S, T を

$$\mathcal{K} \xrightarrow{S} \mathcal{H} \xrightarrow{T} \mathcal{G} \quad \text{and} \quad \|S\| \le 1$$

を満たす有界線形作用素とする．さらに，$\mathcal{M}(T|_{\mathcal{H}(S)})$ を

$$T|_{\mathcal{H}(S)} : \mathcal{H}(S) \to \mathcal{G}, \quad (I_{\mathcal{H}} - SS^*)^{1/2}u \to T(I_{\mathcal{H}} - SS^*)^{1/2}u$$

に対応する de Branges-Rovnyak 空間とするとき，

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(T|_{\mathcal{H}(S)}) &= \mathcal{M}(T(I - SS^*)^{1/2}) \\ \mathcal{M}(T) &= \mathcal{M}(TS) + \mathcal{M}(T|_{\mathcal{H}(S)})\end{aligned}$$

が成り立つ．

証明． まず，$\|S\| \le 1$ から，

$$\begin{aligned}TT^* &= TS(TS)^* + TT^* - TS(TS)^* \\ &= TS(TS)^* + T(I_{\mathcal{H}} - SS^*)^{1/2}(I_{\mathcal{H}} - SS^*)^{1/2}T^*.\end{aligned}$$

よって，定理 2.3 により，

$$\mathcal{M}(T) = \mathcal{M}(TS) + \mathcal{M}(T(I_{\mathcal{H}} - SS^*)^{1/2})$$

が成り立つ．次に，

$$\mathcal{M}(T(I_{\mathcal{H}} - SS^*)^{1/2}) = \mathcal{M}(T|_{\mathcal{H}(S)})$$

を示す．そのためには対応するノルム間の等式を示せば十分である．まず，$u \in \mathcal{M}(T(I_{\mathcal{H}} - SS^*)^{1/2})$ に対し，$\|u\|_{\mathcal{M}(T(I_{\mathcal{H}}-SS^*)^{1/2})} = \|a\|_{\mathcal{H}}$ となるように $u = T(I_{\mathcal{H}} - SS^*)^{1/2}a$ を選ぶ．このとき，

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathcal{M}(T(I_{\mathcal{H}}-SS^*)^{1/2})} &= \|a\|_{\mathcal{H}} \\
&= \|P_{(\ker(I_{\mathcal{H}}-SS^*)^{1/2})^{\perp}}a\|_{\mathcal{H}} \\
&= \|(I_{\mathcal{H}} - SS^*)^{1/2}a\|_{\mathcal{H}(S)} \\
&\geq \|T(I_{\mathcal{H}} - SS^*)^{1/2}a\|_{\mathcal{M}(T|_{\mathcal{H}(S)})} \\
&= \|u\|_{\mathcal{M}(T|_{\mathcal{H}(S)})}.
\end{aligned}$$

また，$u \in \mathcal{M}(T|_{\mathcal{H}(S)})$ に対し，

$$\|u\|_{\mathcal{M}(T|_{\mathcal{H}(S)})} = \|b\|_{\mathcal{H}(S)} = \|(I - SS^*)^{1/2}c\|_{\mathcal{H}(S)} = \|c\|_{\mathcal{H}}$$

が成り立つように $u = Tb = T(I - SS^*)^{1/2}c$ を選ぶ．このとき，

$$\|u\|_{\mathcal{M}(T(I_{\mathcal{H}}-SS^*)^{1/2})} = \|T(I - SS^*)^{1/2}c\|_{\mathcal{M}(T(I_{\mathcal{H}}-SS^*)^{1/2})} \leq \|c\|_{\mathcal{H}} = \|u\|_{\mathcal{M}(T|_{\mathcal{H}(S)})}.$$

以上のことから，

$$\|u\|_{\mathcal{M}(T(I_{\mathcal{H}}-SS^*)^{1/2})} = \|u\|_{\mathcal{M}(T|_{\mathcal{H}(S)})}$$

を得る．

注意 2.3. $\mathcal{M}(T|_{\mathcal{H}(S)})$ を $T\mathcal{H}(S)$ と表すことが多い ([4], [7])．補題 2.2 により $\mathcal{M}(T|_{\mathcal{H}(S)})$ を $\mathcal{M}(T)$ 内での $\mathcal{M}(TS)$ の擬直交補空間とみなすことができるため，この意味を強調して，$\mathcal{M}(T|_{\mathcal{H}(S)})$ を $\mathcal{H}(T, TS)$ と表すこともある ([7])．また，補題 2.2 の仮定に $\|T\| \leq 1$ を追加すると，

$$\mathcal{H}(TS) = \mathcal{H}(T) + T\mathcal{H}(S)$$

が成り立つことがわかる ([4])．それは定理 2.3，補題 2.2 と次の等式から明らかであろう．

$$\begin{aligned}
I_{\mathcal{G}} - TS(TS)^* &= I_{\mathcal{G}} - TT^* + T(I_{\mathcal{H}} - SS^*)T^* \\
&= I_{\mathcal{G}} - TT^* + T(I_{\mathcal{H}} - SS^*)^{1/2}(I_{\mathcal{H}} - SS^*)^{1/2}T^*.
\end{aligned}$$

