数理解析研究所講究録
第 1986 巻 2016 年 11-22



# Set-$(g, f)$-factors in graphs

国立情報学研究所 / JST, ERATO, 河原林巨大グラフプロジェクト
小関 健太 *†

## 1 はじめに

本研究は千葉 周也氏 (熊本大学), 古谷 倫貴氏 (東京理科大学), 太田 克弘教授 (慶應義塾大学) との共同研究 [8] に基づくものである.

次数制約のある全域部分グラフは完全マッチングとの関連もあって重要な研究対象であり, 実際に多くの研究がなされている. 特に, われわれは, 完全マッチングの拡張として知られている $(g, f)$-factor のさらなる拡張として, グラフの **set-$(g, f)$-factor** を [8] において定義している. 本論文では, この set-$(g, f)$-factor を用いることで, 様々な条件の全域部分グラフを考察することが可能であることを示す. 例えば, 有向グラフの $(g, f)$-factor や辺着色されたグラフの $(g, f)$-factor などが, set-$(g, f)$-factor の特別な場合として扱うことができるものである.

## 2 完全マッチングと $(g, f)$-factor

与えられた無向グラフ $G$ に対し, $G$ の辺集合 $M$ で, 各頂点がちょうど一つの辺に接続しているものを $G$ の完全マッチングと呼ぶ (図 1 参照). 完全マッチングは, その多岐にわたる応用と数学的に美しい構造のため, 多くの研究がなされている. 特に, Tutte による必要十分条件 [27] は, グラフ理論のみならず離散数学における一つの基本的な定理となっている.

グラフ $G$ の完全マッチング $M$ を $G$ の部分グラフとみなすと, $M$ は「各頂点の次数がちょうど 1 である $G$ の全域部分グラフ」と捉えることができる. この意味で, 完全マッチングは **1-factor** とも呼ばれており, この拡張として, 2-factor や自然数 $k$ に対しての $k$-factor なども考えられている. 本講演では, これらのさらなる拡張である **$(g, f)$-factor** に注目する.

グラフ $G$ の頂点集合 $V(G)$ から正の整数の集合 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への関数 $g$ と $f$ に対し, $G$ の全域部分グラフ $F$ が, 各頂点 $x$ で

$$g(x) \leq \deg_F(x) \leq f(x)$$

を満たすとき*1, $F$ を $G$ の **$(g, f)$-factor** と呼ぶ (図 2 参照*2). 全ての頂点 $x$ で $g(x) = f(x) = 1$ を満たす関数 $g$ と $f$ に対しての $(g, f)$-factor はグラフ $G$ の完全マッチングと等価であり, この意味で $(g, f)$-factor は完全マッチングの拡張となっている. 完全マッチングに対しては, その存在のための必要十分条件が Tutte により示されているが, これと同様に, $(g, f)$-factor が存在するのた

* E-mail: ozeki@nii.ac.jp
† 本研究の一部は, JSPS 科研費 25871053 の助成と 2014 年度住友財団基礎科学研究助成を受けたものである.
*1 ここで, $\deg_F(x)$ は頂点 $x$ の $F$ での次数を表す.
*2 本稿の図では, $[\cdot, \cdot]$ で $g$ と $f$ の値を表す. すなわち, 区間の左側が $g$ の値で, 右側が $f$ の値である.

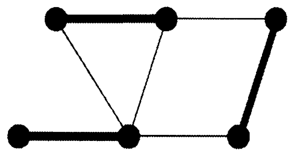

図 1　完全マッチング.

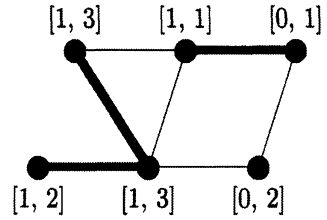


図 2　$(g, f)$-factor.

めの必要十分条件が Lovász [22] により示されている. factor に関しては多くの論文が執筆されており, サーベイ [25] や教科書 [3] も参照せよ.

## 3　set-$(g, f)$-factor 問題とそのバリエーション

本研究では, 上記の $(g, f)$-factor を集合関数 $g, f$ を用いた以下の set-$(g, f)$-factor へと拡張する.

$G$ を無向グラフ, $\mathcal{F}$ を $G$ の頂点部分集合の族とする. また, $g$ と $f$ を $\mathcal{F}$ から $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への関数とする. このような **集合関数** $g$ と $f$ に対し, $G$ の全域部分グラフ $F$ が, $\mathcal{F}$ の各要素 $X$ で

$$g(X) \leq \sum_{x \in X} \deg_F(x) \leq f(X)$$

を満たすとき, $F$ を $G$ の **set-$(g, f)$-factor** と呼ぶ (図 3 参照*3). 著者ら [8] は set-$(g, f)$-factor に関して, 以下の結果を示している. 部分集合の族 $\mathcal{F}$ に対し, $X, Y \in \mathcal{F}$ で $X \cap Y \neq \emptyset$ ならば, $X \subseteq Y$ または $Y \subseteq X$ が成り立つとき, $\mathcal{F}$ は **laminar 性を持つ**, という*4.

**定理 1**　与えられたグラフ $G$ と頂点部分集合の族 $\mathcal{F}$, および $\mathcal{F}$ から $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への集合関数 $g$ と $f$ に対し, $G$ が set-$(g, f)$-factor を持つかどうか判定する問題は, 任意の $X \in \mathcal{F}$ で $|X| \leq 2$ であったとしても, NP-完全である.

