数理解析研究所講究録
第 1990 巻 2016 年 153-160

Hider が Screening 能力を持つ探索ゲーム

Andrey Garnaev
Faculty of Applied Mathematics
and Control Processes
St Petersburg University

兵庫県立大学経営学部　菊田　健作
Kensaku KIKUTA
School of Business Administration
University of Hyogo

1　はじめに

本報告では次のような２人ゼロ和ゲームとしてモデル化された探索問題を扱う．探索空間は有限整数区間 $\{1,2,\ldots,n\}$ である．その成分を点という．hider と呼ばれる player が無限分割可能な資源を n 個の点に分けて隠す．資源の総量は $\overline{C}$ である．さらに，hider は無限分割可能な目くらまし (screening) のための努力を各点に配分する．例えば，資源が発見されるのを遅らすようなカムフラージュのためのものを考えることができる．hider が使用可能な目くらまし (screening) のための努力の総量は $\overline{D}$ である．一方，探索者と呼ばれる player は無限分割可能な探索努力を各点に配分する．使用可能な総探索努力量は $\overline{A}$ である．例えば，各点に費やされる探索時間等を考えることができる．$\overline{A},\overline{C},\overline{D}$ は所与とする．探索空間の各点 i は３個のパラメーターにより特徴付けられる．$\delta_i>0$ はその点 i を screening する効果を表す．$\alpha_i>0$ は点 i を探索するときの困難さを示す．点 i において screening 努力 z と探索努力 t が配分されたとするときの点 i における発見確率は

$$p_i=a_ie^{-\delta_iz}(1-e^{-\alpha_it})$$

であるとする．ここに，a_i は初期の発見確率である．また，点 i に資源量 x が隠されているとき，xp_i は点 i で見つかる資源の期待量である．

次に各 player の戦略を定義する．hider の純粋戦略は (C,D) で表される．ここに，$C=(C_1,\ldots,C_n)$ であり C_i は点 i に隠される資源の量である．一方，$D=(D_1,\ldots,D_n)$ であり D_i は点 i に配分される screening のための努力を表す．

$$\sum_{i=1}^{n}C_i=\overline{C},\quad \sum_{i=1}^{n}D_i=\overline{D}$$

である．また，A_i を点 i に配分される探索努力量として，探索者の純粋戦略は $A=(A_1,\ldots,A_n)$ で表される．

$$\sum_{i=1}^{n}A_i=\overline{A}$$

である．探索者の利得は発見した資源の量である．つまり，探索者，hider がそれぞれ戦略 A, (C,D) を

用いたときの探索者の期待利益 $v(A,(C,D))$ は

$$v(A,(C,D))=\sum_{i=1}^{n}a_iC_ie^{-\delta_iD_i}(1-e^{-\alpha_iA_i})$$

となる．hider の期待利益は $-v(A,(C,D))$ である．目的は均衡戦略，つまり

$$v(A,(C_*,D_*))\leq v\equiv v(A_*,(C_*,D_*))\leq v(A_*,(C,D)),\quad \forall(A,(C,D))$$

となるような $(A_*,(C_*,D_*))$ を見つけることである．

本報告の目的は，このモデルを扱った論文 Garnaev/Kikuta[4] の内容を紹介し，今後の課題を述べることである．Alpern/Gal[1] と Ruckle[6] は探索ゲームについて解説したテキストである．本報告で述べた問題の解法については Garnaev[5] が参考になる．

2 過去の研究

2.1 Danskin の研究

Danskin[3] は前節で述べたモデルにおける hider の戦略から screening 能力を除いたモデルを扱っている．探索者，hider の純粋戦略はそれぞれ A と C である．ここに $\sum_{i=1}^{n}C_i=\overline{C}$ かつ $\sum_{i=1}^{n}A_i=\overline{A}$ である．点 i は $\alpha_i>0$ と $a_i\in(0,1)$ により特徴付けられる．探索努力 t のときの点 i における発見確率は

$$a_i(1-e^{-\alpha_it})$$

である．探索者の期待利得は

$$v(A,C)\equiv\sum_{i=1}^{n}a_iC_i(1-e^{-\alpha_iA_i})$$

となる．hider の利得は $-v(A,C)$ である．関数 $v(A,C)$ は固定された C に対し，A について凹である．また，固定された A に対し，C について線形である．これより，ゲームは unique な均衡点 $(A(\omega_C),C(\omega_C))$ を持つ．ここに，

$$A_i(\omega_C)=\frac{1}{\alpha_i}\ln(\frac{a_i}{a_i-\omega_C}),$$
$$C_i(\omega_C)=\frac{\overline{C}/(\alpha_i(a_i-\omega_C))}{\sum_{j=1}^{n}1/(\alpha_j(a_j-\omega_C))},\quad i\in\{1,\ldots,n\}.$$

