数理解析研究所講究録
第 1986 巻 2016 年 130-137

グラフの非対称性に関する ERDŐS-RÉNYI の定理とその有向グラフへの拡張

佐竹 翔平 (名大情報科学研究科), 澤正憲 (神戸大システム情報学研究科),
神保雅一 (中部大現代教育学部)

1. 導入

一般に与えられたグラフの対称性の高さはその全自己同型群の位数で測られることが多い. その意味で, グラフ G の自己同型群が自明でないとき G は対称であるといい, 自明であるときには非対称であるという. だがこの尺度では G が非対称であるときには, G がいかに非対称であるかを知ることはできない. Erdős-Rényi [7] は G の symmetrization にかかわった辺の数の最小値 $A(G)$ を G の非対称性の尺度とした. $A(G)$ を G の **asymmetry number** とよぶことにする. ここで G の **symmetrization** とは辺の追加または除去を行ってある対称なグラフに変形する操作を指す. ただし, $A(K_1)=\infty$ と定義し, 以下では 2 頂点以上のグラフを考える. 有限グラフの非対称性の別の尺度についてはその後のいくつかの論文で提案されている (例えば [8], [9] がある). Erdős-Rényi [7] では, まずすべての n 頂点グラフ G に対して

$$A(G)\leq[\frac{n-1}{2}]$$

が成立することを示した. この不等式を **Erdős-Rényi** 不等式とよぶことにする. その等号成立の必要条件は G が Paley-type と呼ばれる強正則グラフ $\mathrm{srg}(n,(n-1)/2,(n-5)/4,(n-1)/4)$ となることである. だが, [7, Section 2] でも述べられている通り, その上界を達成するグラフは見つかっていない. そこで [7] では確率的手法を用いて Erdős-Rényi の不等式を漸近的に達成するグラフの存在を示した. このことからほとんどすべての有限グラフは非対称であることが示される. さらに, [7] では有限グラフのみならず可算無限グラフの対称性についても言及されている. すべての辺について確率 1/2 で辺を選びランダムに可算無限グラフを選んだとするとき, そのグラフは確率 1 で **Rado** グラフ R と同型になる. この R は対称であることから, 可算無限ランダムグラフは確率 1 で対称であることがわかる. これは有限の場合と可算無限の場合のギャップを示す大変興味深い結果である. さらにその後の Cameron らの後続研究により, $\mathrm{Aut}(R)$ の位数が $2^{\aleph_0}$ であることが示され, $\mathrm{Aut}(R)$ が $2^{\aleph_0}$ 個の互いに非共役な巡回的自己同型を持つことが示されている. (cf. [2], [4])

本稿では, ループ, 多重辺, 平行辺を許さない有向グラフ (単純有向グラフ, 向き付けされたグラフ) を扱う. まず有限有向グラフ D に対して, D の **symmetrization** を辺の除去, 追加, そして辺の向きの変更を行って D を対称な有向グラフに変更する操作と定義する. さらに D の symmetrization においてかかわった辺の数の最小値を $A(D)$ と定義し, これを D の **asymmetry number** と呼ぶことにする. さらに **random oriented graph** RO は [5] において定義された R の自然な向き付けされたグラフである. 以下の節では Satake ら [11] によって与えられた次の結果について述べる.

- Erdős-Rényi 不等式の有向グラフ類似を与える．すなわち n 頂点有向グラフ D $(n \geq 2)$ に対して，
$$A(D) \leq [\frac{2n+1}{3}]$$
が成立する．等号成立の必要条件は D が $(n-1)/3$-正則有向グラフとなることである．
- 上式を漸近的に達成するグラフが存在する．すなわち任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $n_0(\epsilon)$ があって，任意の $n > n_0(\epsilon)$ に対して $A(D) > \frac{2}{3}n(1-\epsilon)$ なる n 頂点有向グラフ D が存在する．本論文ではこれを漸近最良性定理とよぶことにする．
- $\mathrm{Aut}(RO)$ の位数は $2^{\aleph_0}$ である．さらに，$\mathrm{Aut}(RO)$ は $2^{\aleph_0}$ 個の互いに共役でない巡回的自己同型をもつ．

