数理解析研究所講究録
第 1986 巻 2016 年 108-120

平面分割と直交多項式

京都大学大学院情報学研究科　上岡修平

Shuhei Kamioka
Graduate School of Informatics,
Kyoto University

1 はじめに

自然数の2次元配列

$$\pi=(\pi_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}=\begin{pmatrix}\pi_{1,1} & \pi_{1,2} & \pi_{1,3} & \cdots \\ \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} & \cdots \\ \pi_{3,1} & \pi_{3,2} & \pi_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \tag{1}$$

$(\pi_{i,j}\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ で次の2条件を満たすものを**平面分割 (plane partition)** という.

(i) $|\pi|=\sum_{i,j=1}^{\infty}\pi_{i,j}<\infty$.

(ii) 任意の $(i,j)\in\mathbb{Z}_{\geq 1}^{2}$ に対して $\pi_{i,j}\geq\max\{\pi_{i+1,j},\pi_{i,j+1}\}$.

$|\pi|$ を平面分割 π の**ノルム**という. 本研究では平面分割の**良い (nice)**[1] 和公式を (双) 直交多項式を用いて探す.

整数分割を (2次元) Young 図形で表すように, 平面分割 π も **3次元 Young 図形**で表すと視覚的に分かりやすい. 例えば平面分割

$$\pi=\begin{pmatrix}3 & 3 & 2 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{2}$$

(他成分は全て 0) が与えられたとき, 各 $(i,j)\in\mathbb{Z}_{\geq 1}^{2}$ に対して座標 (i,j) のところに $\pi_{i,j}$ 個の箱を積み上げることにより図1のような図形を得る. これが平面分割 (2) を視覚化した3次元 Young 図形である. なお図1には積み上げられた箱の他に2つの壁面と床面が描いてある. これにより平面分割を六角形領域の**菱形タイリング (rhombus tiling, lozenge tiling)** と同一視することもできる.

3次元 Young 図形の底面が $r\times c$ の長方形に収まる平面分割, すなわち $\pi_{r+i,j}=\pi_{i,c+j}=0$ $(i,j\in\mathbb{Z}_{\geq 1})$ をみたす平面分割の全体を $\mathcal{P}(r,c)$ と書く. さらにそのよう

[1] ここでは (3)–(5) のような「$\sum=\prod$」型の等式を**良い (nice)** 和公式と言う [9].

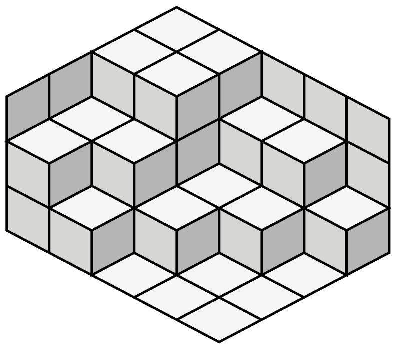

図 1: 平面分割 (2) に対応する 3 次元 Young 図形.

な平面分割の中で 3 次元 Young 図形の高さが n 以下のもの, すなわち $\pi_{1,1} \leq n$ を満たすものの全体を $\mathcal{P}(r,c,n)$ と書く. $\mathcal{P}(r,c)$ が無限集合であるのに対し $\mathcal{P}(r,c,n)$ は有限集合である. 実際 $\mathcal{P}(r,c,n)$ は 3 次元 Young 図形が $r \times c \times n$ の直方体に収まる平面分割の全体であり, そのような平面分割は高々有限個しかない. ちなみに平面分割 (2) は $r \geq 4, c \geq 5, n \geq 3$ のとき $\mathcal{P}(r,c)$ とその部分集合である $\mathcal{P}(r,c,n)$ に属する.

平面分割の良い和公式として最も基本的なものは MacMahon の**ノルム母関数**

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}(r,c)} q^{|\pi|} = \prod_{i=0}^{r-1}\prod_{j=0}^{c-1}(1-q^{i+j+1})^{-1}, \tag{3a}$$

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}(r,c,n)} q^{|\pi|} = \prod_{i=0}^{r-1}\prod_{j=0}^{c-1}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-q^{i+j+2}}{1-q^{i+j+1}} \tag{3b}$$

である [10, Section IX]. ノルム母関数 (3a) は同 (3b) から $n \to \infty$ の極限により得られる. その意味で (3b) は (3a) をより精密化したものである. MacMahon の発見から随分の時間を経て Stanley は**ノルム・トレース母関数**

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}(r,c)} q^{|\pi|}a^{\mathrm{tr}(\pi)} = \prod_{i=0}^{r-1}\prod_{j=0}^{c-1}(1-aq^{i+j+1})^{-1} \tag{4}$$

