数理解析研究所講究録
第1986巻 2016年 138-147

Posetの交差グラフとその必要十分条件について

川谷　元

横浜国立大学環境情報学府

Abstract

本稿では，与えられた様々な事象に対して，その中に存在する交差関係を抽象化した交差グラフを取り扱う．特に，半順序集合 (Poset) を表すグラフから得られる交差グラフについて，そのグラフ間の対応関係が得られるため，本稿ではその関係を考察することで，グラフの必要十分条件について部分的解決を与える．

1　導入

無向グラフとは，頂点集合 V と，いくつかの頂点対からなる辺集合 E から構成されるものであり，本稿で扱う無向グラフはすべて単純無向グラフとする．また，無向グラフの辺集合 E に対して，写像 $f:E\rightarrow V\times V$ から得られる有向辺集合 A と，無向グラフの頂点集合 V の対を有向グラフ $D=(V,A)$ という．この章では，与えられた事象 (無向グラフや有向グラフ) に対して，ある関係にのみ着目することで得られるグラフの族を紹介する．

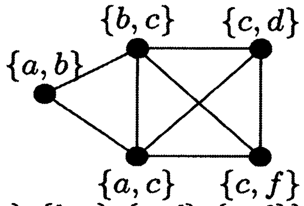


Fig. 1. $\mathcal{F}=\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{c,d\},\{c,f\}\}$ に関する交差グラフ

元々，交差グラフとは集合族に対して得られるグラフとして定義されたグラフである．集合族 $\mathcal{F}=\{F_{1},F_{2},\ldots,F_{n}\}$ に関する交差グラフ $G_{\mathcal{F}}$ とは，頂点集合 $V(G)=\mathcal{F}$ とし，集合 F_{i},F_{j} に対して $v\in F_{i},F_{j}$ となる要素 v が存在するとき，辺集合 $F_{i}F_{j}\in E(G)$ (ただし，$i\neq j$) とするグラフのことである．

集合族に限らず，様々な事象から交差関係を取り出すことで，集合族の時と同様にして，交差グラフを構成することが可能である．しかし，扱う事象の条件や構造上の違いによっては，そこから得られる交差グラフのグラフ的特

Email address: `kawatanigen0326@gmail.com` (川谷　元).

徴付けが異なるため，与えられたグラフが元々はどのような事象から構成されるグラフであるかを判別することは困難であった．そこで，様々な事象に関する交差グラフの必要十分条件を得ることにより，与えられたグラフがどのような事象を表す交差グラフなのかを知ることができる．従って，各事象毎の交差グラフの必要十分条件を得ることが，当該研究におけるテーマの一つとなっている．本稿では，主に有向グラフに関する交差グラフについて取り扱うため，次の章ではまず，そのような交差グラフの定義と，必要十分条件などの先行研究について紹介する．

2 様々な交差グラフについて

生態学者である Cohen [2] は，食物連鎖における種 a が種 b を捕食するという関係を有向辺 ab として表す有向グラフから様々な特徴付けを得るために,「共通の捕食関係（餌）を持つ」という競争関係を抽象化した競争グラフ (Competition graph) を定義し，それを用いて生態学での研究を行った．

生態学において，自身と同じ種の動物で共食いをする場合や，捕食関係が巡り巡って自分に戻ってくる場合は特殊なものとして除外されていたことから，Cohen が扱った有向グラフは loop や directed cycle のない有向非巡回グラフ (Acyclic digraph) に限定されていた．つまり，competition graph は，acyclic digraph D の有向辺 $A(D)$ に対して，$A(D)$ に存在する共通の始点を持つという交差関係 ($\exists z \in V(D) s.t. \{x,z\},\{y,z\} \in E(D)$) を抽象化したグラフであると言い換えることができる．ちなみに，有向辺に存在する共通の終点を持つという交差関係を抽象化した common-enemy graph というグラフも存在するが，competition graph と同義であるため，ここでは説明を省略する．

