数理解析研究所講究録
第 1981 巻 2016 年 75-83

Power Cone Programming の弱双対定理

小崎 敏寛*
ステラリンク株式会社 (Stera Link, Co., Ltd.)

概 要

Power Cone Programming[1] を考える．この問題を徐々に一般化した 3 つの問題に対して，弱双対定理を証明する．その後，目的関数に凸二次関数にした 4 つの問題を考え，弱双対定理を証明する．

1 はじめに

Power Cone Programming[1] は次の問題

$$\begin{aligned}
\min\ & c^T \boldsymbol{x} \\
\text{s.t. } & A\boldsymbol{x} = b \\
& \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \geq |z| \\
& \boldsymbol{x} \in \{(x_i, z) \in \Re_+^n \times \Re\} \\
& \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ 0 < \alpha_i < 1\ i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{P}$$

双対問題は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\max\ & b^T \boldsymbol{y} \\
\text{s.t. } & A^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{s} = c \\
& \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{s_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} \geq |t| \\
& \boldsymbol{s} \in \{(s_i, t) \in \Re_+^n \times \Re\} \\
& \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ 0 < \alpha_i < 1\ i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{D}$$

*toshihirokosaki@gmail.com

目的関数の差は次のようになる.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} &= (A^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s})^T\boldsymbol{x} - (A\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y} \\ &= \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i s_i + zt \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} x_i s_i - \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i s_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

1つ目の不等号は錐に入っていることより，2つ目の不等号は相加相乗平均の不等式よりなりたつ. したがって，弱双対定理がなりたつ.

2 ユークリッドノルムのとき

絶対値をユークリッドノルムに一般化した次の問題を考える.

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \geq \|\boldsymbol{z}\|_2 \\ & \boldsymbol{x} \in \{(x_i, z_j) \in \Re_+^n \times \Re^m\} \\ & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ 0 < \alpha_i < 1\ i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{P-2}$$

双対問題は次のようになる.

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ & A^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{c} \\ & \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{s_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} \geq \|\boldsymbol{t}\|_2 \\ & \boldsymbol{s} \in \{(s_i, t_j) \in \Re_+^n \times \Re^m\} \\ & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ 0 < \alpha_i < 1\ i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{D-2}$$

目的関数の差は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
c^T\boldsymbol{x} - b^T\boldsymbol{y} &= (A^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s})^T\boldsymbol{x} - (A\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y} \\
&= \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i s_i + \sum_{j=1}^{m} z_j t_j \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} x_i s_i - \|\boldsymbol{z}\|_2 \|\boldsymbol{t}\|_2 \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} x_i s_i - \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i s_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

1つ目の不等号はコーシーシュワルツの不等式より，2つ目の不等号は錐に入っていることより，3つ目の不等号は相加相乗平均の不等式よりなりたつ．したがって，弱双対定理がなりたつ.

3 Lpノルムのとき

ノルムを Lp ノルムに一般化した次の問題を考える.

$$
\begin{aligned}
&\min\ c^T\boldsymbol{x} \\
&\text{s.t. } A\boldsymbol{x} = b \\
&\qquad \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \geq \|\boldsymbol{z}\|_p \\
&\qquad \boldsymbol{x} \in \{(x_i, z_j) \in \Re_+^n \times \Re^m\} \\
&\qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ 0 < \alpha_i < 1\ i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
\tag{P-p}
$$

双対問題は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\max\ b^T\boldsymbol{y} \\
&\text{s.t. } A^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s} = c \\
&\qquad \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{s_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} \geq \|\boldsymbol{t}\|_q \\
&\qquad \boldsymbol{s} \in \{(s_i, t_j) \in \Re_+^n \times \Re^m\} \\
&\qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ 0 < \alpha_i < 1\ i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
\tag{D-p}
$$

ただし，$p \geq 1$ の有理数で，q は $1/p + 1/q = 1$ をみたす定数.

目的関数の差は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
c^T\boldsymbol{x} - b^T\boldsymbol{y} &= (A^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s})^T\boldsymbol{x} - (A\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y} \\
&= \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i s_i + \sum_{j=1}^{m} z_j t_j \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} x_i s_i - \|\boldsymbol{z}\|_p \|\boldsymbol{t}\|_q \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} x_i s_i - \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i s_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

1 つ目の不等号はヘルダーの不等式より，2 つ目の不等号は錐に入っていることより，3 つ目の不等号は相加相乗平均の不等式よりなりたつ．したがって，弱双対定理がなりたつ．

