数理解析研究所講究録
第 1990 巻 2016 年 161-167



# 複数個の L(♮) 凸集合に対する離散分離定理

九州大学・大学院数理学研究院 川崎英文 (Hidefumi Kawasaki)
Faculty of Mathematics, Kyushu University
kawasaki@math.kyushu-u.ac.jp

## 1 はじめに

2つの交わらない凸集合に対して，それらを分離する超平面が存在することを主張するのが分離定理である．凸解析 Rockafellar [5] において分離定理が重要な役割を演じることは周知のとおりである．また，最適制御問題は無限次元空間における最適化問題であるが，複数個の凸錐に対する分離定理である Dubovickii-Miljutin の定理（[1]）を用いて，最適性必要条件である Pontryagin の最大値原理を導くことができる Ioffe-Tihomirov [2].

一方，室田 [4] は整数性を備えた凸解析である離散凸解析を提唱した．離散凸解析においても分離定理が存在するが，凸解析が 1 種類の凸性で話が閉じるのに対して，離散凸解析では互いに共役な関係にある M 凸性と L 凸性が現れ，それぞれに対して離散分離定理が得られている．本稿では，複数個の L 凸集合（L♮ 凸集合）に離散分離定理を拡張する．

## 2 L 凸集合

本節では，L 凸集合の基本的な性質と離散分離定理を紹介した上で，離散分離定理を複数個の L 凸集合に拡張するの分離定理を与える．以下において $V$ を有限集合として $x \in \mathbb{Z}^V$ の $v \in V$ 成分を $x(v)$, $S \subset V$ に対して

$$x(S) := \sum_{v \in S} x(v).$$

次の条件を満たす集合 $D \subset \mathbb{Z}^V$ を **L 凸集合**とよぶ．

$$x \vee y,\ x \wedge y,\ x \pm \mathbf{1} \in D \quad \forall x, y \in D. \tag{1}$$

ただし，$x \vee y$ と $x \wedge y$ はそれぞれ，成分毎に大きい方をとった点と小さい方をとった点をあらわし，$\mathbf{1}$ は全成分が 1 の点である．このとき，L 凸集合 $D \subset \mathbb{Z}^V$ には穴がない (hole-free)．すなわち，$\mathrm{co}\, D$ を集合 $D$ の凸包として，$D = \mathrm{co}\, D \cap \mathbb{Z}^V$ ([4]).

M 凸集合が整数値劣モジュラ関数 $f : \mathbb{Z}^V \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ で定まる基多面体

$$B(f) := \{x \in \mathbb{R}^V \mid x(S) \le f(S) \quad \forall S \subset V, \quad x(V) = f(V)\}$$

を用いて $B(f) \cap \mathbb{Z}^V$ と表されるように（[4, 定理3.13]），L凸集合はある関数 $\gamma : V \times V \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ で定まる凸多面体 (2) を用いて $D(\gamma) \cap \mathbb{Z}^V$ と表される.

$$D(\gamma) := \{p \in \mathbb{R}^V \mid p(v) - p(u) \leq \gamma(u, v),\ u \neq v\}. \tag{2}$$

すなわち，空でない $D \subset \mathbb{Z}^V$ がL凸集合であるための必要十分条件は

$$\gamma : V \times V \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \quad \gamma(v, v) = 0\ (\forall v \in V) \tag{3}$$

と三角不等式を満たす $\gamma$ を用いて $D = D(\gamma) \cap \mathbb{Z}^V$ と表されることである ([4]) .

**定理 1** （L凸集合の分離定理 [4]）2つのL凸集合 $D_1, D_2$ が交わらないための必要十分条件は，ある $x \in \{-1, 0, 1\}^V$ が存在して次の不等式が成立することである.

$$\sup_{p \in D_1} x^T p \leq \inf_{p \in D_2} x^T p - 1. \tag{4}$$

ここで，$x^T \mathbf{1} = 0$, 即ち，$\#\{v \in V \mid x(v) = 1\} = \#\{v \in V \mid x(v) = -1\}$ なる $x$ をとることができる.