一方で，それまでに扱われていた有向グラフに比べ，数学的な構造を持つものとして，McMorris と Zaslavsky [7] は半順序集合 (Poset) に対して competition graph の概念を一般化した．

半順序集合 (Poset) $\boldsymbol{P}$ とは，集合 V 上の関係 $\leq$ が次のような条件を満たすもののことである．

(1) For all $x \in X$, $x \leq_P x$. (Reflexivity)
(2) If $x \leq_P y$ and $y \leq_P x$, then $x = y$. (Antisymmerty)
(3) If $x \leq_P y$ and $y \leq_P z$, then $x \leq_P z$. (Transitivity)

Poset P において，$x \leq_P y$ であるとき，x は y の下界，y は x の上界と呼ぶ．Poset P における x の自身を除く上界集合全体のことを $U_P(x)$，下界集合全体のことを $L_P(x)$ と表す．また，poset P の $x, y \in V(P)$ について，$L_P(x) \cap L_P(y)$ の最大元のことを **greatest lower bound $\boldsymbol{L_g(x,y)}$** と表す．同様に，$U_P(x) \cap U_P(y)$ の最小元のことを **least upper bound $\boldsymbol{U_l(x,y)}$** と表す．また，Poset P の **dual poset $\boldsymbol{P_d}$** とは，頂点集合は poset P と同じであり，poset P において $x \leq_P y$ ならば，$y \leq_{P_d} x$ とする poset のことである．

Poset の順序関係は，Fig.2 のようにハッセ図として書き表すことができることから，competition graph と同様にして，poset からグラフを得ることができる．以下のいくつかのグラフは，poset から得られる代表的な交差グラフである．

Definition 2.1 (Upper bound graph) *Poset P に関する upper bound graph* UB(P) とは, 次の条件を満たす *graph* のことである.

1. $V(\mathrm{UB}(P)) = V(P)$,
2. $xy \in E(\mathrm{UB}(P)) \Leftrightarrow \exists z \in V(P); x, y \leq_P z$.

Definition 2.2 (Lower bound graph) *Poset P に関する lower bound graph* LB(P) とは, 次の条件を満たす *graph* のことである.

1. $V(\mathrm{LB}(P)) = V(P)$,
2. $xy \in E(\mathrm{LB}(P)) \Leftrightarrow \exists z \in V(P); z \leq_P x, y$.

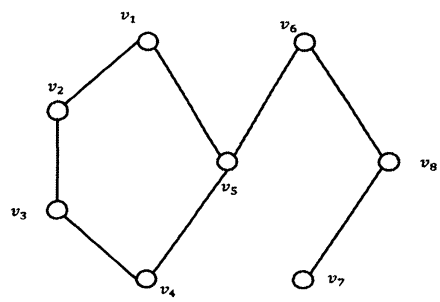


Fig. 2. Poset P

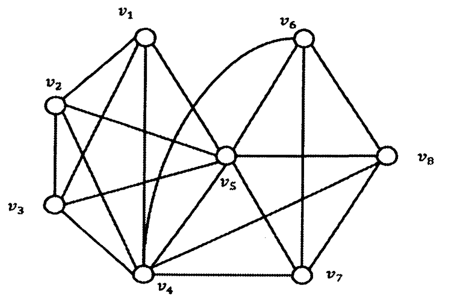


Fig. 3. Upper bound graph UB(P)

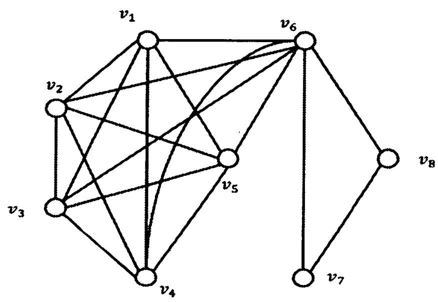


Fig. 4. Lower bound graph LB(P)

Poset に関する upper bound graph は，有向辺における「共通の終点を持つ」という関係について抽象化したグラフであり，これは competition graph の定義と対応しているグラフである．逆に，lower bound graph は有向辺における「共通の終点を持つ」という関係について抽象化したグラフであり，common-enemy graph の定義と対応しているグラフである．

Upper bound graph については，次のような必要十分条件が知られている．

Theorem 1 (F.R.McMorris and T.Zaslavsky[7]) *Graph* G が *upper bound graph* であるための必要十分条件は, 以下の条件を満たす G の *clique* の族 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_m\}$ が存在することである.

