数理解析研究所講究録
第 1986 巻 2016 年 23-31

組加法性を持つBIBデザイン集合と関連する組合せ配列

中央学院大学・商学部　松原　和樹
Kazuki Matsubara
Faculty of Commerce, Chuo Gakuin University

概要

本稿では，組加法性を持つ釣合い型不完備ブロック計画（以下，BIB デザイン）の集合を扱う．特に，関連しているいくつかの組合せ配列および組合せ構造に着目し，それらとの相互関係を考察する．また，その関係から得られる組加法性の構造を応用して，先行研究における 1 つの構成法から組加法性を持つ BIB デザイン集合の新しい系列を構成する．

キーワード: 組加法性を持つ BIB デザイン集合，生起行列，balanced array, balanced nested BIB design, perpendicular array, ordered design, symmetric difference matrix.

1　導入

本稿で扱う主な組合せ構造である BIB デザインとは次の条件を満たす点集合 $V(|V|=v)$ およびその部分集合族（ブロック集合）$\mathcal{B}(|\mathcal{B}|=b)$ の組 $(V,\mathcal{B})$ で定義される．

- 任意の点はちょうど r 個のブロックに属する．
- 任意のブロックはちょうど k 個の点からなる．
- 任意の 2 点はちょうど λ 個のブロックに同時に属する．

これらを満たす $(V,\mathcal{B})$ を **BIB** デザインと呼び，BIBD (v,b,r,k,λ) または $\mathrm{B}(v,k,\lambda)$ と表す．また，BIB デザインのパラメータ間には

$$vr=bk,\ \lambda(v-1)=r(k-1) \tag{1.1}$$

という関係が知られているため，3 つのパラメータを与えることで残り 2 つのパラメータは決定する．本稿では必要に応じて 5 つまたは 3 つのパラメータで表記する．

また，BIB デザイン $(Z_n,\mathcal{B})$ が次の条件を満たすとき，巡回型と呼ぶ．

- $\{v_1,\cdots,v_k\}\in\mathcal{B}$ ならば $\{v_1+1,\cdots,v_k+1\}\in\mathcal{B}\ (\mathrm{mod}\ v)$ である．

ここで，$\mathcal{B}$ の部分集合 $\{v_1+i,\cdots,v_k+i | i\in Z_v\}$ をサイクルと呼び，各サイクルから適当に 1 つのブロックを選び**初期ブロック**とする．そして，初期ブロックを用いて $\{v_1,\cdots,v_k\}$ mod v と書くことでサイクルに属するブロック全体を表すものとする．

一方，BIB デザインの行列での表現として，次の条件を満たす $v\times b$ 行列 $\boldsymbol{N}=(n_{ij})$ を $(V,\mathcal{B})$ の生起行列と呼ぶ．

- $n_{ij}=\begin{cases}1 & (i\text{ 番目の点が } j \text{ 番目のブロックに属する})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$

ここで本稿における主要な概念である組加法性を定義する．

定義 1.1 (組加法性を持つ BIB デザイン集合) 同じパラメータを持つ ℓ 個の BIB デザインの生起行列 $\boldsymbol{N}_1, \cdots, \boldsymbol{N}_\ell$ が次の条件を満たすとき，**組加法性を持つ BIB デザイン集合**（ℓ pairwise additive BIB designs）と呼び，ℓ PAB(v,k,λ) と表す．

- ℓ 個の中の任意の 2 個の生起行列 $\boldsymbol{N}_i, \boldsymbol{N}_j$ に対して，$\boldsymbol{N}_i + \boldsymbol{N}_j$ もまた BIB デザインの生起行列となっている．

特に，$\ell = v/k$ のとき，加法性を持つ BIB デザイン集合（additive BIB designs）と呼び，AB(v,b,r,k,λ) または AB(v,k,λ) と表す．