を見つけた [12, 13]. ただし $\mathrm{tr}(\pi)$ は平面分割 π のトレース, すなわち主対角成分の総和である. それから暫くして Gansner は Stanley の結果を**トレース母関数**

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}(r,c)} \prod_{-r<\ell<c} q_\ell^{\mathrm{tr}_\ell(\pi)} = \prod_{i=0}^{r-1}\prod_{j=0}^{c-1}\left(1-\prod_{\ell=-i}^{j} q_\ell\right)^{-1} \tag{5}$$

に拡張した [3, 4]. ただし $\mathrm{tr}_\ell(\pi)$ ($\ell \in \mathbb{Z}$) は平面分割 π の ℓ **トレース**と呼ばれ

$$\mathrm{tr}_\ell(\pi) = \sum_{j-i=\ell} \pi_{i,j} \tag{6}$$

により定義される. 特に0トレースは通常のトレースに一致する.

Stanley のノルム・トレース母関数 (4) および Gansner のトレース母関数 (5) は $\mathcal{P}(r,c)$ に対する MacMahon のノルム母関数 (3a) の一般化である. 実際, 変数の特殊化 $q_0 = aq, q_\ell = q\ (\ell \neq 0)$ により (5) は (4) に帰着する. さらにトレースを無視する $(a=1)$ ことにより (4) は (3a) に帰着する. ここで素朴に次の疑問が生じる.「同様の良い和公式で $\mathcal{P}(r,c,n)$ に対する MacMahon のノルム母関数 (3b) を一般化するものはあるか.」この疑問に対するナイーブな答えは否である. 実際 (4) および (5) の右辺の $\mathcal{P}(r,c)$ を単純に $\mathcal{P}(r,c,n)$ に取り替えたものは (3b) のように因数分解されない.

本稿では $\mathcal{P}(r,c)$ に対する2つのトレース型母関数 (4) および (5) に着目し, それを精密化するような $\mathcal{P}(r,c,n)$ に対する平面分割の良い和公式を求める. すなわち MacMahon のノルム母関数 (3) において (3b) にあたるものを求める. そのために双直交多項式とその組合せ論的解釈を利用する. 以降の議論では紙数の都合上, 証明等の詳細は省略されている場合が多い. 興味ある読者は [7] を参照してほしい.

2 双直交多項式と格子路

$\mathbb{K}$ を体とし, 2変数 x,y の多項式環の上で定義された線形汎関数 $\mathcal{F}:\mathbb{K}[x,y]\to\mathbb{K}$ を考える. x,y の単項式に対する $\mathcal{F}$ の値を**モーメント**といい

$$f_{i,j} = \mathcal{F}[x^i y^j] \qquad (i,j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{7}$$

と書く. 線形性より $\mathcal{F}$ はモーメントを決めることにより一意に定まる. モーメントの行列式

$$\Delta_n^{(r,c)} = \det_{0\leq i,j<n}(f_{r+i,c+j}) = \begin{vmatrix} f_{r,c} & \cdots & f_{r,c+j} & \cdots & f_{r,c+n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{r+i,c} & \cdots & f_{r+i,c+j} & \cdots & f_{r+i,c+n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{r+n-1,c} & \cdots & f_{r+n-1,c+j} & \cdots & f_{r+n-1,c+n-1} \end{vmatrix} \tag{8}$$

は任意の $(r,c,n)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ に対して非零と仮定する. ただし $\Delta_0^{(r,c)} \equiv 1$ である.

線形汎関数 $\mathcal{F}$ に対する (モニックな) **双直交多項式** $P_n^{(r,c)}(x)\in\mathbb{K}[x]$ を次の2条件を満たすものとして定義する.

(i) $P_n^{(r,c)}(x)$ の先頭項は x^n である.

(ii) 非零定数 $h_n^{(r,c)}$ が存在して直交関係式

$$\mathcal{F}[x^r y^{c+j} P_n^{(r,c)}(x)] = h_n^{(r,c)}\delta_{n,j} \qquad (0\leq j\leq n) \tag{9}$$

が成り立つ. ただし $\delta_{n,j}$ は Kronecker のデルタである.