**補足**. 支持関数 $\delta^*(x|D) := \sup\{x^T p \mid p \in D\}$ を用いれば，(4) は次のように表される.

$$\delta^*(x|D_1) + \delta^*(-x|D_2) \leq -1 \tag{5}$$

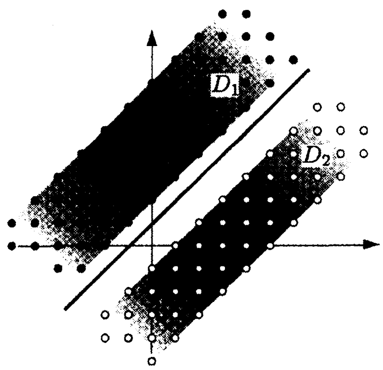


図 1: 2次元の場合に，L凸集合は対角集合方向に延びる領域内の整数点集合である．2つのL凸集合 $D_1, D_2$ が交わらなければ，それらを分離する直線（超平面）が存在する.

**補題 1** L凸集合 $D_0, \ldots, D_m$ に対して，直積集合 $D = \prod_{i=1}^{m} D_i$ と対角集合 $D_{diag} = \{(p, \ldots, p) \in D_0^m \mid p \in D_0\}$ はL凸集合である.

**証明**. 前半：$m=2$ の場合を示せばよい．$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2)$, $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2)\in D$ とすると，$\boldsymbol{p}\vee\boldsymbol{q}=(p_1\vee q_1,p_2\vee q_2)\in D$. 同様に $\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q}\in D$. $\boldsymbol{p}\pm\mathbf{1}=(p_1\pm\mathbf{1},p_2\pm\mathbf{1})\in D$.

後半:$\boldsymbol{p}:=(p,\ldots,p)$, $\boldsymbol{q}:=(q,\ldots,q)\in D_{diag}$ とすると，$\boldsymbol{p}\vee\boldsymbol{q}=(p\vee q,\ldots,p\vee q)\in D_{diag}$. 同様に $\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q}\in D_{diag}$. $\boldsymbol{p}\pm\mathbf{1}=(p\pm\mathbf{1},\ldots,p\pm\mathbf{1})\in D_{diag}$. ■

**定理 2** L 凸集合 $D_0,\ldots,D_m\subset\mathbb{Z}^V$ の共通集合が空であるための必要十分条件は，(6) を満たす $\boldsymbol{x}_0,\ldots,\boldsymbol{x}_m\in\{-1,0,1\}^V$ が存在することである．

$$\boldsymbol{x}_0+\cdots+\boldsymbol{x}_m=\mathbf{0},\quad \delta^*(\boldsymbol{x}_0|D_0)+\cdots+\delta^*(\boldsymbol{x}_m|D_m)\le -1. \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{x}_0^T\mathbf{1}=0$ なるものを選ぶことができる．すなわち，$\boldsymbol{x}_0$ の成分で値が 1 であるものと $-1$ であるものの個数は等しい．

**証明**. 直積集合 $D$ と対角集合 $D_{diag}$ はどちらも L 凸集合であり，$D_0,\ldots,D_m$ が交わらないための必要十分条件は $D$ と $D_{diag}$ が交わらないことである．定理 1 により，それは次の (7)(8) を満たす $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_m\in\{-1,0,1\}^V$ が存在することと同値である．

$$\sup_{p_1\in D_1,\ldots,p_m\in D_m}\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{x}_i)^T p_i+\sup_{p_0\in D_0}\sum_{i=1}^{m}(-\boldsymbol{x}_i)^T p_0\le -1, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{x}_1^T\mathbf{1}+\cdots+\boldsymbol{x}_m^T\mathbf{1}=0. \tag{8}$$

$\boldsymbol{x}_0:=-(\boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_m)\in\{-1,0,1\}^V$ をとれば，

$$\sum_{i=1}^{m}\sup_{p_i\in D_i}\boldsymbol{x}_i^T p_i+\sup_{p_0\in D_0}\boldsymbol{x}_0^T p_0\le -1 \tag{9}$$

となり，(6) が得られた．■

**例 1** 次の 3 つの L 凸集合

$$\begin{aligned}D_1&=\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\mid y-z=1\},\\ D_2&=\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\mid z-x=1\},\\ D_3&=\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\mid x-y=1\}.\end{aligned}$$

の共通集合は空であり，

$$\begin{aligned}\delta^*((a_1,b_1,c_1)|D_1)&=\sup\{a_1x+b_1y+c_1z\mid y-z=1,\ x\in\mathbb{Z}\}\\ &=\sup\{a_1x+b_1+(b_1+c_1)z\mid x,z\in\mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

が有限になるのは $a_1 = 0,\ b_1 + c_1 = 0$ に限られ，このとき

$$\delta^*((0, b_1, -b_1)|D_1) = b_1.$$

同様に，

$$\delta^*((-c_2, 0, c_2)|D_2) = c_2, \quad \delta^*((a_3, -a_3, 0)|D_3) = a_3.$$