例 1.2 [9] 次の 4 つの B$(8,2,1)$ は AB$(8,2,1)$ である．

$$\begin{array}{lcll} \boldsymbol{N}_1 & : & \{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{0,4\}\mathrm{PC}(4) & \mod 8 \\ \boldsymbol{N}_2 & : & \{4,5\},\{1,3\},\{2,5\},\{2,6\}\mathrm{PC}(4) & \mod 8 \\ \boldsymbol{N}_3 & : & \{3,6\},\{6,7\},\{1,7\},\{1,5\}\mathrm{PC}(4) & \mod 8 \\ \boldsymbol{N}_4 & : & \{2,7\},\{4,5\},\{4,6\},\{3,7\}\mathrm{PC}(4) & \mod 8 \end{array}$$

ただし，PC(4) は 4 個のブロックからなるサイクルを表している．

組加法性を持つ BIB デザイン集合の構成法および存在性については，例えば [6, 7, 8, 9, 11] を参照されたい．また，ℓ PAB(v,k,λ) が存在すれば，$2 \le \ell' \le \ell$ に対して，ℓ' PAB(v,k,λ) が存在することは定義から明らかであるため，AB(v,k,λ) の構成は 3 つのパラメータ v,k,λ が与えられたときに構成が最も難しい問題であると言える．

一方，ℓ PAB(v,k,λ) が存在するための必要条件としては，$2\lambda/(k-1)$ が自然数となることが知られているため，

$$\begin{array}{lcl} k \text{ が奇数} & \Rightarrow & \lambda \ge \dfrac{k-1}{2} \\ k \text{ が偶数} & \Rightarrow & \lambda \ge k-1 \end{array}$$

が得られる [11]．等号が成立するとき，ℓ PAB(v,k,λ) を最小と呼ぶ．2 つのパラメータ v,k が与えられたとき，一般的には λ を大きくすると BIB デザインが構成しやすくなるため，最小なものを構成することは ℓ, v, k が与えられたときに比較的難しい問題であると言える．

最小な AB(v,k,λ) の構成法および存在性についてはこれまでにいくつかの結果が得られており，主な結果の 1 つに次の AB(v,k,λ) の再帰的構成法が挙げられる．

定理 1.3 [11] AB$(v = sk, b, r, k, \lambda)$ が存在するとき，

(i) s が奇素数ならば AB$(v^*, b^*, r^*, k^*, \lambda^*)$ が存在する．ただし，

$$v^* = s^2 k,\ k^* = sk,\ \lambda^* = r.$$

(ii) s が素数冪ならば AB$(v^*, b^*, r^*, k^*, \lambda^*)$ が存在する．ただし，

$$v^* = s^2 k,\ k^* = sk,\ \lambda^* = 2r.$$

いずれの場合も残りの2つのパラメータ b^*, r^* は (1,1) により得られることを注意されたい．さらに，$v = sk, \lambda = (k-1)/2$ のとき，(1.1) から

$$r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1} = \frac{sk-1}{2}$$

となり，$\lambda = k-1$ ならば $r = sk-1$ となることから，s が奇素数のとき，最小な $\mathrm{AB}(v,k,\lambda)$ から最小な $\mathrm{AB}(v^*,k^*,\lambda^*)$ が定理 1.3 より再帰的に構成できることがわかる．ただし，s が素数冪のとき一般に最小性を保存する $\mathrm{AB}(v,k,\lambda)$ の再帰的構成法は知られていない．これについては，構成に利用する組合せ配列の存在性が課題となっている．

本稿では，$\ell\,\mathrm{PAB}(v,k,\lambda)$ と関係しているいくつかの組合せ配列および組合せ構造を挙げ，それらとの相互関係を考察する．また，関連する組合せ構造の1つの応用として，対称性のある組加法性に着目して，定理 1.3 と同様の構成法を用いて，これまで得らてれない $\mathrm{AB}(v,k,\lambda)$ の系列を得る．