(1) $\mathcal{C}$ が G の *edge clique cover.*
(2) 各 $C_i \in \mathcal{C}$ に対して, $\exists u_i \in C_i - (\bigcup_{j \neq i} C_j)$; $u_i \in V(G)$.

G が孤立点を持たない *graph* ならば, $\mathcal{C}$ は一意的である.

次に, lower bound graph と upper bound graph の両方の辺を持つグラフ, double bound graph について紹介する.

Definition 2.3 (Double bound graph) *Poset* P に関する *double bound graph* DB(P) とは, 次の条件を満たす *graph* のことである.

1. $V(\mathrm{DB}(P)) = V(P)$,
2. $xy \in E(\mathrm{DB}(P)) \Leftrightarrow x \neq y, \exists w, z \in V(P); w \leq_P x, y \leq_P z$.

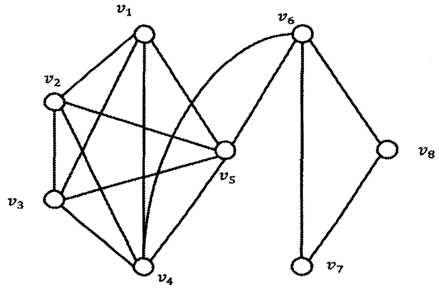


Fig. 5. Double bound graph DB(P)

Double bound graph についても, upper bound graph と同様に, グラフのクリークによる必要十分条件が知られている.

Theorem 2 (D.Diny[3]) *Graph* G が *double bound graph* であるための必要十分条件は, 以下の条件を満たす G の *clique* の族 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_m\}$ と, G の *disjoint* な独立集合 M, N が存在することである.

(1) $\mathcal{C}$ が G の *edge clique cover.*
(2) 各 $C_i \in \mathcal{C}$ に対して, $\exists m_i, n_i$; $m_i \in M, n_i \in N$ かつ, $m_i, n_i \subseteq C_i, m_i, n_i \not\subseteq C_j (i \neq j)$.
(3) $\forall v \in V(G) - (M \cup N)$ に対して, $\|U_v\| \times \|L_v\|$ が v を含む $\mathcal{C}$ の *clique* の個数に等しい. ただし, $U_v = \{m \in M; mv \in E(G)\}$, $L_v = \{n \in N; nv \in E(G)\}$.
また, G が孤立点を持たない *graph* ならば, $\mathcal{C}$ は一意的である.

これまでのグラフは, poset における反射律の関係も含めて構成していた. しかし, 反射律のような自明な関係によって, 他の順序関係がグラフの構造として現れないことがある. こういった経緯から, 反射律を除いた poset の関係を抽象化したものが, 次のグラフである.

Definition 2.4 (Strict-double-bound graph) *Poset P に関する strict-double-bound graph* sDB(P) とは, 次の条件を満たす *graph* のことである.