4 一般のノルムのとき

ノルムを一般のノルム $f(\cdot)$[2] に一般化した次の問題を考える．

$$
\begin{aligned}
&\min\ c^T\boldsymbol{x} \\
&\text{s.t. } A\boldsymbol{x} = b \\
&\quad \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \geq f(\boldsymbol{z}) \\
&\quad \boldsymbol{x} \in \{(x_i, z_j) \in \Re_+^n \times \Re^m\} \\
&\quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ 0 < \alpha_i < 1\ i = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{P-n}
$$

双対問題は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\max\ b^T\boldsymbol{y} \\
&\text{s.t. } A^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s} = c \\
&\quad \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{s_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} \geq f^D(\boldsymbol{t}) \\
&\quad \boldsymbol{s} \in \{(s_i, t_j) \in \Re_+^n \times \Re^m\} \\
&\quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ 0 < \alpha_i < 1\ i = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{D-n}
$$

ただし，f^D は f の双対ノルム [2] で，

$$
f^D(\boldsymbol{y}) := \max_{f(\boldsymbol{x})=1} |\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}| \tag{1}
$$

と定義される．

目的関数の差は次のようになる.

$$\begin{aligned}
c^T\boldsymbol{x} - b^T\boldsymbol{y} &= (A^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s})^T\boldsymbol{x} - (A\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y} \\
&= \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i s_i + \sum_{j=1}^{m} z_j t_j \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} x_i s_i - f(\boldsymbol{z}) f^D(\boldsymbol{t}) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} x_i s_i - \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i s_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

1つ目の不等号は双対ノルムの定義より，2つ目の不等号は錐に入っていることより，3つ目の不等号は相加相乗平均の不等式よりなりたつ．したがって，弱双対定理がなりたつ．

5 Quadratic Power Cone Programming

目的関数に凸二次関数を考える．

$$\begin{aligned}
\min\ & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + c^T\boldsymbol{x} \\
\text{s.t. } & A\boldsymbol{x} = b \\
& \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \geq |z| \\
& \boldsymbol{x} \in \{(x_i, z) \in \Re^n_+ \times \Re\} \\
& \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ 0 < \alpha_i < 1\ i = 1, \ldots, n,\ Q \in \mathcal{S}^n_+.
\end{aligned} \tag{PQ}$$

双対問題は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\max\ & b^T\boldsymbol{y} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} \\
\text{s.t. } & A^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s} - Q\boldsymbol{x} = c \\
& \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{s_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} \geq |t| \\
& \boldsymbol{s} \in \{(s_i, t) \in \Re^n_+ \times \Re\}
\end{aligned} \tag{DQ}$$

主問題の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ と双対問題の実行可能解 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{s})$ について，目的関数の差は次のように

なる.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + c^T\boldsymbol{x} - (b^T\boldsymbol{y} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'^T Q\boldsymbol{x}') &= (A^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s} - Q\boldsymbol{x}')^T\boldsymbol{x} - (A\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'^T Q\boldsymbol{x}' \\
&= \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i s_i + zt + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} x_i s_i - \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i s_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

1つ目の不等号は錐に入っていることより，2つ目の不等号は相加相乗平均の不等式と行列 Q の半正定値性よりなりたつ．したがって，弱双対定理がなりたつ．

6 ユークリッドノルムのとき

絶対値をユークリッドノルムに一般化した次の問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\min\ & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + c^T\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = b \\
& \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \geq \|\boldsymbol{z}\|_2 \\
& \boldsymbol{x} \in \{(x_i, z_j) \in \Re_+^n \times \Re^m\} \\
& \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1,\ 0 < \alpha_i < 1\ i = 1, \ldots, n,\ Q \in \mathcal{S}_+^n.
\end{aligned}
\tag{PQ-2}
$$

双対問題は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\max\ & b^T\boldsymbol{y} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.}\ & A^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s} - Q\boldsymbol{x} = c \\
& \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{s_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} \geq \|\boldsymbol{t}\|_2 \\
& \boldsymbol{s} \in \{(s_i, t_j) \in \Re_+^n \times \Re^m\} \\
& \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1,\ 0 < \alpha_i < 1\ i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
\tag{DQ-2}
$$

主問題の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ と双対問題の実行可能解 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{s})$ について，目的関数の差は次のように

なる.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + c^T\boldsymbol{x} - (b^T\boldsymbol{y} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'^T Q\boldsymbol{x}') &= (A^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s} - Q\boldsymbol{x}')^T\boldsymbol{x} - (A\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'^T Q\boldsymbol{x}' \\
&= \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i s_i + \sum_{j=1}^{m} z_j t_j + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} x_i s_i - \|\boldsymbol{z}\|_2\|\boldsymbol{t}\|_2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} x_i s_i - \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i s_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

1つ目の不等号はコーシーシュワルツの不等式より，2つ目の不等号は錐に入っていることより，3つ目の不等号は相加相乗平均の不等式と行列 Q の半正定値性よりなりたつ．したがって，弱双対定理がなりたつ.