本稿の具体的な構成は以下のとおりである．第 2 節では Erdős-Rényi らによる無向グラフにおける関連する結果について紹介する．第 3 節では上の 3 つの結果について詳しく紹介する．第 4 節では Erdős-Rényi 不等式の類似の導出について述べ，漸近最良性定理については証明の方針とアイデアを簡潔に述べる．第 5 節では RO の結果に関連する補題や概念をまとめる．最後に，第 6 節では総括を行い，今後の研究課題について述べる．

2. 無向グラフの ASYMMETRY NUMBER

本節では，[7] で述べられている単純無向グラフの asymmetry number に関する結果と，Cameron らによる R の自己同型群に関する結果を述べる．グラフ理論における基本的な用語，定義については Diestel の教科書 [6] を参照されたい．本稿では集合 X の濃度を $|X|$ で表し，グラフ G の全自己同型群を $\mathrm{Aut}(G)$ で表す．G を空グラフでない有限グラフとする．G の **symmetrization** とは辺の除去，辺の追加の 2 つの辺の操作によって G をある対称なグラフ G' に変形する操作である．S_G を G の symmetrization 全体の集まりとし，$s \in S_G$ に対して，d_s, a_s をそれぞれ s で除去，追加された辺の数とする．

定義 2.1. 有限グラフ G の **asymmetry number** を以下で定義する．
$$A(G) = \begin{cases} \min\{d_s + a_s \mid s \in S_G\} & |\mathrm{Aut}(G)| = 1, |V(G)| \geq 2; \\ 0 & |\mathrm{Aut}(G)| \geq 2; \\ \infty & |V(G)| = 1. \end{cases}$$

定義から $A(G) = A(\bar{G})$ が直ちにしたがう．図 1 は $A(G) = 1$ であるグラフの例である．G 自身は非対称であり，たとえば辺 $\{5,6\}$ を除去することで，G は対称なグラ

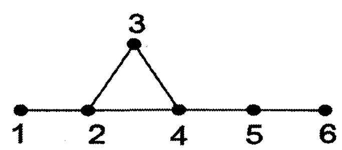

FIGURE 1. $A(G) = 1$ であるグラフ G

フに変形することができる.
　この $A(G)$ について次の上界が与えられる.

定理 2.2 (Erdős-Rényi, [7]). $n \geq 2$ とする. すべての n 頂点グラフ G に対して

$$A(G) \leq [\frac{n-1}{2}] \tag{2.1}$$

が成立する. 等号成立の必要条件は G が $\mathrm{srg}(n,(n-1)/2,(n-5)/4,(n-1)/4)$ となることである.

(2.1) を達成するグラフは見つかっていない. [7] では 7 頂点までのグラフの asymmetry number が調べられているが, 5 頂点までのグラフはすべて対称となり, 6 頂点ならびに 7 頂点グラフについても asymmetry number は高々1 である. さらに [7] では $\mathrm{srg}(n,(n-1)/2,(n-5)/4,(n-1)/4)$ はすべて対称となり, 等号を達成するグラフは存在しないことが予想されている. 現在は Paulus [10] により非対称である Paley-type の強正則グラフの存在性が示されており, (2.1) を達成するグラフが存在する可能性は残されているが, いまだ未解決のままである.

[7] では構成的に例を与える代わりに, 以下の定理でランダムグラフの手法を用いて漸近的に (2.1) を達成するグラフが存在することを示した.

定理 2.3 (Erdős-Rényi, [7]). 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある自然数 $n_0(\epsilon)$ があって, すべての $n > n_0(\epsilon)$ に対し, $A(G) > \frac{n}{2}(1-\epsilon)$ なる n 頂点グラフ G が存在する.