1. $V(\mathrm{sDB}(P)) = V(P)$,
2. $uv \in E(\mathrm{sDB}(P))$,
   $\Leftrightarrow u \neq v, \exists w, z (\neq u, v) \in V(P); w \leq_P u, v \leq_P z.$

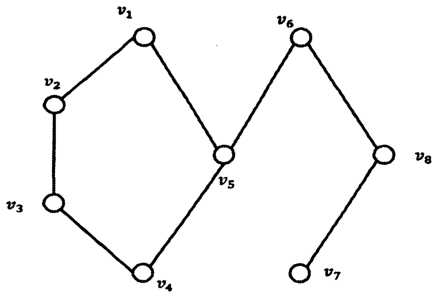


Fig. 6. Poset P

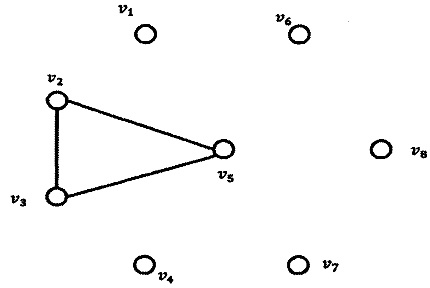


Fig. 7. strict-double-bound graph sDB(P)

Graph G が strict-double-bound graph であるとは, $G \cong \mathrm{sDB}(P)$ となる poset P が存在することである. Poset の極大元は自身を除く上界を持たない. 同様に極小元は自身を除く下界を持たなことから, strict-double-bound graph の構成条件より, poset の極大元と極小元が strict-double-bound graph において孤立点となることがわかる.

Proposition 3 (Scott[11]) 任意の *connected graph G* にいくつかの孤立点を加えることによって, *G* は *strict-double-bound graph* となる.

このことから, 任意の connected graph に関して, strict-double-bound graph となるために加える孤立点の最小数はいくつであるかが問題となる. 定義より, グラフに存在するクリークの個数分の倍の孤立点を加えることにより, 任意の connected graph を含むような strict-double-bound graph を構成することができる.

しかし, 実際は加える孤立点の個数がそれほど必要のない例の方が多いため, 加えるべき孤立点の最小数が問題となる. 加えるべき孤立点の最小数を strict-double-bound number とし, 以下のように定義される.

Strict-double-bound number $\zeta(G)$ とは, $\zeta(G) = \min\{l; G \cup \overline{K_l}$: poset に関する strict-double-bound graph$\}$ である. Strict-double-bound number については, Scott [11] によって, 次のような結果が知られている.

Theorem 4 (Scott [11]) *Connected graph G* について, 極大クリーク被覆を Q, クリーク被覆数を $|Q|$ とする. このとき, $\lceil 2\sqrt{|Q|}\,\rceil \leq \zeta(G) \leq |Q| + 1$

Scott の結果は, 一般のグラフについて成り立つが, その上界が最適となる例は, クリーク被覆数が少ないものに限られる. 従って, Tsuchiya[5] らは Scott の定理における下界が最適となるものについて, いくつかのグラフの族について研究を行った.

一方で，代数学の研究者である Joshi [4] は，代数的構造から得られる交差グラフの染色数について研究を行った．そのような代数的構造は，順序構造として置き換えることができ，Joshi が扱った交差グラフは poset に関する交差グラフとして捉えることができる．

Theorem 5 (Nation [8]) *Lattice* L の二項演算について，次のように順序関係を定義することができる．$\forall p, q \in L$ について，$p \leq q$ *if and only if* $p \wedge q = p$. そのとき，*Lattice* L は，任意の要素対 (p, q) について，一意的な *greatest lower bound* $L_g(p, q)$ と，*least upper bound* $U_l(p, q)$ を持つような *poset* となる．

逆に，任意の要素対 p, q に対して一意的な $L_g(p, q), U_l(p, q) \in P$ が存在する *poset* P について，$p \wedge q := L_g(p, q)$ *and* $p \vee q := U_l(p, q)$ と定義をすることにより，$(P, \wedge, \vee)$ は *lattice* となる．

Theorem 5 を用いて，lattice から poset が得られる．このとき，lattice における $\{0\}$ と $\{1\}$ はそれぞれ poset において唯一の極小元と，極大元になる．

Definition 2.5 *Lattice* $L = (X, \leq)$ に関する *zero-divisor graph* $G_{\{0\}}(L)$ [4] とは，次の条件を満たす *graph* のことである．

1. $V(G_{\{0\}}(L)) = \{x \in L \setminus \{0\} | x \wedge y = 0 \text{ for some } y \in L \setminus \{0\}\}$,
2. $xy \in E(G_{\{0\}}(L)) \Leftrightarrow x \wedge y = 0$.