直交関係式 (9) の非零定数 $h_n^{(r,c)}$ は規格化定数と呼ばれる．双直交多項式 $P_n^{(r,c)}(x)$ の一般形は

$$P_n^{(r,c)}(x) = \begin{vmatrix} f_{r,c} & \cdots & f_{r,c+j} & \cdots & f_{r,c+n-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{r+i,c} & \cdots & f_{r+i,c+j} & \cdots & f_{r+i,c+n-1} & x^i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{r+n,c} & \cdots & f_{r+n,c+j} & \cdots & f_{r+n,c+n-1} & x^n \end{vmatrix} \times (\Delta_n^{(r,c)})^{-1} \tag{10}$$

である．これから規格化定数 $h_n^{(r,c)}$ の行列式表示

$$h_n^{(r,c)} = \frac{\Delta_{n+1}^{(r,c)}}{\Delta_n^{(r,c)}} \tag{11}$$

が得られる．なお変数 x と y の役割を入れ替えた双直交多項式

$$Q_n^{(r,c)}(y) = \begin{vmatrix} f_{r,c} & \cdots & f_{r,c+j} & \cdots & f_{r,c+n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{r+i,c} & \cdots & f_{r+i,c+j} & \cdots & f_{r+i,c+n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{r+n-1,c} & \cdots & f_{r+n-1,c+j} & \cdots & f_{r+n-1,c+n} \\ 1 & \cdots & y^j & \cdots & y^n \end{vmatrix} \times (\Delta_n^{(r,c)})^{-1} \tag{12}$$

も考えられる．$P_n^{(r,c)}(x)$ と $Q_n^{(r,c)}(y)$ は双直交関係式

$$\mathcal{F}[x^r y^c P_m^{(r,c)}(x) Q_n^{(r,c)}(x)] = h_n^{(r,c)} \delta_{m,n} \qquad (m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{13}$$

を満たす．これが「双直交」という名前の由来である．$P_n^{(r,c)}(x)$ と $Q_n^{(r,c)}(y)$ は本質的に同じものなので以下では $P_n^{(r,c)}(x)$ のみを扱う．

命題 1 ([11] 等)**.** 双直交多項式 $P_n^{(r,c)}(x)$ は隣接関係式

$$xP_n^{(r+1,c)}(x) = P_{n+1}^{(r,c)}(x) + a_n^{(r,c)} P_n^{(r,c)}(x), \tag{14a}$$

$$P_n^{(r,c)}(x) = P_n^{(r,c+1)}(x) + b_n^{(r,c)} P_{n-1}^{(r,c+1)}(x) \tag{14b}$$

($(r, c, n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$) を満たす．ただし $P_{-1}^{(r,c)}(x) \equiv 0$ であり係数 $a_n^{(r,c)}$, $b_n^{(r,c)}$ は

$$a_n^{(r,c)} = \frac{h_n^{(r+1,c)}}{h_n^{(r,c)}} = \frac{\Delta_{n+1}^{(r+1,c)} \Delta_n^{(r,c)}}{\Delta_n^{(r+1,c)} \Delta_{n+1}^{(r,c)}}, \tag{15a}$$

$$b_n^{(r,c)} = \frac{h_n^{(r,c)}}{h_{n-1}^{(r,c+1)}} = \frac{\Delta_{n+1}^{(r,c)} \Delta_{n-1}^{(r,c+1)}}{\Delta_n^{(r,c)} \Delta_n^{(r,c+1)}} \tag{15b}$$

により定まる非零定数である．

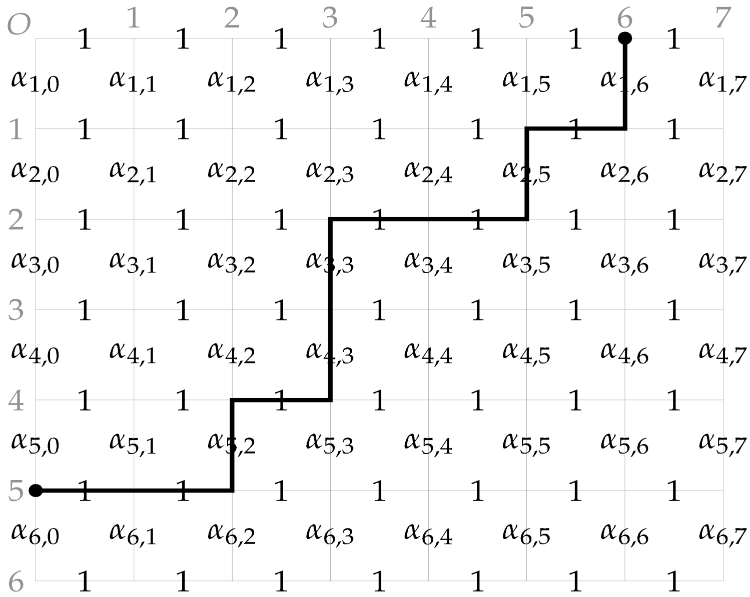

図 2: 辺にラベルの付いた正方格子と $(5,0)$ から $(0,6)$ への格子路.