以下，空間はすべて可分なヒルベルト空間，写像は有界線形作用素とし，さらに次の三条件を仮定する．

(i) $\mathcal{H}_0 = \mathcal{G}$ and $T_0 = I_{\mathcal{G}}$.

(ii) 次の図式が可換．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_k & \xrightarrow{T_k} & \mathcal{G} \\ {\scriptstyle T_{k,k+1}}\uparrow & & \| \\ \mathcal{H}_{k+1} & \xrightarrow[T_{k+1}]{} & \mathcal{G}, \end{array} \quad (k \geq 0).$$

(iii) $\|T_{k,k+1}\| \leq 1$ $(k \geq 0)$.

(iv) $\lim_{k\to\infty} T_k T_k^* = TT^*$（強収束）.

このとき，次の等式が成り立つ．

定理 2.8 ([7]).

$$\mathcal{H}(T) = \sum_{k\geq 0} T_k \mathcal{H}(T_{k,k+1}) = \sum_{k\geq 0} \mathcal{H}(T_k, T_{k+1}).$$

最後にこの等式の意味を解説しつつその証明を与えよう．まず，

$$\sum_{k\geq 0} T_k(I_{\mathcal{H}_k} - T_{k,k+1}T_{k,k+1}^*)T_k^* = I_{\mathcal{G}} - TT^* \quad (\text{強収束})$$

が成り立つので

$$\mathbb{T} : \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}(T_k(I_{\mathcal{H}_k} - T_{k,k+1}T_{k,k+1}^*)^{1/2}) \to \mathcal{G}, \quad (u_1, u_2, \ldots) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

と定めると，定理 2.4 により

$$\mathcal{M}(\mathbb{T}) = \mathcal{M}((I_{\mathcal{G}} - TT^*)^{1/2}) = \mathcal{H}(T)$$

が成り立つ．$\mathbb{T}$ の作用を考慮すると，補題 2.2 により

$$\mathcal{M}(\mathbb{T}) = \sum_{k\geq 0} T_k \mathcal{H}(T_{k,k+1}) = \sum_{k\geq 0} \mathcal{H}(T_k, T_{k+1})$$

と表してもよいわけである．このとき，$u_k = T_k(I_{\mathcal{H}_k} - T_{k,k+1}T_{k,k+1}^*)^{1/2} a_k$ と表せば，

$$\|u\|_{\mathcal{H}(T)}^2 \leq \sum_{k\geq 0} \|u_k\|_{\mathcal{H}(T_k, T_{k+1})}^2 \leq \sum_{k\geq 0} \|a_k\|_{\mathcal{H}_k}^2$$

が成り立つ．また，補題 2.1 により等号が成り立つ表現が一意に存在する．

注意 2.4. 補題 2.2 と注意 2.3 により，(ii) の図式に次のヒルベルト空間の埋め込みの列が対応することがわかる．

$$\cdots \hookrightarrow \mathcal{M}(T_k) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{M}(T_2) \hookrightarrow \mathcal{M}(T_1) \hookrightarrow \mathcal{G}.$$

References

[1] T. Ando, *de Branges spaces and analytic operator functions*, lecture notes, Sapporo, Japan, 1990.

[2] J. A. Ball and V. Bolotnikov, *de Branges-Rovnyak spaces: basics and theory*, arXiv:1405.2980v1 [math.CA], 12 May 2014.

[3] L. de Branges and J. Rovnyak, *Square summable power series*, Dover Publications, 2015.

[4] D. Sarason, *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk*, University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences, 10. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.

[5] M. Seto, *Composition operators induced by injective homomorphisms on infinite weighted graphs*, to appear.

[6] M. Seto, S. Suda and T. Taniguchi, *Gram matrices of reproducing kernel Hilbert spaces over graphs* II (*graph homomorphisms and de Branges-Rovnyak spaces*), Nihonkai Math. J. 26 (2015), no. 1, 15-29.

[7] V. I. Vasyunin and N. K. Nikol'skiĭ, *Quasiorthogonal decompositions with respect to complementary metrics, and estimates of univalent functions*, Leningrad Math. J., 2 (1991), no. 4, 691-764.

Michio Seto
National Defense Academy
Yokosuka 239-8686 JAPAN
E-mail: mseto@nda.ac.jp