ある整数の約数全体の包含関係や，単体的複体における面・辺・点の包含関係など，自然な包含関係を考えたときに，その順序構造は lattice となることが知られているため，より狭いクラスの議論ではあるが，これまでに得られていた poset の交差グラフの特徴付けよりも，lattice の交差グラフの特徴付けは数学的に意味のあるものだと言える．しかし，lattice に関する zero-divisor graph は，その必要十分条件が知られていない．従って，その必要十分条件を知るために，poset から得られる交差グラフの相互関係について，次の章でまとめる．

3 Poset の交差グラフの相互関係

本章では，前章にて紹介した poset の代表的な交差グラフについて，それぞれの対応関係を考察する．これによって，必要十分条件が得られていない zero-divisor graph について，結果を得ることを目指す．

Proposition 6 *Poset* P に関する *upper bound graph* $\mathrm{UB}(P)$(*lower bound graph* $\mathrm{LB}(P)$) は，*double bound graph* $\mathrm{DB}(P)$ を部分グラフとして含んでいる．

Proposition 7 *Poset* P に関する *upper bound graph* $\mathrm{UB}(P)$ と，*Poset* P の *dual* P^* に関する *lower bound graph* $\mathrm{LB}(P^*)$ は同型である．

Proposition 8 *Poset* P に関する *strict-upper bound graph* $\mathrm{sUB}(P)$ (*strict-*

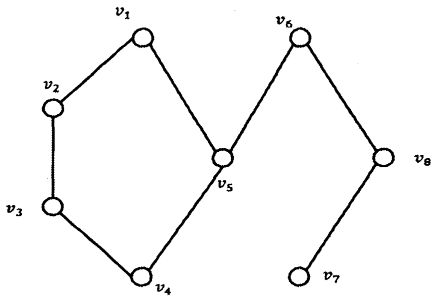


Fig. 8. Poset P

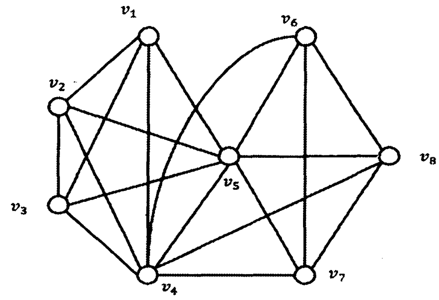


Fig. 9. Upper bound graph UB(P)

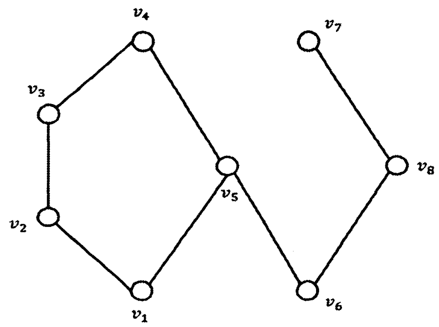


Fig. 10. Poset P_d

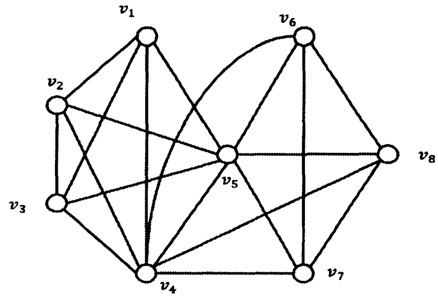


Fig. 11. Lower bound graph LB(P_d)

lower bound graph sLB(P)) は，*strict-double bound graph* sDB(P) を部分グラフとして含んでいる．

グラフの構成より，zero-divisor graph に対応する交差グラフとは次のものになることがわかる．

Proposition 9 グラフにおける孤立点集合を I とする．このとき，*Lattice* L *with* $\{0\}$ *and* $\{1\}$ について，$G_{\{0\}}(L) \cong \overline{\mathrm{LB}(L_{\setminus\{0\}})} \setminus I$ が成り立つ．