ここで考えている双直交多項式の概念は, 変数 x と y を同一視する $(x=y)$ とき通常の (自己直交的な) 直交多項式に帰着する. 例えば [14] や [2] で議論されているものはそれにあたる. 通常の直交多項式に対する組合せ論的解釈として Viennot による Motzkin 路や Dyck 路による解釈 [15, 16] がある. Viennot のアイディアは直交多項式の満たす隣接関係式 (3 項間漸化式) からモーメントの組合せ論的な表示を得る点にある. このアイディアを隣接関係式 (14) を満たす双直交多項式 $P_n^{(r,c)}(x)$ に借用する.

図 2 のような辺にラベルの付いた正方格子を考える. この正方格子は $\mathbb{Z}^2$ の第 1 象限 $\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ を行列流の座標で描いたものである. すなわち各格子点は $(i,j) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ の形で表され, (i,j) の下および右に隣接する格子点はそれぞれ $(i+1,j)$ および $(i,j+1)$ である. また下端点が $(i,j) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ にある縦辺のラベルは $\alpha_{i,j}$ であり, 横辺のラベルは全て 1 である.

この正方格子の上で格子路を考える. 任意の格子点 $(i,j),(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ に対して (i,j) **から** (k,ℓ) **への格子路**と言うときには (i,j) と (k,ℓ) を結ぶ $\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ 上の最短路を意味する. ただし $(i,j)=(k,\ell)$ のときは便宜的に長さ 0 の**空路 (empty path)** を考える. 格子路 P の**重み**は P の通る全ての辺のラベルの積であり $w(P)$ と書く. ただし任意の空路の重みは 1 とする. 図 2 にあるのは $(5,0)$ から $(0,6)$ への格子路の 1 つであり, この格子路の重みは $w(P)=\alpha_{1,6}\alpha_{2,5}\alpha_{3,3}\alpha_{4,3}\alpha_{5,2}$ である.

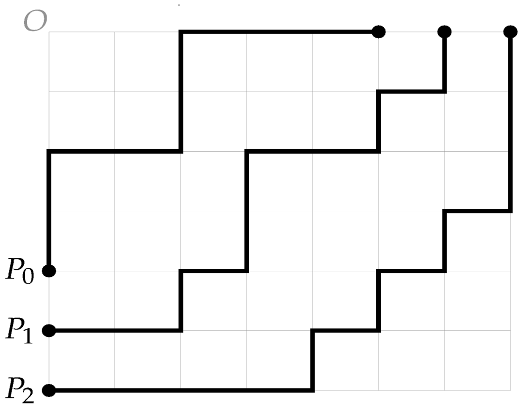

図 3: 非交叉格子路の組 $(P_0, P_1, P_2) \in \mathcal{LP}(4, 5, 3)$.

定理 2. 正方格子の縦辺のラベル $\alpha_{i,j}$ を隣接関係式 (14) の係数 $a_n^{(r,c)}, b_n^{(r,c)}$ を用いて

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} &= a_j^{(i-j-1,0)} && (i > j), && \text{(16a)} \\ &= b_i^{(0,j-i)} && (i \le j) && \text{(16b)} \end{aligned}$$

により定める. このときモーメント $f_{i,j}$ は

$$\frac{f_{r,c}}{f_{0,c}} = \sum_P w(P) \qquad (r, c \in \mathbb{Z}_{\ge 0}) \tag{17}$$

を満たす. ただし右辺の和において P は $(r, 0)$ から $(0, c)$ への格子路全てを動く.

定理 2 より, モーメントの行列式 $\Delta_n^{(r,c)}$ に対する Gessel–Viennot 流 [5, 1] の解釈が可能になる. 自然数の 3 つ組 (r, c, n) に対して, 格子路の n 本組 $(P_0, \ldots, P_{n-1})$ で次の 2 条件を満たすものの全体を $\mathcal{LP}(r, c, n)$ と書く.

(i) P_k は $(r+k, 0)$ から $(0, c+k)$ への格子路である.

(ii) $P_0, \ldots, P_{n-1}$ は**非交叉的 (non-intersecting)** である. すなわちどの相異なる 2 本も同じ点を通らない.

図 3 にそのような $(P_0, \ldots, P_{n-1})$ の例を示す.