さらに [7] では可算無限ランダムグラフの対称性についても言及されている. すべての辺について確率 1/2 で辺を選ぶ試行を独立に行い, ランダムに可算無限グラフを生成する. この生成されたグラフを可算無限ランダムグラフとよぶ. さらに **Rado グラフ** R とは以下で定義される可算無限グラフである.

> すべての互いに交わらない $U, V \subset V(R)$ に対して, すべての U の頂点と隣接し, すべての V の頂点と隣接しない頂点 z が存在する.

このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 2.4 (Erdős-Rényi, [7]). 可算無限ランダムグラフは確率 1 で *Rado* グラフ R と同型になる. さらに R は対称的である.

定理の前半は R の定義を満たさないランダムグラフの確率が 0 となることを示すことによって得られる. 後半の主張は R の定義を満たす可算無限ランダムグラフは同型を除いて一意であることを示す往復論法を用いた議論から得られる. さらに [2], [4] では $\mathrm{Aut}(R)$ について以下の結果が示されている.

定理 2.5 (cf. Cameron-Johnson, [4]). $|\mathrm{Aut}(R)| = 2^{\aleph_0}$. さらに $\mathrm{Aut}(R)$ は $2^{\aleph_0}$ 個の互いに非共役な巡回的自己同型をもつ.

3. 有向グラフの ASYMMETRY NUMBER

最初にいくつかの定義と記法を導入しておく. D を空でない有向グラフとする. $v \in V(D)$ の入近傍, 出近傍をそれぞれ $N_D^+(v)$, $N_D^-(v)$ で表す. すなわち

$$N_D^+(v) := \{u \in V(D) \mid (u,v) \in E(D)\},\ N_D^-(v) := \{u \in V(D) \mid (v,u) \in E(D)\}.$$

D の自己同型 σ とは, $(u,v) \in E(D)$ と $(u^\sigma, v^\sigma) \in E(D)$ が必要十分となる $V(D)$ 上の置換のことである. $\mathrm{Aut}(D)$ が非自明な自己同型をもつとき, D は対称であるといい, そうでないとき D は非対称であるという. また D の巡回的自己同型とは 1 つの巡回置換で表される推移的な自己同型のことを指す. さらに $A \subset V(D)$ に対して, $G_{(A)}$ は $\mathrm{Aut}(D)$ における A の固定化部分群を表すものとする. すなわち

$$G_{(A)} := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(D) \mid すべての\ a \in A\ に対して\ a^\sigma = a\}.$$

また D の頂点の入次数と出次数がすべて k であるとき, D を k-正則であるという. D を有限有向グラフとする. D の **symmetrization** とは, 辺の除去, 追加, さらに辺の向きの逆転を行って, ある対称な有向グラフ D' に変形する操作を指す. $\boldsymbol{S_D}$ を D のすべての symmetrization の集まりとし, $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{S_D}$ に対して $\boldsymbol{d_s}, \boldsymbol{a_s}, \boldsymbol{r_s}$ をそれぞれ $\boldsymbol{s}$ において除去, 追加, 向きを逆転された辺の数とする.

定義 3.1 (asymmetry number). D を有限有向グラフとする. D の **asymmetry number** を以下で定義する：

$$A(D) = \begin{cases} \min\{d_s + a_s + r_s \mid s \in S_D\} & |\mathrm{Aut}(D)| = 1, |V(D)| \geq 2; \\ 0 & |\mathrm{Aut}(D)| \geq 2; \\ \infty & |V(D)| = 1. \end{cases}$$

図 2 は $A(D) = 2$ である有向グラフの例である. D 自身は非対称であり, どの 1 本を変更しても, 対称な有向グラフに変形することはできない. だが, たとえば辺 $(4,5)$, $(5,1)$ を除去することで, D を対称な有向グラフに変形することができる. また D^{-1}

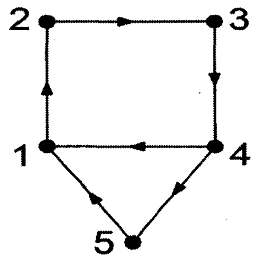

FIGURE 2. $A(D) = 2$ である有向グラフ D.