2　種々の組合せ配列

ここではまず，$\ell\,\mathrm{PAB}(v,k,\lambda)$ の存在性に関連する組合せ配列および組合せ構造として balanced array および balanced nested BIB design を定義する．

定義 2.1 (balanced array) 各成分が $S = \{0,1,\cdots,s-1\}$ の元である $m \times n$ 行列 A が次の条件を満たすとき，**強さ 2 の balanced array** と呼び，$\mathrm{BA}(m,n,s,2)$ で表す．

- 任意の $i,j \in S$ に対して，どの2行においても順序対 $\binom{i}{j}$ が μ_{ij} 列存在する．
- 任意の $i,j \in S$ に対して，$\mu_{ij} = \mu_{ji}$.

定義 2.2 (balanced nested BIB design) 点集合 V，ブロック集合 $\mathcal{B} = \{B_i | 1 \le i \le b\}$ およびサブブロック集合 $\mathcal{B}_j = \{B_i^{(j)} | 1 \le i \le b\} (1 \le j \le \ell)$ が次の条件を満たすとき，$(V, \mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_\ell)$ を balanced nested BIB design と呼び，$\ell\,\mathrm{BNBIBD}(v,k,\lambda)$ と表す．

- $B_i = \cup_{1 \le j \le \ell} B_i^{(j)}, B_i^{(j)} \cap B_i^{(j')} = \phi \ (1 \le i \le b, 1 \le j < j' \le \ell)$
- 各 $(V, \mathcal{B}_j)$ $(1 \le j \le \ell)$ は $\mathrm{B}(v,k,\lambda)$ である．
- $\lambda_{ij}(x,y)$ を $x \in B_t^{(i)}$ かつ $y \in B_t^{(j)}$ なる $t(1 \le t \le b)$ の個数とすると

$$\lambda_{ij}(x,y) + \lambda_{ji}(x,y)$$

が任意の $i,j (1 \le i < j \le \ell)$ に対して，$x,y \in V$ の選び方によらず一定．

また，常に $\lambda_{ij}(x,y) = \lambda_{ji}(x,y)$ が成り立つとき対称型と呼び，$\ell\,\mathrm{SBNBIBD}(v,k,\lambda)$ と表す．

balanced array および balanced nested BIB design の先行研究としては [2, 3] などが挙げられる．ただし，ここでは $\ell\,\mathrm{PAB}(v,k,\lambda)$ との関係を議論するため，各 $(V,\mathcal{B}_j)$ を同じパラメータを持つ BIB デザインとしているが，[2, 3] では各 $(V,\mathcal{B}_j)$ としてより一般的なデザインを扱い，balanced nested design と呼んで議論していることを注意されたい．

このとき，定義から明らかに次の関係が成り立つ．

命題 2.3 次のことは同値である．

- ℓ BNBIBD(v,k,λ) が存在する．
- ℓ PAB(v,k,λ) が存在する．

また，SBNBIBD(v,k,λ) はある種の balanced array と存在性が同値であることは [2] などで言及されている．ここで，ℓ SBNBIBD(v,k,λ) に対応する ℓ PAB(v,k,λ) における組加法性を**対称的**と呼ぶこととする．

組加法性を持つ BIB デザイン集合の構成法および存在性に関するこれまでの研究において，balanced array および balanced nested BIB design との関係は言及されていない．また，それぞれの先行研究においては，共通して得られている構成法がいくつか存在する．例えば，その 1 つとして次節で取り上げる自己直交ラテン方格を用いた構成法が挙げられる．

次に，定理 1.3 の再帰的構成法で用いられる組合せ配列として，perpendicular array, ordered design および symmetric difference matrix を定義する．

定義 2.4 (perpendicular array) 各成分が $S=\{0,1,\cdots,s-1\}$ の元である $k\times\lambda s(s-1)/2$ 行列が次の条件を満たすとき，**perpendicular array** と呼び，PA$_\lambda(k,s)$ と表す．

・どの 2 行においても，任意の異なる $i,j\in S$ の順序対 $\binom{i}{j}$ または $\binom{j}{i}$ が合わせて λ 列存在する．