Proof. 定義より，poset P 上の要素 x, y について，$z \leq_P x$ かつ,$z \leq_P y$ であるとき，$xy \in E(\mathrm{LB(P)})$ となる．同様に，そのような要素 x, y について，$xy \notin E(\mathrm{G}_{\{0\}}(\mathrm{P}))$ また，poset P 上において $z \leq_P x$ かつ，$z \leq_P y$ (for $\forall y \in V(P)$) となる z を持つ $x \in V(P)$ は，lower bound graph 上の自身を除くすべての頂点と隣接していることから，その補グラフにおいてそのような頂点 x は孤立点となる．同様に，zero-divisor graph の定義より，$z \leq_P x$ かつ，$z \leq_P y$ (for $\forall y \in V(P)$) となる z を持つ $x \in V(P)$ は zero-divisor graph の頂点として含まないこととしているため，poset P が lattice L であるならば，$G_{\{0\}}(L) \cong \overline{\mathrm{LB}(L_{\setminus\{0\}})} \setminus I$ が成り立つ．□

4 Latticeの交差グラフの必要十分条件

前章にて，posetのlower bound graphとzero-divisor graphは互いに補グラフの関係にあることを証明した．Posetに関するlower bound graphは，既に必要十分条件が知られているが，zero-divisor graphは元となるposetの構造がlatticeという特殊な構造に限定されており，その必要十分条件が知られていない[1] [4]．つまり，posetの構造をlatticeのみに限定した際のlower bound graphの必要十分条件を得ることによって，その補グラフの対応からzero-divisor graphの必要十分条件を得ることができると考えられる．本章では，latticeのzero-divisor graphの必要十分条件について，そのlower bound graphを用いて考察する．

まず，latticeに関するlower bound graphについて，Proposition 9から定義する．

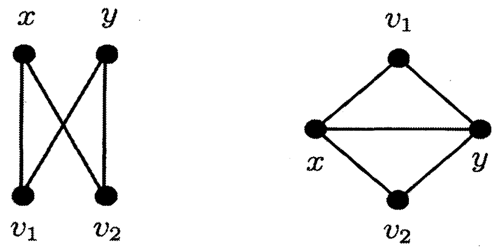
Definition 4.1 (Lower bound graph of a lattice) *Lattice* L*に関するlower bound graph* LB(L)*とは，次の条件を満たすgraphのことである．*

1. $V(\mathrm{LB}(L)) = \{x \in L \setminus \{0\}\}$,
2. $xy \in E(\mathrm{LB}(L)) \Leftrightarrow \exists z \in V(L \setminus \{0\}); z \leq_L x, y$.

Lower bound graphが非連結なグラフにならないために，latticeのlower bound graphの頂点集合にlatticeの$\{0\}$は含まないこととする．

このとき，latticeの定義より，latticeとなるposetの禁止順序構造(Order X)は次のようなものとなる．このことから，その順序構造をグラフに置き換えたものがlatticeに関するlower bound graphから$\{1\}$という頂点を除いた際の禁止誘導部分グラフになるということが考えられる．

注意点として，$\{1\}$はlatticeに存在する唯一の極大元であり，lower bound graphでは自身を除く全ての頂点と隣接している．また，zero-divisor graphでは頂点集合として含まれないため，この議論では$\{1\}$は考慮しない．



: Order A　　　: $I = \mathrm{LB}(A)$

Fig. 12.