ここで，$\boldsymbol{x}_1 := (0, b_1, -b_1)$, $\boldsymbol{x}_2 := (-c_2, 0, c_2)$, $\boldsymbol{x}_3 := (a_3, -a_3, 0)$ の和が $\mathbf{0}$ になるのは $a_1 = b_2 = c_3$ の場合に限られ，$\boldsymbol{x}_1 = (0, -1, 1)$, $\boldsymbol{x}_2 = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{x}_3 = (-1, 1, 0)$ をとれば，

$$\delta^*(\boldsymbol{x}_1|D_1) + \delta^*(\boldsymbol{x}_2|D_2) + \delta^*(\boldsymbol{x}_3|D_3) = -3 \leq -1$$

となり，定理 2 の条件を満たす.

# 3 L$^\natural$ 凸集合

L 凸集合 $D$ は $\mathbf{1}$ 方向の直線を含むため 1 次元の無駄がある. L 凸集合を超平面 $p_0 = 0$ でカットした切り口 $P := \{p \in \mathbb{Z}^V \mid (0, p) \in D\}$ を **L$^\natural$ 凸集合**とよぶ. 明らかに，$(p_0, p) \in D$ と $p \in P + p_0\mathbf{1}$ は同値なので，超平面 $p_0 = c$ による $D$ の切り口は $P$ を平行移動した $P + c\mathbf{1}$ になる.

**定理 3** ([4]) $P \subset \mathbb{Z}^V$ について次の 4 条件は同値である.

(1) $P$ は L$^\natural$ 凸集合である.
(2) $p, q \in P$ ならば，任意の $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ に対して $(p - k\mathbf{1}) \vee q,\ p \wedge (q + k\mathbf{1}) \in P$.
(3) $p, q \in P$ かつ $\mathrm{supp}^+(p - q) \neq \emptyset$ ならば，$S := \mathrm{argmax}_{v \in V}\{p(v) - q(v)\}$ とすると，$p - \chi_S,\ q + \chi_S \in P$.
(4) $p, q \in P$ ならば，$\lceil (p + q)/2 \rceil$, $\lfloor (p + q)/2 \rfloor \in P$. ただし，$\lceil\ \rceil$, $\lfloor\ \rfloor$ はそれぞれ成分毎の切り上げと切り捨てを表す. (**離散中点凸性**)

**補足**. 条件 (2) で $k = 0$ をとることにより，L$^\natural$ 凸集合は束であることが分かる. また，L 凸集合は定理 3 の条件 (2) を満たすので L$^\natural$ 凸集合である. しかし，L$^\natural$ 凸集合は一般には L 凸集合ではない.

**定理 4** （L$^\natural$凸集合の分離定理 [4]）空でないL$^\natural$凸集合 $P_1$, $P_2$ が交わらないための必要十分条件は，ある $x \in \{-1,0,1\}^V$ が存在して次の不等式が成立することである．

$$\delta^*(x|P_1) + \delta^*(-x|P_2) \leq -1. \tag{10}$$

ここで，$x$ として $|x^T\mathbf{1}| \leq 1$ なるものをとることができる．つまり，$x$ の成分のうち1の個数と $-1$ の個数の差は高々1である．

**補題 2** L$^\natural$凸集合 $P_0,\ldots,P_m$ に対して，直積集合 $P := \prod_{i=1}^m P_i$ と対角集合 $P_{diag} := \{(p,\ldots,p) \in P_0^m \mid p \in P_0\}$ はL$^\natural$凸集合である．

**証明**. 前半：$m=2$ の場合を示せばよい．$p := (p_1,p_2)$, $q := (q_1,q_2) \in P_1 \times P_2$ とすると，離散中点凸性（定理3）により，

$$\begin{aligned}\lceil (p+q)/2 \rceil &= (\lceil (p_1+q_1)/2 \rceil, \lceil (p_2+q_2)/2 \rceil) \in P_1 \times P_2,\\ \lfloor (p+q)/2 \rfloor &= (\lfloor (p_1+q_1)/2 \rfloor, \lfloor (p_2+q_2)/2 \rfloor) \in P_1 \times P_2.\end{aligned}$$

再び定理3により，$P_1 \times P_2$ はL$^\natural$凸集合である．

後半：$p := (p,\ldots,p)$, $q := (q,\ldots,q) \in P_{diag}$ とすると，

$$\lceil (p+q)/2 \rceil = (\lceil (p+q)/2 \rceil, \ldots, \lceil (p+q)/2 \rceil) \in P_{diag}.$$