を D のすべての有向辺の向きを逆転して得られる有向グラフとすると, 定義よりただちに $A(D) = A(D^{-1})$ がしたがう.

次の定理が [11] における最初の主結果である.

定理 3.2 (Satake-Sawa-Jimbo, [11]). $n \geq 2$ とし, D を n 頂点有向グラフとする. このとき

$$A(D) \leq [\frac{2n+1}{3}] \tag{3.1}$$

が成立する. 等号成立の必要条件は $n \equiv 1 \pmod 3$ であり, D が $(n-1)/3$-正則有向グラフであることである.

(3.1) については等号を達成する自明な例として, 長さ 1 の有向道があげられる. だが, 3 頂点以上の有向グラフについては (3.1) を達成する例は見つかっていない. だが次の漸近最良性定理は十分大きな n については漸近的に (3.1) を達成する有向グラフの存在性を示している.

定理 3.3 (Satake-Sawa-Jimbo, [11]). 任意の $\epsilon > 0$ に対してある $n_0(\epsilon)$ があって, すべての $n > n_0(\epsilon)$ について $A(D) > \frac{2}{3}n(1-\epsilon)$ なる n 頂点有向グラフが存在する.

定理 3.3 より次の系がただちにしたがう.

系 3.4. $\lim_{n\to\infty} \max_{D\in\mathcal{D}_n} \frac{A(D)}{n} = \frac{2}{3}$.

次に可算無限有向グラフの対称性に関する結果について述べる. **random oriented graph** (RO) とは以下の定義を満たす可算無限有向グラフである (cf. [5]).

(*) すべての互いに交わらない $V_1, V_2, V_3 \subset V(RO)$ について,

$N^-_{RO}(v) = V_1$, $N^+_{RO}(v) = V_2$, $(N^-_{RO}(v) \cup N^+_{RO}(v) \cup \{v\}) \cap V_3 = \emptyset$.

なる頂点 v が存在する.

定義から RO は R の向き付けされたグラフであることが容易にわかる.

さて, $\mathcal{D}(\aleph_0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ は以下の辺確率をもつ $\mathbb{N}$ 上の可算無限ランダム有向グラフの集合とする.

$$P[(i,j) \in E(D)] = 1/3,\ P[(j,i) \in E(D)] = 1/3\ (i < j)$$

このとき次の命題を得る.

命題 3.5 (Satake-Sawa-Jimbo, [11]). 可算無限ランダム有向グラフは確率 1 で RO と同型になる.

証明. $V_1 = \{v_1^{(1)}, \dots, v_l^{(1)}\}$, $V_2 = \{v_1^{(2)}, \dots, v_m^{(2)}\}$, $V_3 = \{v_1^{(3)}, \dots, v_n^{(3)}\} \subset \mathbb{N}$ は互いに交わらないとする. $z_1, \cdots, z_s \in \mathbb{N}$ とおくと, 各 $1 \le i \le s$ に対して,

$$P[\{D \in \mathcal{D}(\aleph_0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) \mid z_1, \dots, z_s \text{ は } V_1, V_2, V_3 \text{ について (*) をみたさない }\}]$$
$$= \{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{l+m+n}\}^s.$$

よって,

$$P[\{D \in \mathcal{D}(\aleph_0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) \mid V_1, V_2, V_3 \text{ についてどの頂点も (*) をみたさない }\}] = 0.$$

(V_1, V_2, V_3) の組は高々$\aleph_0$ 個しかないので, 可算加法性から

$$P[\{D \in \mathcal{D}(\aleph_0, p, q) \mid D \text{ は (*) をみたさない }\}] = 0.$$

□

次の定理は [11] の 3 つ目の主結果であり, これは RO の対称性について述べている.