**定理 2**　$G$ をグラフ, $\mathcal{F}$ を laminar 性を持つ頂点部分集合の族, および $g$ と $f$ を $\mathcal{F}$ から $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への集合関数とする. このとき, ある auxiliary グラフ $H = H(G, \mathcal{F}, g, f)$ が存在して, $G$ が set-$(g, f)$-factor を持つことと $H$ が完全マッチングを持つことが必要十分となる. 特に, $|H|$ のサイズは $|G|$ の多項式で抑えられるため, set-$(g, f)$-factor の存在性は多項式時間での判定が可能である*5.

ここで, set-$(g, f)$-factor $F$ にさらに条件を課した次のものを考える.

- **(パリティ条件)**　$\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ に対し, 次を満たす set-$(g, f)$-factor $F$ を $\mathcal{F}'$ **に対するパリティ set-$(g, f)$-factor** とよぶ.

$$\text{任意の } X' \in \mathcal{F}' \text{ で } \sum_{x \in X'} \deg_F(x) \equiv g(X') \pmod 2 \text{ である.} \tag{1}$$

- **(重さ条件)**　与えられた辺の重さ $w : E(G) \to \mathbb{R}$ に対し, 辺の重さの合計が最大の set-$(g, f)$-factor $F$ を, 単に **重さ最大の set-$(g, f)$-factor** とよぶ.

*3 薄く塗った楕円が要素数 2 以上の集合を, 四角で囲った [ · , · ] がその集合の $g$ と $f$ の値を表している.
*4 laminar 性を持つ集合族は様々な応用を持つことが知られている. [14] などを参照せよ.
*5 最大マッチングを見つける問題は多項式時間のアルゴリズムが知られている ([9]).

ここで，定理 2 では set-$(g,f)$-factor 問題をあるグラフ $H$ の完全マッチング問題に帰着していることに注目する．パリティ set-$(g,f)$-factor と重さ最大の set-$(g,f)$-factor を見つける問題は，この帰着において，完全マッチング問題の亜種や拡張となるが[*6]，それらも多項式時間で解くことができることが知られているため，同様のことが以下のように成り立つ．

**定理 3** $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ を $\mathcal{F}$ の極大限の集合とする．このとき，$\mathcal{F}'$ に対するパリティ set-$(g,f)$-factor の存在性は多項式時間で判定できる[*7]．

**定理 4** $w: E(G) \to \mathbb{R}$ を辺の重みとする．このとき，重さ最大の set-$(g,f)$-factor を多項式時間で見つけるアルゴリズムが存在する．

**定理 5** $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ を $\mathcal{F}$ の極大限の集合，$w: E(G) \to \mathbb{R}$ を辺の重みとする．このとき，重さ最大の $\mathcal{F}'$ に対するパリティ set-$(g,f)$-factor を多項式時間で見つけるアルゴリズムが存在する．

次章以降では，これらの定理の応用を紹介する．

# 4 有向グラフにおける $(g,f)$-factor

第 2 章で述べたように，無向グラフにおける $(g,f)$-factor はその必要十分条件をはじめとし，様々な研究がなされている．しかしながら，その自然な拡張として定義できる有向グラフにおける $(g,f)$-factor は最近までほとんど研究がなされてこなかった．この状況を鑑みて，有向グラフ版の $(g,f)$-**factor** を考察することが本章の目的である．

有向グラフ $D$ と，その頂点集合 $V(D)$ から $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への 6 つの関数 $g^-, g^+, g^\pm, f^-, f^+, f^\pm$ に対し，$D$ の全域部分有向グラフ $F$ で，各頂点 $x$ が

$$\begin{array}{rrcccl} & g^-(x) & \leq & \deg_F^-(x) & \leq & f^-(x), \\ & g^+(x) & \leq & \deg_F^+(x) & \leq & f^+(x), \\ \text{かつ} & g^\pm(x) & \leq & \deg_F^-(x) + \deg_F^+(x) & \leq & f^\pm(x) \end{array}$$

を満たすとき[*8]，$F$ を有向グラフ $D$ の $(g,f)$-**factor** と呼ぶ[*9]．

無向グラフに対しては $(g,f)$-factor が存在するための Lovász の必要十分条件が得られたことから，有向グラフにおける $(g,f)$-factor も同様の必要十分条件が成り立つと期待される．これに関して，以下の性質を満たす関数に対しては実際に必要十分条件が成り立つことが知られていた．

- $g^- \equiv 0$, $g^+ \equiv 0$ かつ $g^\pm \equiv 1$ (Brewster, Hell & Rizzi [6]).
- $g^- \equiv 0$, $g^+ \equiv 0$, $g^\pm < f^-$ かつ $g^\pm < f^+$ (Brewster, McGuinness & Nielsen [7]).

上記した特別な場合を除き，有向グラフにおける $(g,f)$-factor 定理は示されていなかった．本章では，この有向グラフにおける $(g,f)$-factor の問題は，set-$(g,f)$-factor の特殊ケースへと帰着できることを示す．実際に，著者ら [8] はその特殊ケースでの set-$(g,f)$-factor の存在のための Lovász

[*6] 例えば，重み最大の set-$(g,f)$-factor を見つける問題は，直ちに重み最大の完全マッチングを見つける問題へと帰着できる．パリティ版も，完全マッチングのある種の問題へと帰着される．

[*7] なお，"$\mathcal{F}'$ が $\mathcal{F}$ の極大限の集合である" という仮定は証明の都合上のもので，これが真に必要かどうかは不明である．

[*8] $\deg_F^-(v)$ は頂点 $v$ の $F$ での**入次数**である．同様に $\deg_F^+(v)$ は**出次数**であり，$\deg_F^-(v) + \deg_F^+(v)$ は "$F$ で向きを取り除いた無向グラフ" での次数に対応している．

[*9] 本来ならば $(g^-, g^+, g^\pm, f^-, f^+, f^\pm)$-factor と呼ぶべきであるが，簡単のため単に $(g,f)$-factor とする．

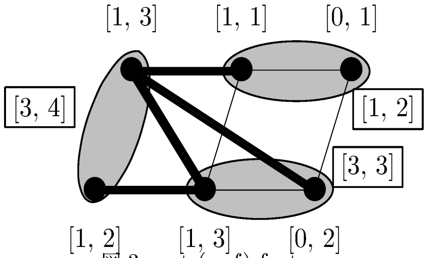


図 3　set-$(g,f)$-factor.