同様に $\lfloor (p+q)/2 \rfloor \in P_{diag}$. 定理3により，$P_{diag}$ はL$^\natural$凸集合である．■

**定理 5** L$^\natural$凸集合 $P_0,\ldots,P_m \subset \mathbb{Z}^V$ の共通集合が空であるための必要十分条件は，(11) を満たす $x_0,\ldots,x_m \in \{-1,0,1\}^V$ が存在することである．

$$x_0 + \cdots + x_m = \mathbf{0}, \quad \delta^*(x_0|P_0) + \cdots + \delta^*(x_m|P_m) \leq -1. \tag{11}$$

ここで，$|x_0^T\mathbf{1}| \leq 1$ なるものをとることができる．つまり，$x_0$ の成分のうち1の個数と $-1$ の個数の差は高々1である．

**証明**. 定理2の証明と同じである．■

**例 2** 例1のL凸集合 $D_1, D_2, D_3$ の平面 $z=0$ による切り口 $P_1, P_2, P_3$ はL$^\natural$凸集合である．

$$\begin{aligned}P_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y = 1\},\\ P_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -x = 1\},\\ P_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x - y = 1\}.\end{aligned}$$

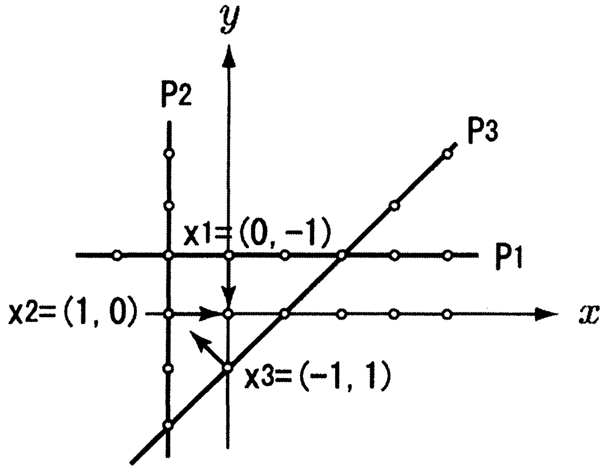


図 2: 2 次元の場合に，L$^\natural$ 凸集合 $P_1, P_2, P_3$ は 3 本の直線上の整数点集合である．

$P_1, P_2, P_3$ の共通集合は空であり，

$$\delta^*((a_1, b_1)|P_1) = \sup\{a_1 x + b_1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

が有限になるのは $a_1 = 0$ に限られ，このとき

$$\delta^*((0, b_1)|P_1) = b_1.$$

同様に，

$$\delta^*((a_2, 0)|P_2) = -a_2, \quad \delta^*((a_3, -a_3)|P_3) = a_3.$$

ここで，$\boldsymbol{x}_1 := (0, b_1)$, $\boldsymbol{x}_2 := (-c_2, 0)$, $\boldsymbol{x}_3 := (a_3, -a_3)$ の和が $\mathbf{0}$ になるのは $b_1 = -a_2 = a_3$ の場合に限られ，$\boldsymbol{x}_1 = (0, -1)$, $\boldsymbol{x}_2 = (1, 0)$, $\boldsymbol{x}_3 = (-1, 1)$ をとれば，

$$\delta^*(\boldsymbol{x}_1|P_1) + \delta^*(\boldsymbol{x}_2|P_2) + \delta^*(\boldsymbol{x}_3|P_3) = -3 \leq -1$$

となり，定理 5 の条件を満たすことが分かる．

# 4 おわりに

本稿の証明のテクニックは，複数個の凸錐に対する Dubovickii-Miljutin の定理 [1] によるものである．複数個の凸集合に対する分離定理もあり，それについては，例えば [2, 3]

を見よ．対角集合はL凸集合（したがって$\mathrm{L}^\natural$凸集合）になるため，離散分離定理を複数個の場合に拡張することができたが，M凸集合は超平面 $x(V) =$ 定数 上にあるため，対角集合はM凸集合ではない．それもあって，複数個のM凸集合に対する離散分離定理は得られていない．

## 参考文献


[1] A. JA. Dubovickii and A. A. Miljutin, Extremal problems with constraints, *Soviet Math Dokl.*, 4 (1963) 452-255.

[2] A. Ioffe and V. M. Tihomirov, *Theory of Extremal Problems*, North-Holland, Amsterdam, (1979).

[3] 川崎英文，極値問題，横浜図書 (2004).

[4] 室田一雄，離散凸解析，共立出版 (2001).

[5] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, (1970).