定理 3.6 (Satake-Sawa-Jimbo, [11]). $|\mathrm{Aut}(RO)| = 2^{\aleph_0}$. 特に RO は対称的である.

さらに, $\mathrm{Aut}(RO)$ について次の結果も得られた :

定理 3.7 (Satake-Sawa-Jimbo, [11]). $\mathrm{Aut}(RO)$ は $2^{\aleph_0}$ 個の互いに共役でない巡回的自己同型をもつ.

4. 定理 3.2, 3.3 の証明のアイデア

本節では, [11] で述べられている定理 3.2 の証明の概略を述べたのち, 定理 3.3 の証明のアイデアについて簡潔に述べる.

定理 3.2 の不等式の導出の前に, いくつかの記法を導入しておく. D を $\{1, 2, \dots, n\}$ 上の有向グラフとし, G_D を D の台グラフとする. $i \in V(D)$ に対して, i の D における入次数, 出次数をそれぞれ v_i^+, v_i^- とする. また $j, k \in V(D)$ に対し,

$$\Delta_{jk} = |\{(a,b) \mid \{j,a\}, \{b,k\} \in E(G_D), a \ne b\}|$$

とおき, P_{jk} は j, k を端点にもつ D 内の長さ 2 の有向道の個数とする.

定理 *3.2* の証明の概略, [11]. 変形した有向グラフが involution を持つような D の symmetrization を考える. $A(D)$ の定義より,

$$A(D) \leq \min_{j \neq k}\{\Delta_{jk} + P_{jk}\} + 1 \leq \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\Delta_{jk} + P_{jk})}{n(n-1)} + 1.$$

さらに, 簡単な計算から次式を得る:

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\Delta_{jk} + P_{jk})}{n(n-1)} &= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{l=1}^{n}\{(n-1)(v_l^+ + v_l^-) - (v_l^+)^2 - (v_l^-)^2 - v_l^+ v_l^-\} \\ &\leq \frac{2(n-1)}{3}.\end{aligned}$$

これより所望の式を得る. □

つぎに定理 3.3 の証明についてであるが, これはかなり煩雑な場合分けと計算を要するため, 本稿では証明のアイデアを述べるにとどめる. 詳細については [11] を参照されたい. $\epsilon > 0$ は任意に与え, 以下では固定する. $i < j$ に対して, 辺確率 $P[(i,j) \in E(D)] = P[(j,i) \in E(D)] = \frac{1}{3}$ で i, j 間の辺を選んでランダムに $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上の有向グラフ D を生成する. このとき $P_{n,\epsilon}$ を次のような確率とする.

> ある $\sigma \in S_n$ があって, $\sigma \in \mathrm{Aut}(D^*)$ をみたすある D^* に $\frac{2}{3}n(1-\epsilon)$ 本以下の辺の変更で行われる symmetrization で変形される有向グラフの確率 (または割合).

定理 3.3 を示すには, 十分大きな n について $P_{n,\epsilon} < 1$ が成り立つことを示せばよい. [11] では $\lim_{n\to\infty} P_{n,\epsilon} = 0$ を示すことで定理が証明されている. さらに $\lim_{n\to\infty} P_{n,\epsilon} = 0$ より, 以下の系が導かれる.

系 4.1. ほとんどすべての有限有向グラフは非対称である.

5. 定理 3.6, 3.7 に関する補題と概念

本節ではまず, 定理 3.6 の証明に関する事実と補題を与え, さらに定理 3.7 の証明に関連する universal pair の概念を紹介し, いくつかの補題を紹介する. 以下では混乱の恐れがない限り, RO を $\tilde{D}$ と記す.