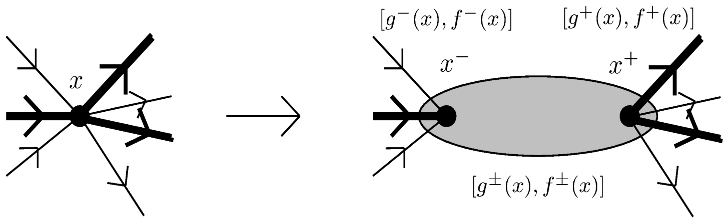


図 4　有向グラフの $(g,f)$-factor 問題の帰着.

型の必要十分条件を示しており，これにより，有向グラフ版の完全な $(g,f)$-factor 定理が得られている．

有向グラフ $D$ と，その頂点集合 $V(D)$ から $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への 6 つの関数 $g^-, g^+, g^\pm, f^-, f^+, f^\pm$ に対し，$D$ の $(g,f)$-factor を考える．ここで無向グラフ $G_D$ を次のように構成する．$V(D)$ の各頂点 $x$ を 2 頂点 $x^-$ と $x^+$ へと分割し，それらの集合を $G_D$ の頂点集合とする．また，$D$ の各有向辺 $(x,y)$ を，$G_D$ では $x^+$ と $y^-$ を結ぶ辺へと置き換える．したがって，$G_D$ は以下のように定義される．

$$V(G_D) = \{x^-, x^+ : x \in V(D)\},$$

$$\text{かつ} \qquad E(G_D) = \Big\{\{x^+, y^-\} : (x,y) \in A(D)\Big\}.$$

また，$G_D$ の頂点集合の族 $\mathfrak{F}_D$ と，$\mathfrak{F}_D$ から $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への関数 $g$ と $f$ を次のように定義する．

$$\mathfrak{F}_D = \Big\{\{x^-\}, \{x^+\}, \{x^-, x^+\} : x \in V(D)\Big\},$$

$$g(X) = \begin{cases} g^-(x) & D \text{ のある頂点 } x \text{ に対し } X = \{x^-\} \text{ のとき}, \\ g^+(x) & D \text{ のある頂点 } x \text{ に対し } X = \{x^+\} \text{ のとき}, \\ g^\pm(x) & D \text{ のある頂点 } x \text{ に対し } X = \{x^-, x^+\} \text{ のとき}, \end{cases}$$

$$\text{かつ} \qquad f(X) = \begin{cases} f^-(x) & D \text{ のある頂点 } x \text{ に対し } X = \{x^-\} \text{ のとき}, \\ f^+(x) & D \text{ のある頂点 } x \text{ に対し } X = \{x^+\} \text{ のとき}, \\ f^\pm(x) & D \text{ のある頂点 } x \text{ に対し } X = \{x^-, x^+\} \text{ のとき}. \end{cases}$$

(図 4 参照)．この定義の下で，$D$ の任意の $(g,f)$-factor $F$ に対し，$F$ に対応する $G_D$ の全域部分グラフ $F_D$ は $G_D$ の set-$(g,f)$-factor となり，また，その逆に $G_D$ の任意の set-$(g,f)$-factor $F_D$ に対し，$D$ において対応する辺からなる全域部分グラフを選ぶことで，$D$ の $(g,f)$-factor $F$ が得られる．したがって，有向グラフ $D$ における $(g,f)$-factor 問題は，$D$ から作られる無向グラフ $G_D$ における set-$(g,f)$-factor 問題へと帰着される．特に，頂点集合族 $\mathfrak{F}_D$ は laminar 性を持っている．したがって，有向グラフでの $(g,f)$-factor 問題は set-$(g,f)$-factor 問題の特殊ケースであり，特に，定理 2–5 が適用できることがわかる．これより，set-$(g,f)$-factor は以下のさらなる応用を持つ．

## 4.1　中心に次数制約のある有向スター因子

はじめの応用は，表題の中心に次数制約のある有向 star-factor である．(無向，有向に関わらず) グラフ $G$ に対し，各連結成分が star である全域部分グラフを **star-factor** とよぶ．なお，**star** とは，1 辺以上持ち，高々 1 頂点のみが葉でない木のことである．さらに，その連結成分の最大次数を持つ頂点を，その star の中心という．

有向グラフ $D$ と，その頂点集合 $V(D)$ から $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への 3 つの関数 $f^-, f^+, f^\pm$ に対し，$D$ の全域部分グラフ $S$ で，各頂点 $x$ が

$$\deg_S^-(x) \leq f^-(x), \quad \deg_S^+(x) \leq f^+(x), \quad \text{かつ} \quad \deg_S^-(x) + \deg_S^+(x) \leq f^\pm(x) \qquad (2)$$

であるものを $D$ の **有向 $f$-star-factor** とよぶ．

ここで，$V(D)$ から $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への関数 $g^-, g^+, g^\pm$ として $g^- \equiv 0$, $g^+ \equiv 0$, かつ $g^\pm \equiv 1$ を考えると，$D$ の有向 $f$-star-factor が自然に $(g,f)$-factor となることがわかる．また，逆に $D$ の $(g,f)$-factor $F$ は条件 (2) を満たしているとする．ここで，$F$ の連結成分 $C$ で star でないものがあるとすると，$C$ のある辺 $e$ で $C-e$ の各連結成分が 2 頂点以上からなり，$F-e$ は $F$ よりも辺の少ない $(g,f)$-factor となる．したがって，この操作を繰り返すことで，各連結成分が star であるような $D$ の $(g,f)$-factor が得られるが，これが $D$ の有向 $f$-star-factor となっている．