特に，各行に S の各元が $\lambda(s-1)/2$ 回ずつ現れるとき，**regular** と呼ぶ．

定義 2.5 (ordered design) 各成分が $S=\{0,1,\cdots,s-1\}$ の元である $k\times\lambda s(s-1)$ 行列が次の条件を満たすとき，**ordered design** と呼び，OD$_\lambda(k,s)$ と表す．

・どの 2 行においても，任意の異なる $i,j\in S$ の順序対 $\binom{i}{j}$ が λ 列存在する．

定義 2.6 (differnce matrix) $G(|G|=v)$ をアーベル群とし，各成分が G の元である $k\times\lambda v$ 行列が次の条件を満たすとき，**difference matrix** と呼び，DM(v,k,λ) と表す．

・任意の $i,i'(1\le i<i'\le k)$ に対して，

$$\{a_{ij}-a_{i'j}|1\le j\le\lambda v\}$$

が G の元をちょうど λ 個ずつ含む．

また，次の条件を満たすとき**対称型**と呼び，SDM(v,k,λ) と表す．

・任意の 2 行において，$\binom{i}{j}$ が存在すれば $\binom{j}{i}$ が存在する．

例 2.7 次の行列は SDM$(7,7,1)$ である．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

特に，定理 1.3 の再帰的構成法で用いられる PA$_\lambda(k,s)$ および SDM(v,k,λ) の存在性については次の結果が得られている．

定理 2.8 [1] s が奇素数冪のとき，regular PA$_1(s,s)$ が存在する．

定理 2.9 [11] s が素数冪のとき，DM$(s,s,1)$ が存在する．また，s が奇素数のとき，SDM$(s,s,1)$ が存在する．

定理 4.3 で用いる OD$_1(s,s)$ についても次の結果が知られている．

定理 2.10 [1] s が素数冪のとき，OD$_1(s,s)$ が存在する．

OD$_\lambda(k,s)$ は $\binom{i}{j}$ と $\binom{j}{i}$ の列数が同じであるという対称性を持った regular PA$_{2\lambda}(k,s)$ と考えることができる．さらに，ブロックサイズが 1 の場合も B$(v,1,0)$ として考えることで，PA$_1(k,s)$ が k PAB$(s,1,0)$ や k BNBIBD$(s,1,0)$ と存在性が同値であり，OD$_1(k,s)$ が k SBNBIBD$(s,1,0)$ と存在性が同値となることが，[2, 3, 11] などで扱われている．また，任意の $\lambda \geq 2$ に対して，PA$_\lambda(s,s)$ および OD$_\lambda(s,s)$ は PA$_1(s,s)$ および OD$_1(s,s)$ のコピーで得られることを注意されたい．

3 自己直交ラテン方格からの構成

前節でも述べたように，balanced array や balanced nested design および組加法性を持つ BIB デザイン集合の先行研究には共通した構成法がいくつか存在する．ここでは，その一例である自己直交ラテン方格を用いた構成法について考察する．

定義 3.1 (自己直交ラテン方格) 2ℓ 個の n 次ラテン方格 $L_{ij}(1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq 2)$ が互いに直交していて，$1 \leq i \leq \ell$ に対して $L_{i1} = L_{i2}^T$ となるとき，それらを自己直交ラテン方格（**ℓ self-orthogonal latin squares**）と呼び，ℓ SOLS(n) と表す．

定理 3.2 [2] ℓ SOLS(v) が存在するとき，$\ell+1$ SBNBIBD$(v,2,1)$ が存在する．

同様に，$\ell+1$ PAB$(v,2,1)$ が構成できることが [6, 11] にも言及されている．対称性に注目すると [6, 11] における自己直交ラテン方格を用いた結果より次の存在性を得る．

定理 3.3 $v \geq 7$ かつ $v \neq 10,12,14,18,21,22,24,30,34$ に対して，3 SBNBIBD$(v,2,1)$ が存在する．