7 Lp ノルムのとき

ノルムを Lp ノルムに一般化した次の問題を考える.

$$
\begin{aligned}
\min\ & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + c^T\boldsymbol{x} \\
\text{s.t. } & A\boldsymbol{x} = b \\
& \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \geq \|\boldsymbol{z}\|_p \\
& \boldsymbol{x} \in \{(x_i, z_j) \in \Re_+^n \times \Re^m\} \\
& \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ 0 < \alpha_i < 1\ i = 1, \ldots, n,\ Q \in \mathcal{S}_+^n.
\end{aligned}
\tag{PQ-p}
$$

双対問題は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\max\ & b^T\boldsymbol{y} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} \\
\text{s.t. } & A^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s} - Q\boldsymbol{x} = c \\
& \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{s_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} \geq \|\boldsymbol{t}\|_q \\
& \boldsymbol{s} \in \{(s_i, t_j) \in \Re_+^n \times \Re^m\} \\
& \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ 0 < \alpha_i < 1\ i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
\tag{DQ-p}
$$

ただし，$p \geq 1$ の有理数で，q は $1/p + 1/q = 1$ をみたす定数.

主問題の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ と双対問題の実行可能解 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{s})$ について，目的関数の差は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + c^T\boldsymbol{x} - (b^T\boldsymbol{y} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'^T Q\boldsymbol{x}') &= (A^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s} - Q\boldsymbol{x}')^T\boldsymbol{x} - (A\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'^T Q\boldsymbol{x}' \\
&= \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\
&= \sum_{i=1}^n x_i s_i + \sum_{j=1}^m z_j t_j + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\
&\geq \sum_{i=1}^n x_i s_i - \|\boldsymbol{z}\|_p \|\boldsymbol{t}\|_q + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\
&\geq \sum_{i=1}^n x_i s_i - \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i s_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

1 つ目の不等号はヘルダーの不等式より，2 つ目の不等号は錐に入っていることより，3 つ目の不等号は相加相乗平均の不等式と行列 Q の半正定値性よりなりたつ．したがって，弱双対定理がなりたつ．

8　一般のノルムのとき

ノルムを一般のノルム $f(\cdot)$[2] に一般化した次の問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\min\ & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + c^T\boldsymbol{x} \\
\text{s.t. } & A\boldsymbol{x} = b \\
& \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \geq f(\boldsymbol{z}) \\
& \boldsymbol{x} \in \{(x_i, z_j) \in \Re_+^n \times \Re^m\} \\
& \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,\ 0 < \alpha_i < 1\ i = 1, \ldots, n,\ Q \in \mathcal{S}_+^n.
\end{aligned}
\tag{PQ-n}
$$

双対問題は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\max\ & b^T\boldsymbol{y} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} \\
\text{s.t. } & A^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s} - Q\boldsymbol{x} = c \\
& \prod_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} \geq f^D(\boldsymbol{t}) \\
& \boldsymbol{s} \in \{(s_i, t_j) \in \Re_+^n \times \Re^m\} \\
& \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,\ 0 < \alpha_i < 1\ i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
\tag{DQ-n}
$$

ただし，f^D は f の双対ノルム [2] で，

$$f^D(\boldsymbol{y}) := \max_{f(\boldsymbol{x})=1} |\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}| \tag{2}$$

と定義される．

主問題の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ と双対問題の実行可能解 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{s})$ について，目的関数の差は次のようになる．

$$\begin{aligned}
c^T\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} - (b^T\boldsymbol{y} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'^T Q\boldsymbol{x}') &= (A^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s} - Q\boldsymbol{x}')^T\boldsymbol{x} - (A\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'^T Q\boldsymbol{x}' \\
&= \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i s_i + \sum_{j=1}^{m} z_j t_j + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} x_i s_i - f(\boldsymbol{z}) f^D(\boldsymbol{t}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} x_i s_i - \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i s_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

1 つ目の不等号は双対ノルムの定義より，2 つ目の不等号は錐に入っていることより，3 つ目の不等号は相加相乗平均の不等式と行列 Q の半正定値性よりなりたつ．したがって，弱双対定理がなりたつ．

9 結論と今後の課題

Power Cone Programming を一般化した 3 つの問題と目的関数を凸二次関数とした 4 つの問題に対して弱双対定理を証明した．今後の課題としては，強双対定理がなりたつか調べること，問題を解くアルゴリズムを考えることがある．

参考文献

[1] Peter R. Chares, Cones and Interior-Point Algorithm for Structured Convex Optimization involving Powers and Exponentials, Ph.D. thesis, Universite catholique de Louvain Ecole Polytechnique de Louvain, 2007.

[2] Roger A. Horn and Chrles R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, 2007.