よって，有向 $f$-star-factor は有向グラフにおける $(g,f)$-factor の特殊ケースとして見ることができる．実際に，Brewster, Hell, Rizzi [6] は (F1) を用いて，$f$-star-factor が存在するための必要十分条件を与えている．

### 4.2 内素な有向 $s,t$-道

2 頂点 $s$ と $t$ を結ぶ道を $s,t$-道 という．有名な **Menger** の定理は，互いに内素[*10]な $k$ 本の $s,t$-道が存在するための必要十分条件を与えている．ここでは，その有向グラフ版，すなわち，互いに内素な $k$ 本の有向 $s,t$-道が存在するための必要十分条件を考える．実際に，有向グラフ $D$ における互いに内素な $k$ 本の有向 $s,t$-道は，次のような関数に対しての有向 $(g,f)$-factor として記述できる；$s,t$ 以外の任意の頂点 $x$ に対しては $g^-(x) = g^+(x) = g^\pm(x) = 0$，$f^-(x) = f^+(x) = 1$ かつ $f^\pm(x) = 2$ とし，さらに，$g^-(s) = f^-(s) = 0$, $g^+(s) = g^\pm(s) = f^+(s) = f^\pm(s) = k$ かつ $g^+(t) = f^+(t) = 0$, $g^-(t) = g^\pm(t) = f^-(t) = f^\pm(t) = k$ とする．加えて，

$$s,t \text{ 以外の任意の頂点 } x \text{ に対して } \deg_F^-(x) + \deg_F^+(x) \equiv 0 \pmod 2 \qquad (3)$$

とする．これにより，互いに内素な $k$ 本の有向 $s,t$-道の和集合は，条件 (3) を満たす $D$ の $(g,f)$-factor $F$ と一致し，さらに $D$ から作られる無向グラフ $G_D$ の頂点集合族

$$\mathcal{F}' = \Big\{\{x^-, x^+\} : x \in V(D) - \{s,t\}\Big\}$$

に対してのパリティ set-$(g,f)$-factor とも 1 対 1 対応するすることになる．特に，定理 3 より，互いに内素な $k$ 本の有向 $s,t$-道の存在性は多項式時間で判定できることがわかる．これは，有向グラフ版の **Menger** の定理に対応する．

### 4.3 点素な有向 $A$-道

グラフの頂点集合 $A$ に対し，$A$ の 2 頂点を結び他の $A$ の頂点を内点として含まない道を $A$-道 とよぶ．良く知られているように Mader [24] は無向グラフにおける互いに点素な $A$-道の最大数に対しての min-max 型の定理を与えている．ここでは，この問題の有向グラフ版を考える．

---

[*10] 端点以外で頂点を共有しない道を内素であるという．

実際に，この有向グラフ版の問題は，以下のように $(g,f)$-factor の (すなわち，set-$(g,f)$-factor の) 特殊なケースとして考えられる．有向グラフ $D$ に対し，その頂点集合 $V(D)$ から $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への 6 つの関数 $g^-, g^+, g^\pm, f^-, f^+, f^\pm$ を $A$ に属さない任意の頂点 $x$ で，$g^-(x) = g^+(x) = g^\pm(x) = 0$, $f^-(x) = f^+(x) = 1$, $f^\pm(x) = 2$ かつ $g^-(x) = g^+(x) = g^\pm(x) = 0$ とし，任意の $x \in A$ で $f^-(x) = f^+(x) = f^\pm(x) = 1$ とする．加えて，

$$A \text{ に属さない任意の頂点 } x \text{ に対して } \deg_F^-(x) + \deg_F^+(x) \equiv 0 \pmod 2 \tag{4}$$

とする．これにより，互いに点素な有向 $A$-道の和集合は，条件 (4) を満たす $D$ の $(g,f)$-factor $F$ となり，さらに $D$ から作られる無向グラフ $G_D$ の頂点集合族

$$\mathcal{F}' = \Big\{\{x^-, x^+\} : x \in V(D) - A\Big\}$$

に対してのパリティ set-$(g,f)$-factor とも対応することになる．さらには，辺の重み $w : E(G) \to \mathbb{R}$ を

$$w(e) = \begin{cases} 1 & e \text{ の端点が両方とも } A \text{ の頂点である,} \\ 1/2 & e \text{ の片側の端点のみが } A \text{ の頂点である,} \\ 0 & e \text{ は } A \text{ の頂点に接続しない} \end{cases}$$

と定義し，定理 5 を用いて重さ最大のパリティ set-$(g,f)$-factor を調べることで，互いに点素な有向 $A$-道の最大数も得られる*11．特に下の結果が，系として得られている．

**定理 6 (Kriesell [16])** 有向グラフにおいて，互いに点素な有向 $A$-道の最大数は多項式時間で計算できる．

なお，実際には Kriesell [16] はもっと強いことを示しており，Mader [24] の定理の有向グラフ版と言える min-max 型の定理を与えている．

## 5 辺着色されたグラフにおける $(g,f)$-factor

近年は，辺着色されたグラフにおける，様々な条件の部分グラフを探す研究が盛んに行われている．なお，ここでは，各辺に色が与えられているグラフを**辺着色されたグラフ**と呼んでおり，この着色は proper でなくとも良い．(すなわち，同じ色の 2 辺が互いに隣接しているかもしれない．)