事実 5.1 (cf. [2]). D を可算無限有向グラフとする. このとき $|\mathrm{Aut}(D)| = 2^{\aleph_0}$ またはある有限の $A \subset V(D)$ があって $G_{(A)} = \{id\}$.

次の補題は RO のロバスト性を示している.

補題 5.2 (Satake-Sawa-Jimbo, [11]). $U = \{u_1, \ldots, u_l\}, V = \{v_1, \ldots, v_m\}, W = \{w_1, \ldots, w_n\} \subset V(\tilde{D})$ は互いに交わらないとする. さらに

$$\begin{aligned}Z_{l,m,n} := \{z \in V(\tilde{D}) \mid (u_i, z) \in E(\tilde{D})\ 1 \leq i \leq l,\ (z, v_j) \in E(\tilde{D})\ 1 \leq j \leq m, \\ (w_k, z), (z, w_k) \notin E(\tilde{D})\ 1 \leq k \leq n\}.\end{aligned}$$

このとき, $\tilde{D}[Z_{l,m,n}]$ は $\tilde{D}$ と同型となる.

[11] では $|\mathrm{Aut}(RO)| \neq 2^{\aleph_0}$ を仮定し, 事実 5.1 を踏まえて補題 5.2 から $G_{(A)}$ に属する非自明な自己同型写像の存在性を示し矛盾を導くことによって, 定理を示している.

さて, 定理 3.7 の証明では次の universal pair の概念が鍵となる.

定義 5.3. S^+, S^- を互いに交わらない $\mathbb{N}$ の部分集合とする. $\boldsymbol{S} = (S^+, S^-)$ が **universal pair** とは任意の $k \in \mathbb{N}$ と, 互いに交わらない $T, U \subset \{1, \ldots, k\}$ に対して, 以下を満たす整数 N が存在する組のことである.

$$(N + j \in S^+ \iff j \in T) \text{ かつ } (N + j \in S^- \iff j \in U). \tag{5.1}$$

この universal pair の概念は [2] で述べられている universal set の類似である. [1, P.13-15] の議論と同様にして, 次の補題を得る.

補題 5.4 (Satake-Sawa-Jimbo, [11]). *universal pair* は $2^{\aleph_0}$ 個存在する.

さて $\boldsymbol{S} = (S^+, S^-)$ を universal pair とする. 可算無限有向グラフ $\Gamma_{\boldsymbol{S}}$ を $V(\Gamma_{\boldsymbol{S}}) = \mathbb{Z}$,

$$E(\Gamma_{\boldsymbol{S}}) = \{(x, y) \mid y - x \in S^+ \text{ and } x < y\} \cup \{(y, x) \mid y - x \in S^- \text{ and } x < y\}$$

で定義する.

補題 5.5 (Satake-Sawa-Jimbo, [11]). (i) $\Gamma_{\boldsymbol{S}}$ は $\tilde{D}$ と同型である.
(ii) $\alpha : \xi \mapsto \xi + 1$ $(\xi \in \mathbb{Z})$ は $\Gamma_{\boldsymbol{S}}$ の巡回的自己同型である.

注意 5.6. 任意の universal pair $\boldsymbol{S}$ に対して, 補題 5.5 (ii) より, $\tilde{D}$ と $\Gamma_{\boldsymbol{S}}$ の間の同型写像が存在する. したがって $\tilde{D}$ の頂点は以下のようにラベル付けすることができる.

$$(v_i, v_j) \in E(\tilde{D}) \iff (i, j) \in E(\Gamma_{\boldsymbol{S}}) \text{ かつ } (v_j, v_i) \in E(\tilde{D}) \iff (j, i) \in E(\Gamma_{\boldsymbol{S}}).$$

よって補題 5.5 (i) から, $\alpha_{\boldsymbol{S}} : v_i \mapsto v_{i+1}$ は $\tilde{D}$ の巡回的自己同型である. このようにして, universal pair の集合から $\tilde{D}$ の巡回的自己同型の集合への写像が得られる.