であり，ゲームの値は $v_{AC}=\omega_C$ である．ここに ω_C は次の方程式の唯一の根である:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}\ln(\frac{a_i}{a_i-\omega_C})=\overline{A}.$$

2.2 Croucher の研究

Croucher[2] は第 1 節で述べたモデルにおける hider の戦略から資源配分の部分を除いたモデルを扱っている．探索者，hider の純粋戦略はそれぞれ A と D である．ここに $\sum_{i=1}^{n} D_i = \overline{D}$ かつ $\sum_{i=1}^{n} A_i = \overline{A}$ である．点 i は $\delta_i > 0$，$\alpha_i > 0$ と $a_i \in (0,1)$ により特徴付けられる．screening 努力 z，探索努力 t のときの点 i における発見確率は

$$a_i e^{-\delta_i z}(1 - e^{-\alpha_i t})$$

となる．探索者の期待利得は，

$$v(A,D) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i C_i e^{-\delta_i D_i}(1 - e^{-\alpha_i A_i})$$

となる．hider の利得は $-v(A,D)$ である．関数 $v(A,D)$ は固定された D に対し，A について凹である．また，固定された A に対し，関数 $-v(A,D)$ は D について凹である． これより，ゲームは unique な均衡点 $(A(\nu,\omega_D), D(\nu,\omega_D))$ を持つ．ここに，

$$A_i(\nu,\omega_D) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i}\ln(\frac{\delta_i\nu+\alpha_i\omega_D}{\delta_i\nu}), & i \in I_{11}; \\ \frac{1}{\alpha_i}\ln(\frac{a_iC_i\alpha_i}{\nu}), & i \in I_{10}; \\ 0, & i \in I_{00}; \end{cases}$$

$$D_i(\nu,\omega_D)) = \begin{cases} \frac{1}{\delta_i}\ln(\frac{\delta_i a_i C_i}{\delta_i\nu+\alpha_i\omega_D}) & \text{for } i \in I_{11}; \\ 0 & \text{for } i \in I_{00} \cup I_{10}, \end{cases}$$

かつ

$$\begin{aligned} I_{00} &= I_{00}(\omega,\nu) = \{i \in [1,n] : a_iC_i\alpha_i \le \nu\}, \\ I_{10} &= I_{10}(\omega,\nu) = \{i \in [1,n] : \nu < a_iC_i\alpha_i \le \nu + (\alpha_i/\delta_i)\omega_D\}, \\ I_{11} &= I_{11}(\omega,\nu) = \{i \in [1,n] : \nu + (\alpha_i/\delta_i)\omega_D < a_iC_i\alpha_i\}, \end{aligned}$$

かつ

$$\omega_D = \omega_D(\nu_*), \nu = \nu_*,$$

ここで，ν_* は次の方程式の $[0,\overline{\nu}]$ 内の唯一の根であり，

$$\sum_{i\in I_{11}} \frac{1}{\alpha_i}\ln(\frac{\delta_i\nu + \alpha_i\omega_D(\nu)}{\delta_i\nu}) + \sum_{i\in I_{10}} \frac{1}{\alpha_i}\ln(\frac{a_iC_i\alpha_i}{\nu}) = \overline{A}.$$

$\overline{\nu}$ は次の方程式の唯一の根である：

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\delta_j}[\ln(\frac{a_jC_j}{\nu})]_+ = \overline{D}$$

また，各固定された $\nu \in [0,\overline{\nu}]$ に対し，$\omega_D(\nu)$ は次の方程式の唯一の根である:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\delta_j}[\ln(\frac{\delta_j a_j C_j}{\delta_j\nu + \alpha_j\omega_D(\nu)})]_+ = \overline{D}.$$

3 ゲームの均衡点

第1節のモデル（本報告で扱うモデル）は第2節で紹介したモデルの拡張になっている．ゲームの均衡戦略を求める方法も第2節の場合の拡張となる．まず，関数 $v(A,(C,D))$ は C について線形，A について凹，D について凸であることに注意する．

Lemma(Garnaev/Kikuta[4]) 均衡点 $(A,(C,D))$ は次のようになる：

$$(A,(C,D)) = (A(\delta,\omega_C,\omega_D), C(\nu,\omega_C,\omega_D), D(\nu,\omega_C,\omega_D)),$$