辺着色されたグラフ $H$ に対し，$1, 2, \ldots, k$ を $H$ で用いられている色とする．ここで，前章と同様の方法で，$H$ から以下のように (辺着色されていない) グラフ $G_H$ を構成する：各頂点 $x$ を $k$ 頂点 $x^1, \ldots, x^k$ に分割し，頂点 $x$ に接続するような色 $i$ の辺は新しい頂点 $x^i$ に接続するようにする．すなわち，

$$\begin{aligned} & V(G_H) = \{x^i : x \in V(H) \text{ かつ } 1 \leq i \leq k\}, \\ \text{かつ} \quad & E(G_H) = \Big\{\{x^i, y^i\} : H \text{ は頂点 } x \text{ と } y \text{ を結ぶ色 } i \text{ の辺を持つ}\Big\}. \end{aligned}$$

ここで，辺着色されたグラフ $H$ の全域部分グラフ $F$ で，各頂点の各色での次数に制約のあるものを考える．すなわち，与えられた $V(H)$ から $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への $(2k+2)$ 個の関数 $g^1, \ldots g^k, f^1, \ldots, f^k$,

*11 ここでは，パリティ set-$(g,f)$-factor の重みが互いに点素な有向 $A$-道の本数に対応する．

$g^\pm, f^\pm$ に対し，$H$ の各頂点 $x$ で，

$$\begin{array}{rccccc} & g^i(x) & \leq & \deg_F^i(x) & \leq & f^i(x), \\ \text{かつ} & g^\pm(x) & \leq & \deg_F(x) & \leq & f^\pm(x) \end{array} \tag{5}$$

となる全域部分グラフ $F$ を考える*12．この全域部分グラフが set-$(g,f)$-factor へと帰着されるのである．そのために，

$$\mathcal{F}_H = \big\{\{x^i\} : x \in V(H),\ 1 \leq i \leq k\big\} \cup \big\{\{x^1, \ldots, x^k\} : x \in V(H)\big\}$$

とし，$H$ の任意の頂点 $x$ と任意の色 $i$ で，

$$\begin{array}{ll} g_H\big(\{x^i\}\big) = g^i(x), & g_H\big(\{x^1, \ldots, x^k\}\big) = g^\pm(x), \\ f_H\big(\{x^i\}\big) = f^i(x), & \text{かつ} \quad f_H\big(\{x^1, \ldots, x^k\}\big) = f^\pm(x) \end{array}$$

と定義する．このとき，$G_H$ の set-$(g_H, f_H)$-factor が条件 (5) を満たす全域部分グラフ $F$ に対応することがわかる．さらには，頂点集合族 $\mathcal{F}_H$ は laminar 性を持ち，したがって，定理 2 よりそのような全域部分グラフ $F$ の存在性の判定問題は多項式時間で解けることがわかる．

ここでは，さらなる応用として，proper に彩色された閉路 (道) を考える．隣り合うどの 2 辺も異なる色を持つ閉路 (道) を，**proper に彩色された** 閉路 (道) とよぶ*13．以下では，辺着色されたグラフにおける proper に彩色された閉路 (道) に注目し，その存在性に関する結果をいくつか示す．この内容に関しては，サーベイ [4] も参照せよ．

なお，いくつかの論文で指摘されているように (例えば [4])，有向閉路 (道) と proper に彩色された閉路 (道) とは互いに関連しており，実際に，本章のいくつかの結果は，前章の有向閉路 (道) の結果と同様の方法で得ることができる．しかしながら，この 2 つが異なる状況であるような例も存在する．

実際に，proper に彩色された閉路 (道) は直接に条件 (5) と関連しており，$H$ の任意の頂点 $x$ と任意の色 $i$ において $f^i(x) = 1$ かつ $f^\pm(x) = 2$ とおくと，条件 (5) を満たす $H$ の全域部分グラフ $F$ の各連結成分は proper に彩色された閉路 (道) となる．これに加えて，$g^i$ と $g^\pm$ を適当な値とすることで，様々な問題が辺着色されたグラフの $(g,f)$-factor，また，set-$(g,f)$-factor として扱えるようになる．以下の項でそれらを調べる．

## 5.1 proper に彩色された 2-factor

本章では，$H$ の各頂点 $x$ と各色 $i$ で $g^i(x) = 0$, $f^i(x) = 1$ かつ $g^\pm(x) = f^\pm(x) = 2$ であるとする．ことのき，条件 (5) を満たす $H$ の全域部分グラフは，各連結成分が proper に彩色された閉路となる 2-factor であることが直ちにわかる．この 2-factor を **proper に彩色された 2-factor** とよぶ．なお，Lo [19, 20] が proper に彩色された 2-factor が存在するための各種の十分条件を与えているなど，これに関する既存の研究が存在する．一方で，定理 2 を使うことで下の系が得られる．

系 7 与えられたグラフ $G$ に proper に彩色された 2-factor が存在するかどうかを判定する問題は多項式時間で解ける．

---

*12 ここで $\deg_F^i(x)$ で $x$ の $F$ での $i$-次数，すなわち，$F$ で $x$ に接続する色 $i$ の辺の本数を表す．

*13 論文によっては，(特に 2 色のみが用いられている場合に) 交互閉路 (道) とも呼ばれている．

## 5.2 proper に彩色された $s,t$-道

本章では proper に彩色された $s,t$-道を考える．ここで $H$ の $s,t$ 以外の各頂点 $x$ で $g^i(x) = g^{\pm}(x) = 0$，$f^i(x) = 1$ かつ $f^{\pm}(x) = 2$ とし，さらに $x = s$ または $t$ で $g^i(x) = 0$ かつ $f^i(x) = g^{\pm}(x) = f^{\pm}(x) = 1$ とする．このとき，proper に彩色された $s,t$-道は

$$s,t \text{ 以外の各頂点 } x \text{ で } \deg_F(x) \equiv 0 \pmod 2$$

であるような $H$ の $(g,f)$-factor $F$ と見なすことができる．この条件はパリティ set-$(g,f)$-factor に対応するため，定理 3 より，下の結果を系として得ることができる．