定理 3.4 任意の整数 $n \geq 2$ に対して，2^{n-1} SBNBIBD$(2^n, 2, 1)$ が存在する．

対称性の応用の 1 つとして，定理 3.4 で得られるような対称的組加法性を持つ BIB デザイン集合に対しては，定理 1.3 における再帰的構成法がより弱い条件の組合せ配列を用いて適用できることを次節で扱う．

4 再帰的構成法

定理 1.3 における構成法を考察すると，AB(sk, k, λ) から AB(s^2k, sk, r) を得る再帰的構成法に用いる組合せ配列として

- SDM$(s, s, 1)$
- regular PA$_{2\lambda/(k-1)}(s, s)$

が挙げられる．s が奇素数のとき，定理 2.8 および定理 2.9 でこれらの組合せ配列が得られるため，定理 1.3 は証明される．ところが，s が奇素数でないときには一般的に SDM$(s, s, 1)$ の存在が証明されていないため構成できない．具体的な構成法の詳細については [11] を参照されたい．また，偶数 s に対しては SDM$(s, s, 1)$ が存在しないことは容易に示され，これらを踏まえると，定理 1.3 の改良としては例えば

・奇素数冪 $s = p^n (n \geq 2)$ に対して，SDM$(p^n, p^n, 1)$ を構成する．
・SDM$(s, s, 1)$ の代わりとなる配列を構成する．

ということが考えられる．SDM$(p^n, p^n, 1)$ の存在性についてはまだわかっていない．また，SDM$(s, s, 1)$ は元となる AB(v, k, λ) の生起行列 $\boldsymbol{N}_1, \cdots, \boldsymbol{N}_s$ を $s \times s$ の正方形上に並置する際の添え字の配列として用いられる．このとき，AB(v^*, k^*, λ^*) の構成に必要な条件を満たす他の配列が構成できれば定理は改良される．これについてもよい配列はまだ見つかっていない．

ここで，対称型でない DM$(s, s, 1)$ を用いたときも構成法が適用できる $\boldsymbol{N}_1, \cdots, \boldsymbol{N}_s$ について考える．まず，定理 1.3 の再帰的構成法において SDM$(s, s, 1)$ の対称性がどのように用いられるかについて確認する．元となる AB(sk, k, λ) を構成する s 個の生起行列の任意の 2 個の生起行列 $\boldsymbol{N}_i, \boldsymbol{N}_j$ について $\boldsymbol{N}_i + \boldsymbol{N}_j$ が B$(v, 2k, \lambda')$ であるとき，2 つの生起行列を縦に並置した $2v \times b$ 行列

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_i \\ \boldsymbol{N}_j \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

を考え，第 t 行ベクトル $\boldsymbol{x}_t$ および第 t' 行ベクトル $\boldsymbol{x}_{t'}$ の内積を

$$\boldsymbol{x}_t \cdot \boldsymbol{x}_{t'} = \begin{cases} \lambda_1 & (t' = t + v) \\ \lambda_2 & (1 \leq t < t' \leq v \text{ または } v + 1 \leq t < t' \leq 2v) \\ \lambda_3 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{4.2}$$

とおくと，$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda$ となるのに対し，λ_3 が一定とは限らない．一方，$2v \times 2b$ 行列

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_i & \boldsymbol{N}_j \\ \boldsymbol{N}_j & \boldsymbol{N}_i \end{bmatrix}$$

においては，(4.2) で $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2\lambda, \lambda_3 = \lambda' - 2\lambda$ とすべて定まるため，用いる DM が対称型でなければならないという必要性が出る．

つまり，(4.1) において (4.2) の λ_3 が一定となる $\boldsymbol{N}_i, \boldsymbol{N}_j$ であれば DM が対称型である必要性はなくなり，用いる配列としてはより弱い条件の下で再帰的構成法を考えることができる．そこで，SBNBIBD に注目すると次の結果を得る．