系 3. 定理 2 と同じラベルの下で

$$\frac{\Delta_n^{(r,c)}}{\prod_{k=0}^{n-1} f_{0,c+k}} = \sum_{(P_0,\ldots,P_{n-1}) \in \mathcal{LP}(r,c,n)} \prod_{k=0}^{n-1} w(P_k) \qquad (r, c, n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}). \tag{18}$$

3 little q-Laguerre 多項式

前節の一般論を古典直交多項式の１つである little q-Laguerre 多項式

$$L_n(x;a;q) = (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} (aq;q)_n \times {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} q^{-n}, 0 \\ aq \end{matrix} ; q, qx \right) \qquad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{19}$$

に適用する．ただし q 解析の記法は標準的なものである．

- q-Pochhammer 記号

$$(a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k). \tag{20}$$

- q-超幾何級数

$${}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; q, x \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a;q)_i (b;q)_i}{(c;q)_i (q;q)_i} x^i. \tag{21}$$

ただし $a = q^{-n}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ のときは x に関して高々 n 次の多項式になる．

q 解析や little q-Laguerre 多項式については例えば [6] や [8] が詳しい．
little q-Laguerre 多項式の性質を以下にまとめる．

- 係数体 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q, a)$.
- 線形汎関数 $\mathcal{F} : \mathbb{K}[x, y] \to \mathbb{K}$ のモーメント

$$f_{i,j} = \mathcal{F}[x^i y^j] = (aq^{j+1}; q)_i. \tag{22}$$

- 双直交多項式

$$P_n^{(r,c)}(x) = L_n(x; aq^{r+c}; q). \tag{23}$$

- 直交関係式 (9) の規格化定数

$$h_n^{(r,c)} = f_{r,c+n} \times a^n q^{n(r+c+n)} (q;q)_n. \tag{24}$$

- 隣接関係式 (14) の係数

$$a_n^{(r,c)} = q^n (1 - aq^{r+c+n+1}), \tag{25a}$$

$$b_n^{(r,c)} = aq^{r+c+n} (1 - q^n). \tag{25b}$$

定理2のように正方格子の縦辺のラベル $\alpha_{i,j}$ を定める. 今の場合 (25) より

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} &= q^j(1-aq^i) && (i>j), && \text{(26a)}\\ &= aq^j(1-q^i) && (i\le j) && \text{(26b)} \end{aligned}$$

である. このラベルの下で格子路の重み $w(P)$ を考える. P を $(r,0)$ から $(0,c)$ への格子路とする. P と正方格子の境界の囲む領域は (2次元) Young 図形と思うことができる. これを $\lambda(P)$ と書く. Young 図形 λ の箱の総数を $|\lambda|$ と書く. また主対角にある箱の数 (すなわち Durfee square の大きさ) を $\mathrm{D}(\lambda)$ と書く. このとき (26) より P の重みは

$$\frac{w(P)}{(aq;q)_r} = q^{|\lambda(P)|}a^{\mathrm{D}(\lambda(P))}\omega(P;a;q), \tag{27a}$$

$$\omega(P;a;q) = \frac{(q;q)_{\mathrm{D}(\lambda(P))}}{(aq;q)_{\mathrm{D}(\lambda(P))}} \tag{27b}$$

を満たす. 従って系3は

$$\frac{\Delta_n^{(r,c)}}{\prod_{k=0}^{n-1}(aq;q)_{r+k}} = \sum_{(P_0,\dots,P_{n-1})\in\mathcal{LP}(r,c,n)} q^{\sum_{k=0}^{n-1}|\lambda(P_k)|}a^{\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{D}(\lambda(P_k))}\prod_{k=0}^{n-1}\omega(P_k;a;q) \tag{28}$$

を導く.

実は非交叉格子路に関する和公式 (28) は平面分割の言葉に翻訳することができる. (28) から平面分割の良い和公式を得るために次の2つを実行する.

(a) $\mathcal{P}(r,c,n)$ と $\mathcal{LP}(r,c,n)$ の間の全単射を用いて (28) を平面分割の言葉に書き換える.

(b) 双直交多項式を用いてモーメントの行列式 $\Delta_n^{(r,c)}$ の値を計算する.

(a) 全単射による書き換え　古典的な事実として, 平面分割の集合 $\mathcal{P}(r,c,n)$ と非交叉格子路の組の集合 $\mathcal{LP}(r,c,n)$ の間には簡単な全単射が存在する. 全単射では平面分割 $\pi\in\mathcal{P}(r,c,n)$ の3次元 Young 図形から非交叉格子路の組 $(P_0,\dots,P_{n-1})\in\mathcal{LP}(r,c,n)$ を次のように構成する.