**定理 8 (Manoussakis [23], Szeider [26])** 与えられた辺着色されたグラフにおいて，proper に彩色された $s,t$-道の存在性を判定する問題は多項式時間で解ける．

加えて，Abouelaoualim, Das, Faria, Manoussakis, Martinhon と Saad [1] は長さ最短の $s,t$-道を与える多項式時間アルゴリズムを与えているが，これは，各辺の重さ $w$ が一定の負の値である場合に重さ最大のパリティ set-$(g,f)$-factor を見つける問題に対応するため，やはり，定理 5 の系として得られる．

一方で，Gourvès, Lyra, Martinhon と Monnot [11] は，辺着色された有向グラフに proper に彩色された有向 $s,t$-道 を見つける問題を考えている．これは第 4.2 章と本章で述べているものの合成であるが，この場合にはそれぞれの章のような良い結果は得られない．これは，同じような帰着をして得られる set-$(g,f)$-factor 問題における頂点集合族が laminar 性を満たさないためである．実際に，Gourvès ら [11] は辺着色された有向グラフに proper に彩色された有向 $s,t$-道 を見つける問題は NP-完全であることを示している．

また，Menger の定理と定理 8 から，自然に，“与えられた辺着色されたグラフにおいて，proper に彩色された内素な $s,t$-道が存在する” ための必要十分条件が期待されるが，これも難しそうである．実際に，Abouelaoualim ら [1] は，“proper に彩色された内素な 2 本の $s,t$-道が存在する” かどうかを判定する問題も NP-完全であることを示している．これは，第 4.2 章で述べた有向グラフの場合とは対照的である．

## 5.3 proper に彩色された点素な $A$-道

本章では，辺着色されたグラフにおける proper に彩色された点素な $A$-道を考える．第 4.3 章と同様に，この問題は set-$(g,f)$-factor として捉えることができる：$A$ に属さない各頂点 $x$ と各色 $i$ に対し，$g^i(x) = g^{\pm}(x) = 0$，$f^i(x) = 1$ かつ $f^{\pm}(x) = 2$ とし，$A$ に属す各頂点 $x$ と各色 $i$ に対しては $g^i(x) = g^{\pm}(x) = 0$ かつ $f^i(x) = f^{\pm}(x) = 1$ とおく．このとき，proper に彩色された互いに点素な $A$-道は

$$A \text{ に属さない各頂点 } x \text{ に対し } \deg_F(x) \equiv 0 \pmod 2$$

であるような $H$ の $(g,f)$-factor $F$ とみなすことができる．したがって，proper に彩色された互いに点素な $A$-道の本数の最大数は，第 4.3 章と同様の辺の重さ $w$ を考えることで，やはり定理 5 より下の結果を系として得る．

**定理 9** (Gourvès, Lyra, Martinhon, Monnot [12]) 与えられた辺着色されたグラフ $H$ における，proper に彩色された互いに点素な $A$-道の本数の最大数は多項式時間で計算できる．

## 5.4 proper に彩色された，中心に次数条件のある star-factor

本章では第 4.1 章で述べた有向 $f$-star-factor の辺彩色版を考える．与えられた辺着色されたグラフ $H$ と，$V(H)$ から $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への $k+1$ 個の関数 $f^1, \dots, f^k, f^{\pm}$ に対し，$H$ の全域部分グラフ $S$ は次の条件を満たすとき，$H$ の **$f$-star-factor** と呼ばれる：$S$ の各連結成分が star であり，その中心 $x$ と各色 $i$ に対し，

$$\deg_S^i(x) \ \leq \ f^i(x), \qquad \text{かつ} \quad \sum_{1 \leq i \leq k} \deg_S^i(x) \ \leq \ f^{\pm}(x)$$

が成り立つ．第 4.1 章と同様の議論により，$V(H)$ から $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への $k+1$ 個の関数 $g^1, \dots, g^k, g^{\pm}$ を $g^i \equiv 0$ かつ $g^{\pm} \equiv 1$ と定義することで，$H$ が $f$-star-factor を持つための必要十分条件は $H$ が条件 (5) を満たす全域部分グラフ $F$ を持つことである，とわかる．実際に，与えられた辺着色されたグラフにおいて $f$-star-factor を見つける問題は set-$(g, f)$-factor 問題の特殊ケースであり，多項式時間で解ける．

## 5.5 関連する研究：rainbow な部分グラフ

set-$(g, f)$-factor の他の応用として，本章では辺着色されたグラフにおける **rainbow** な部分グラフを挙げる．ここで，各辺の色がすべて異なるグラフを **rainbow** であるという．この話題も近年において多く研究されている*14．rainbow な部分グラフを見つける問題は，前章までと同様のグラフ $G_H$ と，以下の頂点集合族 $\mathcal{F}'_H$，集合関数 $g'_H, f'_H$ を考えることで，set-$(g, f)$-factor の問題へと帰着できる：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'_H \ &= \ \big\{\{x^i : x \in V(H)\} : 1 \leq i \leq k\big\}, \\ &\text{かつ，任意の } X \in \mathcal{F}'_H \text{ で} \quad g'_H(X) = 0 \quad \text{かつ} \quad f'_H(X) = 2. \end{aligned}$$