命題 4.1 ℓ SBNBIBD における各 $(V, \mathcal{B}_i)(1 \leq i \leq \ell)$ の生起行列を $\boldsymbol{N}_i$ とすると，任意の $\boldsymbol{N}_i, \boldsymbol{N}_j (1 \leq i < j \leq \ell)$ に対して，(4.1) の $2v \times b$ 行列における (4.2) の内積 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は次のように一定である．

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda,\ \lambda_3 = \frac{\lambda' - 2\lambda}{2}$$

同様の議論により，[11] では定理 3.4，$\mathrm{DM}(2^n, 2^n, 1)$ および $\mathrm{PA}_{2\lambda/(k-1)}(2^n, 2^n)$ を用いて以下の結果が得られている．

定理 4.2 ([11]) 任意の整数 $n \geq 2$ に対して，$\mathrm{AB}(2^{2n-1}, 2^n, 2^n - 1)$ および $\mathrm{AB}(2^{2n}, 2^n, 2^n - 1)$ が存在する．

ここで，s SBNBIBD(sk, k, λ) に対して，定理 1.3 において，$\mathrm{SDM}(s, s, 1)$ および regular $\mathrm{PA}_{2\lambda/(k-1)}(s, s)$ の代わりに，定理 2.9 で得られる $\mathrm{DM}(s, s, 1)$ および定理 2.10 で得られる $\mathrm{OD}_{\lambda/(k-1)}(s, s)$ を用いることで，同じ構成法から次の結果を得る．

定理 4.3 s SBNBIBD$(v = sk, b, r, k, \lambda)$ が存在するとき，s が素数冪で $\lambda/(k-1) \geq 1$ ならば s SBNBIBD$(v^*, b^*, r^*, k^*, \lambda^*)$ が存在する．ただし，

$$v^* = s^2k,\ k^* = sk,\ \lambda^* = r.$$

この構成法では regular $\mathrm{PA}_{2\lambda/(k-1)}(s, s)$ ではなく，$\mathrm{OD}_{\lambda/(k-1)}(s, s)$ を用いていることから，対称型のものが得られることを注意しておく．よって，定理 4.2 の結果を含む次の新しい $\mathrm{AB}(v, k, \lambda)$ の系列を得る．

定理 4.4 任意の整数 $m \geq 1, n \geq 2$ に対して，$\mathrm{AB}(2^{n+m(n-1)}, 2^{m(n-1)+1}, 2^{m(n-1)+1} - 1)$ および $\mathrm{AB}(2^{(m+1)n}, 2^{mn}, , 2^{mn} - 1)$ が存在する．

定理 4.4 で得られた $\mathrm{AB}(v, k, \lambda)$ はすべて最小で対称的組加法性をもつことに注意されたい．

5 まとめ

本稿では，組加法性を持つ BIB デザイン集合といくつかの組合せ配列および組合せ構造との関係を通して，組加法性の構造について，特に対称性に注目して考察した．さらに対称性の応用の 1 つとして，最小な $\mathrm{AB}(v, k, \lambda)$ の新たな系列を得た．これは一例であり，balanced array や balanced nested design など種々の組合せ配列との相互関係を考察し，互いの構造を応用することで，さらに新たな結果が得られると考える．また，今後の課題としては次の 2 点が挙げられる．

まず，1点目は組加法性の構造を分類することである．本稿では対称性に注目したが，これまで [6, 7, 8, 9, 11] で得られている組加法性を持つ BIB デザイン集合においては，構成法の違いなどにより様々な構造を持つ組加法性が現れている．例えば，次の 3 つの 2 PAB$(13, 2, 1)$ において，組加法性は異なる構造を持っている．