従って，Theorem 1と，Fig.12の順序構造とグラフ構造の関係から次のことが考えられる．

Conjecture 10 *グラフ* G *について，*G*がlatticeのLB-graphである必要十分条件は，グラフ* G *から* $xy \in E(G)$ *となる頂点* x *を1つ除いたグラフ* G' *につ*

いて，以下のような辺クリーク被覆 $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, ..., Q_n\}$ が存在することである．
(1) $\mathcal{Q}$ が G' の辺クリーク被覆である，
(2) 各 Q_i に対して，頂点 $v_i \in Q_i - (\bigcup_{j \neq i} Q_j)$ が存在する，
(3) グラフ G' が誘導部分グラフとしてグラフ I を持たない．

一方で，次のような命題がある．

Proposition 11 自明ではない *poset* P に関する *lower bound graph* LB(P) について，LB(P) $\cong$ LB(P') となる *poset* $P'(\neq P)$ が存在する．

Proposition 10 より，order A から構成されたグラフ I に対応する poset 構造には，lattice が含まれている可能性がある．現に Order A に対して，交差グラフの構造に影響が出ないような順序関係を新たに加えることによって，グラフ I に対応する別の poset を作ることができる.(Fig.13) 更に，関係を加えたことにより，lattice の禁止部分構造が解消されている．

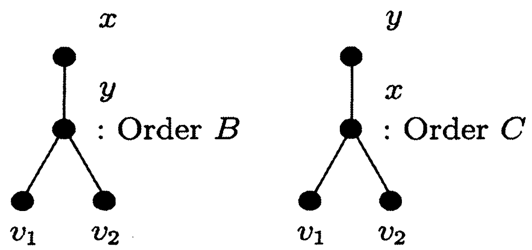


Fig. 13.

従って，lattice に関する lower bound graph の禁止部分グラフは，純粋に lattice の禁止部分構造をグラフ化したものではないということがわかる．

5 総括

本稿では，poset に関するいくつかの交差グラフについて，グラフの対応関係や先行研究に触れ，まだ必要十分条件が得られていない交差グラフに関しての考察を行った．特に今回は，poset の中でも特殊な族である lattice についての lower bound graph を考察することで，他の交差グラフの必要十分条件を考えるための足掛かりを得た．

今後，Conjecture 9 の解決に向けて研究を進めていくと共に，様々な交差グラフについての対応関係や，必要十分条件を得て行く．

References

[1] I.Beck, *Coloring of a commutative ring*, J.Algebra, **116**(1988), 208-226.

[2] J.E.Cohen, *Food Webs and Niche Space, Princeton University Press*, Princeton, NJ, (1978).

[3] D.Diny, *The double bound graph of a partially ordered set*, Journal of Combinatorics, Information & System Sciences, **10**(1985), 52-56.

[4] V.Joshi, *The zero divisor graphs of boolean posets*, Math. Slovaca, **64**(2014), 511-519.

[5] S.Konishi, K.Ogawa, S.Tagusari and M.Tsuchiya, *Note on strict-double-bound numbers of paths, cycles and wheels*, JCMCC, 83(2012), 205-210.

[6] J.R.Lundgren, *Food webs, competition graphs, competition-common enemy graphs, and niche graphs*, Applications of Combinatorics and Graph Theory in the Biological and Social Sciences, IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 17, Springer-Verlag, New York (1989) 221-43.

[7] F.R.McMorris and T.Zaslavsky, *Bound graphs of a partially ordered set*, Journal of Combinatorics, Information & System Sciences, **71**(1982), 134-138.

[8] J.B.Nation, *Notes on Lattice Theory*, Cambridge studies in advanced mathematics, 60(1998).

[9] K.Ogawa, *On distances of posets with the same upper bound graphs*, Yokohama Mathematical Journal, **47**(1999), 231-237.

[10] K.Ogawa and M.Tsuchiya, *Note on Transformations of Posets with the Same Upper Bound Graph and Minimal Elements*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., **29(1)** (2006), 179-82.

[11] D.D.Scott, The compettion-common enemy graph of a digraph, Discrete Applied Mathematics, **17**(1987), 269-280.