この定義において，$H$ の全域部分グラフ $F_H$ が rainbow であるための必要十分条件は，対応するグラフ $G_H$ が set-$(g'_H, f'_H)$-factor を持つことである，とわかる．したがって，rainbow 部分グラフ問題も set-$(g, f)$-factor の特殊ケースとして述べられる．

ここで，次数制約のある rainbow 部分グラフの問題が近年多く研究されている．その典型的な例は，rainbow (完全) マッチング問題であろう*15．残念ながらそのような問題に対しては，set-$(g, f)$-factor を用いても良い結果が得られない．これは，頂点集合族 $\mathcal{F}_H \cup \mathcal{F}'_H$ が laminar 性を持たないため，定理 2 を使うことはできないからである．実際に，rainbow な最大マッチングを見つける問題は NP-完全であることが知られている ([18])．

---

*14 例えばサーベイ [13] を見よ．

*15 例えば [15, 21] など

# 6 辺数条件のある $(g, f)$-factor

本章では，set-$(g, f)$-factor が辺数に条件のある (通常の意味の) $(g, f)$-factor を見つける問題に用いることができることを示す．ここで，$G$ を (無向，かつ辺着色のない) グラフ，$g, f$ を $V(G)$ から $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への関数とし，$m_-$ と $m_+$ を非負整数とする．このとき，$G$ の $(g, f)$-factor $F'$ で

$$m_- \ \leq\ |E(F')|\ \leq\ m_+ \tag{6}$$

を満たすものを見つけたい．この問題も，以下のように set-$(g, f)$-factor の問題へと帰着できる：頂点集合族 $\mathcal{F}_G$ と $\mathcal{F}_G$ から $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への関数 $g_G, f_G$ を

$$\mathcal{F}_G = \Big\{\{x\} : x \in V(G)\Big\} \cup \Big\{V(G)\Big\},$$

かつ，任意の $X \in \mathcal{F}_G$ で, $X = \{x\}$ のとき，

$$g_G(\{x\}) = g(x) \quad \text{かつ} \quad f_G(\{x\}) = f(x),$$
$$\text{また，} \quad g_G\big(V(G)\big) = 2m_- \quad \text{かつ} \quad f_G\big(V(G)\big) = 2m_+$$

と定義する．ここで，$G$ が set-$(g_G, f_G)$-factor $F$ を持つと仮定する．このとき，$F$ は自明に $G$ の $(g, f)$-factor であり，加えて，握手補題より，

$$2|E(F)| = \sum_{x \in V(G)} \deg_F(x)$$

であり，直ちに条件 (6) を得る．

したがって，set-$(g, f)$-factor は条件 (6) を満たす $(g, f)$-factor を含んでいる．ここで，頂点集合族 $\mathcal{F}_G$ は laminar 性を持つため，定理 2 よりそのような $(g, f)$-factor の存在性は多項式時間で判定できる．

本章では，このさらなる応用を示す．

## 6.1 $k$-道-閉路-factor

グラフ $G$ の全域部分グラフ $F$ の各連結成分が道または閉路のとき，$F$ を **道-閉路-factor** と呼ぶ．さらに，道の数がちょうど $k$ のとき，$F$ は **$k$-道-閉路-factor** である．なお，0-道-閉路-factor は 2-factor のことであり，また，$k$-道-閉路-factor はしばしば，ハミルトン閉路 (道) を見つけるための “補助構造” として用いられている[*16]．

ここで，グラフ $G$ の全域部分グラフ $F$ が $k$-道-閉路-factor であるための必要十分条件は $F$ が条件 (6) を，各頂点 $x$ で $g(x) = 0$ かつ $f(x) = 2$，また，$m_- = m_+ = |G| - k$ で満たすことである．したがって，$k$-道-閉路-factor 問題は，やはり set-$(g, f)$-factor 問題の特殊ケースとなる．

なお，ここでは $k$-道-閉路-factor を，“ちょうど” $k$ 本の道を持つ道-閉路-factor，として述べたが，上記の帰着は “高々” $k$ 本の道を持つ道-閉路-factor でも同様に行うことが可能であり，そのような factor の存在性も多項式時間で判定できる．

---

[*16] 例えば [5, 10].

### 6.2 $P_3$ の数が制限された $\{P_2, P_3\}$-factor

頂点数 $i$ の道を $P_i$ で示す．(したがって，$P_i$ の長さは $i-1$ である．) グラフ $G$ の全域部分グラフで，各連結成分が $P_2$ または $P_3$ であるものを，$\{P_2, P_3\}$**-factor** とよぶ．$\{P_2, P_3\}$-factor の存在性に関しては，[2] にて必要十分条件が知られている．ここでは，その拡張として，$P_3$ の数に制限のある $\{P_2, P_3\}$-factor の存在性について述べる．

$G$ をグラフ，$g', f'$ を $G$ の任意の頂点で $g'(x) = 1$ かつ $f'(x) = 2$ である関数とし，$m_- = 0$ かつ $m_+ = \frac{|G|+k}{2}$ とおく．ここで，$G$ が条件 (6) を満たす $(g', f')$-factor $F$ を持つとする．このとき，$F$ の各連結成分は，頂点数 2 以下の道，または閉路となる．ここで，もし $F$ のある連結成分が，4 頂点以上の道を持つか閉路を持つのであれば，その連結成分内の，両端点の次数が 2 以上の辺を取り除くことで，条件 (6) を満たし，かつ $F$ よりも辺数の少ない $(g', f')$-factor を得る．この操作をすべての連結成分が 3 頂点以下の道になるまで繰り返し，各連結成分が $P_2$ か $P_3$ であるような $(g', f')$-factor $F$ を得ることができる．したがって，$F$ は $G$ の $\{P_2, P_3\}$-factor である．さらには，条件 (6) を $m_+ = \frac{|G|+k}{2}$ で用いたことで，$F$ に属す $P_3$ の連結成分数が高々 $k$ であるとわかる．よって，set-$(g, f)$-factor 問題の特殊ケースとして，$P_3$ の数に制限のある $\{P_2, P_3\}$-factor 問題を扱うことが可能となる．