平面分割 π の3次元 Young 図形を高さ k $(1\le k\le n)$ のところで切った断面は (2次元) Young 図形になる. この断面の Young 図形を $\lambda_k(\pi)$ と書く. 例えば (2) の平面分割を $\mathcal{P}(4,5,3)$ の元と見るとき, その3次元 Young 図形 (図1) からは図4に示す3つの断面を得る. 各断面 $\lambda_k(\pi)$ のジグザグの縁部分を格子路と見なすとき, n 個の断面は $\mathcal{LP}(r,c,n)$ に属する n 本の非交叉格子路の組を与える. もう少し正確に言うと $\lambda_{n-k}(\pi)$ のジグザグの縁部分を $(r+k,k)$ から $(k,c+k)$ への格子路として描くとき n 本の格子路は非交叉的になる. さらに各 $0\le k<n$ について $(r+k,0)$ と

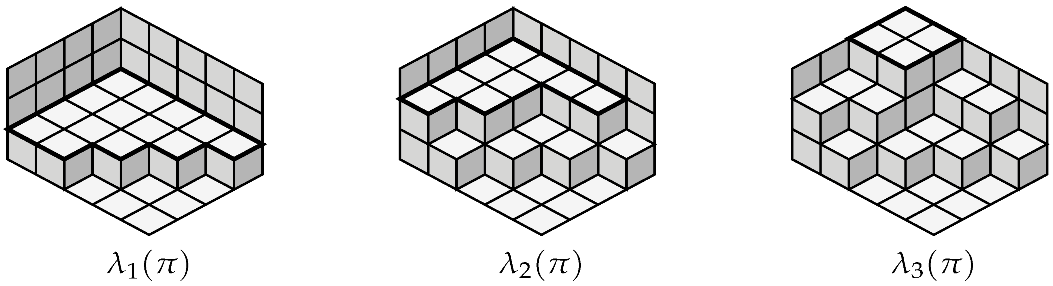

図 4: 3 次元 Young 図形の断面のつくる (2 次元) Young 図形 $\lambda_k(\pi)$.

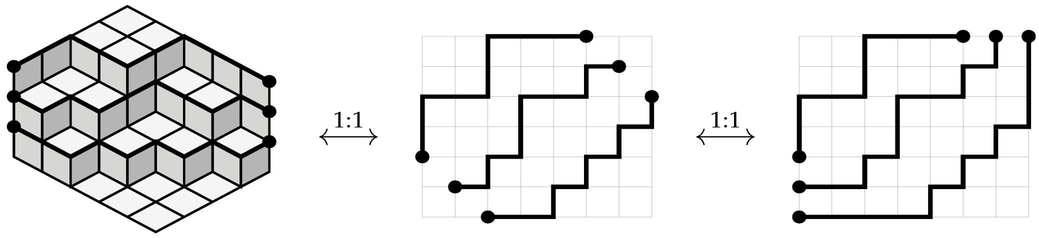

図 5: 平面分割の集合 $\mathcal{P}(r,c,n)$ と非交叉格子路の組の集合 $\mathcal{LP}(r,c,n)$ の間の全単射.

$(r+k,k)$ を結ぶ横線と $(0,c+k)$ と $(k,c+k)$ を結ぶ縦線を描き足すと, $\mathcal{LP}(r,c,n)$ に属する非交叉格子路の組になる. この手続きの例を図 5 に示す. この手続きは明らかに可逆であり, また描き足した横線と縦線は $\mathcal{LP}(r,c,n)$ に属する全ての非交叉格子路の組に含まれるので, $\mathcal{P}(r,c,n)$ から $\mathcal{LP}(r,c,n)$ への全単射になっている.

この全単射を用いて (28) を平面分割の言葉に書き換える. 平面分割 $\pi \in \mathcal{P}(r,c,n)$ と非交叉格子路の組 $(P_0,\dots,P_{n-1}) \in \mathcal{LP}(r,c,n)$ が全単射により互いに対応するとき, 全単射の作り方から

$$|\lambda(P_k)| = |\lambda_{n-k}(\pi)| + k(r+c+k), \tag{29a}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\lambda(P_k)| = |\pi| + \frac{n(n-1)(3r+3c+2n-1)}{6}, \tag{29b}$$

$$\mathrm{D}(\lambda(P_k)) = \mathrm{D}(\lambda_{n-k}(\pi)) + k, \tag{29c}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{D}(\lambda(P_k)) = \mathrm{tr}(\pi) + \frac{n(n-1)}{2} \tag{29d}$$

が成り立つ. 従って (28) は

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}(r,c,n)} q^{|\pi|} a^{\mathrm{tr}(\pi)} \omega_n(\pi) = \frac{\Delta_n^{(r,c)}}{q^{\frac{n(n-1)(3r+3c+2n-1)}{6}} a^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} (aq^{k+1};q)_r (q;q)_k} \tag{30}$$

と等価である．ただし

$$\omega_n(\pi) = \prod_{k=1}^{\pi_{1,1}} \frac{(q^{n-k+1};q)_{\mathrm{D}(\lambda_k(\pi))}}{(aq^{n-k+1};q)_{\mathrm{D}(\lambda_k(\pi))}} \tag{31}$$