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{N}_1 & : & \{1,3\},\{2,6\},\{4,12\},\{8,11\},\{3,9\},\{6,5\} \quad \text{mod } 13 \\ \boldsymbol{N}_2 & : & \{5,12\},\{10,11\},\{7,9\},\{1,5\},\{2,10\},\{4,7\} \quad \text{mod } 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{N}_1 & : & \{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{0,4\},\{0,5\},\{0,6\} \quad \text{mod } 13 \\ \boldsymbol{N}_2 & : & \{9,11\},\{1,6\},\{6,12\},\{7,8\},\{2,11\},\{1,11\} \quad \text{mod } 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{N}_1 & : & \{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{0,4\},\{0,5\},\{0,6\} \quad \text{mod } 13 \\ \boldsymbol{N}_2 & : & \{7,10\},\{4,6\},\{5,12\},\{1,5\},\{2,10\},\{7,8\} \quad \text{mod } 13 \end{array}$$

1つ目は対称的で残りの 2 つは対称的ではない．また，対称的でない 2 つについても，ある意味でそれぞれ異なるアソシエーションスキームと関連した構造になっている．さらには，例 1.2 における $\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2$ のように，$\boldsymbol{N}_i + \boldsymbol{N}_j$ が t-デザイン $(t \geq 3)$ となっている例も存在する.（アソシエーションスキームや t-デザインの概念については [5, 10] などを参照されたい.）これらの構造を分類し，その性質を明らかにしていくことで，組加法性を持つ BIB デザイン集合の新しい構成法や，他の組合せ構造への応用が得られると考える．

2点目は組加法性の他分野への応用である．今回挙げている balanced array などの組合せ配列の多くは，他分野への応用に関する結果が先行研究において得られている．一方，組加法性においては，様々なデザインの構成法への応用はいくつか結果が得られているが，他分野への応用面はあまり議論されていない．他の組合せ配列などとの関係をさらに考察し，それらの他分野への応用を参考に，組加法性の応用を考察していくことが今後の課題である．

References

[1] J. Bierbrauer, Ordered designs, perpendicular arrays, and permutation sets , In: C. J. Colbourn and J. H. Dinitz (eds.), *The CRC Handbook of Combinatorial Designs* (*2nd ed.*), CRC Press, Boca Raton FL, 543-547, 2007.

[2] R. Fuji-Hara, S. Kageyama, S. Kuriki, Y. Miao and S. Shinohara, Balanced nested designs and balanced array, *Discrete Math.* **259**, 91-119, 2002.

[3] R. Fuji-Hara, S. Kuriki, Y. Miao and S. Shinohara, Balanced nested designs and balanced n-ary designs, *J. Statist. Plann. Inference* **106**, 57-67, 2002.

[4] G. Ge, On $(g, 4; 1)$-difference matrices, *Discrete Math.* **301**, 164-174, 2005.

[5] G. B. Khosrovshahi and R. Laue, t-designs with $t \geq 3$, In: C. J. Colbourn and J. H. Dinitz (eds.), *The CRC Handbook of Combinatorial Designs* (*2nd ed.*), CRC Press, Boca Raton FL, 79-101, 2007.

[6] K. Matsubara and S. Kageyama, The existence of 3 pairwise additive $\mathrm{B}(v, 2, 1)$ for any $v \geq 6$, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, to appear.

[7] K. Matsubara and S. Kageyama, The existence of 2 pairwise additive BIB designs for any v, *Journal of Statistical Theory and Practice* **7**, 783-790, 2013.

[8] K. Matsubara and S. Kageyama, Some pairwise additive cyclic BIB designs, *Stat. Appl.* **11**, 55-77, 2013.

[9] K. Matsubara, M. Sawa, D. Matsumoto, H. Kiyama and S. Kageyama, An addition structure on incidence matrices of a BIB design, *Ars Combin.* **78**, 113-122, 2006.

[10] D. Raghavarao, *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments*, Dover, New York, 1988.

[11] M. Sawa, K. Matsubara, D. Matsumoto, H. Kiyama and S. Kageyama, The spectrum of additive BIB designs, *J. Combin. Des.* **15**, 235-254, 2007.