[11] では $\tilde{D}$ の非共役な巡回的自己同型の集合から universal pair の集合の間の 1 対 1 対応を示し, 補題 5.4 から定理 3.7 を証明している. さらにこれは定理 3.6 の別証明でもあることを注意しておく.

また補題 5.5 (i) と, S^+, S^- のいずれか一方に 1 が含まれる universal pair を選べることから次の命題を得る.

命題 5.7. *RO* は *(two-way)* 有向 *Hamilton* 道をもつ.

6. 総括

本稿ではまず n 頂点有向グラフ D に対して asymmetry number $A(D)$ を与え, $A(D) \leq [(2n+1)/3]$ が成り立つことを紹介し, その等号成立の必要条件を述べた. さらにその上界を達成する非自明な例を構成する代わりに, 上界を漸近的に達成する十分大きな有向グラフの存在性を示す結果について述べた. さらに可算無限ランダム有向グラフは RO に確率 1 で同型になることを示し, RO の自己同型群の位数が $2^{\aleph_0}$ であることを紹介し, 関連する補題について言及した. またその別証明となる $\mathrm{Aut}(RO)$ が $2^{\aleph_0}$ 個の互いに非共役な巡回的自己同型をもつという結果についても述べた.
さらに RO のグラフ理論的性質として, 以下の興味深い結果が [11] で示されている.

定理 6.1 (Satake-Sawa-Jimbo, [11]). *D を可算無限有向グラフで, 各頂点の入次数, 出次数はすべて有限とする. このとき RO はそれぞれ D に同型かつ互いに辺素な全域部分グラフに分割することができる.*

この定理より, RO は辺素で互いに同型な Hamilton 閉路に分割することができる.
最後に, 今後の研究課題として以下を挙げておく.

- asymmetry number としてほかの定義を与えることは可能か?
- 構成的に Erdős-Rényi 不等式を達成する例, またはその無限系列を与えることは可能か?

- 超グラフに対して, 自然に asymmetry number を定義したときの Erdős-Rényi 不等式の類似は何か?
- RO を universal pair を用いたもの以外の方法で構成することは可能か?
- Aut(RO) がほかに持ちうる自己同型は何か?
- Aut(RO) の元を分類せよ.
- RO 以外では, どのような R の向き付けされたグラフで定理 6.1 に相当する結果が得られるか?

謝辞

定理 3.3 の証明について, 榎本彦衛先生に数多くのご助言とアイデアをいただきました. この場を借りて御礼申し上げます.

References

[1] P. J. Cameron. Oligomorphic permutation groups. London Mathematical Society Lecture Note Series, 152. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
[2] P. J. Cameron. The random graph. arXiv:1301.7544v1.
[3] P. J. Cameron. The random graph revisited, The mathematics of Paul Erdős, II, *Progr. Math.* **201**, Birkhäuser/Springer, Basel, pp. 267–274.
[4] P.J. Cameron, K.W. Johnson. An investigation of countable B-groups. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **102** (1987), 223–231.
[5] R. Diestel, I. Leader, A. Scott, S. Thomassé. Partitions and orientations of the Rado graph. *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), 2395–2405.
[6] R. Diestel. Graph theory. Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 173. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
[7] P. Erdős, A. Rényi. Asymmetric graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **14** (1963), 295–315.
[8] J. Spencer. Maximal asymmetry of graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **27** (1976), 47–53.
[9] J. H. Kim. B. Sudakov, V. H. Vu. On the asymmetry of random regular graphs and random graphs. *Random Structures Algorithm* **21** (2002), 216–224.
[10] A. J. L. Paulus. Conference Matrices and Graphs of Order 26. *Technische Hogeschool Eindhoven. Report WSK* 73/06, Eindhoven, 1973.
[11] S. Satake, M. Sawa, M. Jimbo. Erdős-Rényi Theory for Asymmetric Digraphs. in preprint.