である．

(b) モーメントの行列式の計算　モーメントの行列式 $\Delta_n^{(r,c)}$ の計算は双直交多項式を用いれば簡単である．規格化定数 $h_n^{(r,c)}$ の行列式表示 (18) より一般の双直交多項式に関して

$$\Delta_n^{(r,c)} = \prod_{k=0}^{n-1} h_k^{(r,c)} \tag{32}$$

が成り立つ．これに little q-Laguerre 多項式の規格化定数 (24) をそのまま代入すれば，今必要な $\Delta_n^{(r,c)}$ の値が厳密に求まる．結果として平面分割に関する次の良い和公式を得る．

定理 4. 任意の $(r,c,n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ に対して

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}(r,c,n)} q^{|\pi|} a^{\mathrm{tr}(\pi)} \omega_n(\pi) = \prod_{i=0}^{r-1}\prod_{j=0}^{c-1}\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1-aq^{i+j+k+2}}{1-aq^{i+j+k+1}}, \tag{33a}$$

$$\omega_n(\pi) = \prod_{k=1}^{\pi_{1,1}} \frac{(q^{n-k+1};q)_{\mathrm{D}(\lambda_k(\pi))}}{(aq^{n-k+1};q)_{\mathrm{D}(\lambda_k(\pi))}} \tag{33b}$$

が成り立つ．

ここで求めた和公式 (33) は $\mathcal{P}(r,c)$ に対する Stanley のノルム・トレース母関数 (4) の良い精密化である．実際 (33b) より q に関する形式的冪級数として $\lim_{n\to\infty}\omega_n(\pi) \equiv 1$ が成り立つ．従って (33a) の左辺の和は $n\to\infty$ の極限において (4) の右辺の和に一致する．和公式 (33) は $\mathcal{P}(r,c,n)$ に対する MacMahon のノルム母関数 (3b) の良い一般化でもある．これは $\omega_n(\pi)|_{a=1} \equiv 1$ から明らかだろう．

4　一般化 little q-Laguerre 多項式

前節の議論を一般化すると $\mathcal{P}(r,c)$ に対する Gansner のトレース母関数 (5) の良い精密化が得られる．まず記号と記法を準備する．$\boldsymbol{p} = (p_1,p_2,p_3,\dots)$, $\boldsymbol{q} = (q_1,q_2,q_3,\dots)$ に対して

$$\boldsymbol{p}_m = (p_{m+1},p_{m+2},p_{m+3},\dots), \tag{34a}$$

$$\boldsymbol{q}_m = (q_{m+1},q_{m+2},q_{m+3},\dots) \tag{34b}$$

$(m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ と書く．また任意の $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ に対して添字上昇冪

$$x^{\overline{n}} = \prod_{k=1}^{n} x_k \tag{35}$$

を用いる．特に $p_m^{\overline{n}} = \prod_{k=1}^{n} p_{m+k}$, $q_m^{\overline{n}} = \prod_{k=1}^{n} q_{m+k}$ である．

一般化 little q-Laguerre 多項式を

$$\mathcal{L}_n(x; a; p, q) = \sum_{i=0}^{n} x^i \left(\prod_{k=i}^{n-1} p^{\overline{k}} \right) \sum_{i \geq \nu_i \geq \cdots \geq \nu_{n-1} \geq 0} \prod_{k=i}^{n-1} \left(a q^{\overline{k - \nu_k}} - \frac{1}{p^{\overline{\nu_k}}} \right) \tag{36}$$

$(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ により定義する．一般化 little q-Laguerre 多項式は文字通り little q-Laguerre 多項式の一般化であり

$$\mathcal{L}_n(x; a; p, q)|_{\substack{p_1 = p_2 = p_3 = \cdots = q \\ q_1 = q_2 = q_3 = \cdots = q}} = L_n(x; aq^{-1}; q) \tag{37}$$

が成り立つ．

一般化 little q-Laguerre 多項式は以下の性質を持つ．

- 係数体 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(p, q, a)$.
- 線形汎関数 $\mathcal{F} : \mathbb{K}[x, y] \to \mathbb{K}$ のモーメント

$$f_{i,j} = \mathcal{F}[x^i y^j] = \prod_{k=0}^{i-1} (1 - a p^{\overline{k}} q^{\overline{j}}). \tag{38}$$

- 双直交多項式

$$P_n^{(r,c)}(x) = \mathcal{L}_n(x; a p^{\overline{r}} q^{\overline{c}}; p_r, q_c). \tag{39}$$

- 直交関係式 (9) の規格化定数

$$h_n^{(r,c)} = f_{r,c+n} \times a^n \prod_{k=0}^{n-1} p^{\overline{r+k}} (q^{\overline{c+k}} - q^{\overline{c+n}}). \tag{40}$$