## 7 まとめ

次数制約のある全域部分グラフの存在性については，完全マッチングとの関連もあって重要な研究対象であり，実際に多くの研究がなされている．その中でも，無向グラフの頂点集合から正の整数の集合 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への関数 $g$ と $f$ における $(g, f)$-factor の存在性はは，Lovász が必要十分条件を与えており，さまざまな場面で応用されている．本論文では，この $(g, f)$-factor を集合関数版へと拡張した set-$(g, f)$-factor を紹介し，その様々な応用を示した．本稿で見たように，set-$(g, f)$-factor は多くの場面で用いることのできる有用なものである．

有向グラフや辺着色されたグラフの全域部分グラフに関する問題は，各種の条件に対応して個々に研究されいた状況であった．しかしながら，本稿で示したように，これらは set-$(g, f)$-factor として統一的に扱うことができるため，今後はこの枠組みでの研究が進むことを期待している．

## 参考文献


[1] A. Abouelaoualim, K.C. Das, L. Faria, Y. Manoussakis, C.A. Martinhon and R. Saad, *Paths and trails in edge-colored graphs*, Theor. Comp. Science **409** (2008) 497–510.

[2] J. Akiyama, D. Avis and H. Era, *On a* $\{1, 2\}$*-factor of a graph*, TRU Math. **16** (1980) 97–102.

[3] J. Akiyama and M. Kano, *Factors and Factorizations of Graphs: Proof Techniques in Factor Theory*, Lecture Notes in Math. **2031** (2013).

[4] J. Bang-Jensen and G. Gutin, *Alternating cycles and paths in edge-coloured multigraphs: A survey*, Discrete Math. **165–166** (1997) 39–60.

[5] J. Bang-Jensen and G. Gutin, *Generalizations of tournaments: a survey*, J. Graph Theory

**28** (1998) 171–202.

[6] R.C. Brewster, P. Hell and R. Rizzi, *Oriented star packings*, J. Combin. Theory Ser. B **98** (2008) 558–576.

[7] R.C. Brewster, S. McGuinness and M.H. Nielsen, *Factors with multiple degree constraints in graphs*, SIAM J. Discrete Math. **27** (2013) 1734–1747.

[8] S. Chiba, M. Furuya, K. Ota, and K. Ozeki, A set-$(g, f)$-factor of a graph, preprint.

[9] J. Edmonds, *Paths, trees, and flowers*, Canad. J. Math. **17** (1965) 449–467.

[10] J. Feng, H.-E. Giesen, Y. Guo, G. Gutin, T Jensen and A. Rafiey, *Characterization of edge-colored complete graphs with properly colored Hamilton paths*, J. Graph Theory **53** (2006) 333–346.

[11] L. Gourvès, A. Lyra, C.A. Martinhon and J. Monnot, *Complexity of trails, paths and circuits in arc-colored digraphs*, Discrete Appl. Math. **161** (2013) 819–828.

[12] L. Gourvès, A. Lyra, C.A. Martinhon and J. Monnot, *On paths, trails and closed trails in edge-colored graphs*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. **14** (2012) 57–74.

[13] M. Kano and X. Li, *Monochromatic and heterochromatic subgraphs in edge-colored graphs–a survey*, Graphs Combin. **24** (2008) 237–263.

[14] B. Korte and J. Vygen, *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms, 5th edition*, Springer, Berlin, 2012.

[15] A. Kostochka and M. Yancey, *Large rainbow matchings in edge-coloured graphs*, Combin. Probab. Comput. **21** (2012) 255–263.

[16] M. Kriesell, *Disjoint A-paths in digraphs*, J. Combin. Theory Ser. B **95** (2005) 168–172.

[17] L.C. Lau, J. Naor, M.R. Salavatipour and M. Singh, *Survivable network design with degree or order constraints*, SIAM J. Comput. **39** (2009) 1062–1087.

[18] V.B. Le and F. Pfender, *Complexity results for rainbow matchings*, Theor. Comp. Science **524** (2014) 27–33.

[19] A. Lo, *An edge-coloured version of Dirac's theorem*, SIAM J. Discrete Math. **28** (2014) 18–36.

[20] A. Lo, *Properly coloured Hamiltonian cycles in edge-coloured complete graphs*, to appear in Combinatorica. http://arxiv.org/pdf/1212.6736v2.pdf

[21] A. Lo and T.S. Tan, *A note on large rainbow matchings in edge-coloured graphs*, Graphs Combin. **30** (2014) 389–393.

[22] L. Lovász, *Subgraphs with prescribed valencies*, J. Combin. Theory **8** (1970) 391–416.

[23] Y. Manoussakis, *Alternating paths in edge-colored complete graphs*, Discrete Applied Mathem. **56** (1995) 297–309.

[24] W. Mader, *Übër die Maximalzahl kreuzungsfreier H-Wege*, Archiv der Mathematik (Basel) **31** (1978) 387–402.

[25] M.D. Plummer, *Graph factors and factorization: 1985–2003: A survey*, Discrete Math. **307** (2007) 791–821.

[26] S. Szeider, *Finding paths in graphs avoiding forbidden transitions*, Discrete Appl. Math. **126** (2003) 261–273.

[27] W. Tutte, *The factorization of linear graphs*, J. London Math. Soc. **22** (1947) 107–111.