- 隣接関係式 (14) の係数

$$a_n^{(r,c)} = p_r^{\overline{n}} (1 - a p^{\overline{r}} q^{\overline{c+n}}), \tag{41a}$$
$$b_n^{(r,c)} = a p^{\overline{r+n-1}} q^{\overline{c}} (1 - q_c^{\overline{n}}). \tag{41b}$$

前節と同様の手法により平面分割に関する次の良い和公式を得る．

定理 5. 任意の $(r,c,n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ に対して

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r,c,n)} a^{\mathrm{tr}_0(\pi)} \left(\prod_{i=1}^{r-1} p_i^{\mathrm{tr}_{-i}(\pi)} \right) \left(\prod_{j=1}^{c-1} q_j^{\mathrm{tr}_j(\pi)} \right) \omega_{r,n}(\pi) = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{j=0}^{c-1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - a p^{\bar{i}} q^{\overline{j+k+1}}}{1 - a p^{\bar{i}} q^{\overline{j+k}}} \tag{42a}$$

が成り立つ. ただし

$$\omega_{r,n}(\pi) = \prod_{k=1}^{\pi_{1,1}} \left\{ \prod_{i=1}^{D_k} (1 - q^{\overline{n-k+i}}_{\lambda_{k,i}(\pi)-i}) \right\} \left\{ \prod_{i=D_k+1}^{r} (1 - a p^{\overline{i-\lambda_{k,i}(\pi)-1}} q^{\overline{n-k+\lambda_{k,i}(\pi)}}) \right\} \times \left\{ \prod_{i=1}^{r} (1 - a p^{\overline{i-1}} q^{\overline{n-k}}) \right\}^{-1} \tag{42b}$$

である. ここで $D_k = \mathrm{D}(\lambda_k(\pi))$ であり, また $\lambda_{k,i}(\pi)$ は Young 図形 $\lambda_k(\pi)$ の第 i 行にある箱の個数を表す.

和公式 (42) は $\mathcal{P}(r,c)$ に対する Gansner のトレース母関数 (5) の良い精密化である. 実際 (42b) より $q_1, q_2, q_3, \ldots$ に関する形式的冪級数として $\lim_{n\to\infty} \omega_{n,r}(\pi) \equiv 1$ が成り立つ. 従って $a = q_0$, $p_\ell = q_{-\ell}$ $(\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ と読み替えれば (42a) の左辺の和は $n \to \infty$ の極限において (5) の右辺の和に一致する. 和公式 (42) は前節で求めた良い和公式 (33) の一般化でもある. (42) から (33) を得るには $a \leftarrow aq$, $p_\ell = q_\ell = q$ $(\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ というように変数を特殊化すればよい.

参考文献

[1] M. Aigner and G. M. Ziegler, Proofs from The Book, fifth ed., Springer-Verlag, Berlin, 2014.

[2] T. S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Mathematics and its Applications, vol. 13, Gordon and Breach Science Publishers, New York–London–Paris, 1978.

[3] E. R. Gansner, *The enumeration of plane partitions via the Burge correspondence*, Illinois J. Math. **25** (1981), 533–554.

[4] E. R. Gansner, *The Hillman–Grassl correspondence and the enumeration of reverse plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A **30** (1981), 71–89.

[5] I. Gessel and G. Viennot, *Binomial determinants, paths, and hook length formulae*, Adv. in Math. **58** (1985), 300–321.

[6] M. E. H. Ismail, Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 98, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[7] S. Kamioka, *Plane partitions with bounded size of parts and biorthogonal polynomials*, arXiv:1508.01674 (math.CO).

[8] R. Koekoek, P. A. Lesky and R. F. Swarttouw, Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[9] C. Krattenthaler, *Advanced determinant calculus*, Sém. Lothar. Combin. **42** (1999), Art. B42q.

[10] P. A. MacMahon, Combinatory Analysis, vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1916.

[11] 前田一貴, 三木啓司, 辻本諭, 直交多項式理論からみえてくる可積分系, 日本応用数理学会論文誌 **23** (2013), 341–380.

[12] R. P. Stanley, *Theory and application of plane partitions, I, II*, Studies in Appl. Math. **50** (1971), 167–188, 259–279.

[13] R. P. Stanley, *The conjugate trace and trace of a plane partition*, J. Combinatorial Theory Ser. A **14** (1973), 53–65.

[14] G. Szegő, Orthogonal Polynomials, fourth ed., American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.

[15] G. Viennot, *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*, Université du Québec à Montréal, 1983.

[16] G. Viennot, *A combinatorial theory for general orthogonal polynomials with extensions and applications*, Orthogonal Polynomials and Applications (Bar-le-Duc, 1984), Lecture Notes in Math., vol. 1171, Springer, Berlin, 1985, pp. 139–157.