ここに，

$$C_i = \begin{cases} \frac{\omega_D}{\omega_C}\frac{1}{\delta_i}, & i \in I_i; \\ \frac{\nu}{\alpha_i(a_i-\omega_C)}, & i \in I_0, \end{cases}$$

$$A_i = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i}\ln(\frac{\alpha_i\omega_D+\delta_i\nu}{\delta_i\nu}) & \text{for } i \in I_1; \\ \frac{1}{\alpha_i}\ln(\frac{a_i}{a_i-\omega_C}) & \text{for } i \in I_0, \end{cases}$$

$$D_i = \begin{cases} \frac{1}{\delta_i}\ln(\frac{a_i\alpha_i\omega_D}{\alpha_i\omega_D+\delta_i\nu}\frac{1}{\omega_C}) & \text{for } i \in I_1; \\ 0 & \text{for } i \in I_0. \end{cases}$$

また，

$$I_0 = \{i \in [1,n] : a_i\alpha_i\omega_D \le (\alpha_i\omega_D+\delta_i\nu)\omega_C\},$$
$$I_1 = \{i \in [1,n] : a_i\alpha_i\omega_D > (\alpha_i\omega_D+\delta_i\nu)\omega_C\}.$$

Theorem. (Garnaev/Kikuta[4]) ゲームは唯一の均衡点を持ちそれは上の Lemma で与えられる．ゲームの値は

$$v_{ACD} = \omega_{C(\tau)}\overline{C}$$

である．$\nu, \omega_D, \omega_C, \tau$ 及び $\omega_C(\bullet)$ は次によって与えられる：

$$\omega_C = \omega_C(\tau),$$
$$\omega_D = \nu\tau,$$
$$\nu = \frac{\overline{C}}{\sum_{i:\omega_C(\tau)<\frac{a_i\alpha_i\tau}{\alpha_i\tau+\delta_i}}\frac{\tau}{\delta_i\omega_C(\tau)} + \sum_{i:\omega_C(\tau)\ge\frac{a_i\alpha_i\tau}{\alpha_i\tau+\delta_i}}\frac{1}{\alpha_i(a_i-\omega_C(\tau))}}$$

であり τ は次の方程式の唯一の根である：

$$\sum_{i:\omega_C(\tau)<\frac{a_i\alpha_i\tau}{\alpha_i\tau+\delta_i}}\frac{1}{\alpha_i}ln\left(\frac{\alpha_i\tau+\delta_i}{\delta_i}\right) + \sum_{i:\omega_C(\tau)\ge\frac{a_i\alpha_i\tau}{\alpha_i\tau+\delta_i}}\frac{1}{\alpha_i}ln\left(\frac{a_i}{a_i-\omega_C(\tau)}\right) = \overline{A},$$

ここに，$\omega_C(\tau)$ は次の方程式の唯一の根である：

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\delta_i}ln\left(\frac{a_i\alpha_i\tau}{\alpha_i\tau+\delta_i}\frac{1}{\omega_C(\tau)}\right)\right]_+ = \overline{D}.$$

4 ゲームの特殊ケース

本節では第1節で扱ったモデルにおいて資源や努力等の分割の仕方が制限されている場合を扱う．$\mathcal{N} \equiv \{1, 2, \ldots, n\}$ とおく．hider は $\mathcal{N}$ に属するただ一つの点に資源を隠す．また，各点での screening 努力は次の２通りのいずれかである：

$$D_i = \begin{cases} h, & \text{high screening;} \\ \ell, & \text{low screening.} \end{cases}$$

ただし，$h > \ell > 0$ とする．hider の純粋戦略は $(i, \mathcal{H})$ で表される．ここに，$i \in \mathcal{N}$ は hider が資源を隠す点であり，$\mathcal{H} = \{i \in \mathcal{N} : D_i = h\}$ は high screening を行う点の集合である．$\mathcal{N} \setminus \mathcal{H}$ は low screening を行う点の集合である．$|\mathcal{H}|$ および $\overline{D}$ は所与であり，$|\mathcal{H}| \geq 1$ かつ $|\mathcal{H}|h + |\mathcal{N} \setminus \mathcal{H}|\ell = \overline{D}$ であるとする．探索者の各点での探索努力は次の２通りのいずれかであるとする：

$$A_i = \begin{cases} s, & \text{strong search;} \\ w, & \text{weak search.} \end{cases}$$

ただし，$s > w > 0$ とする．探索者の純粋戦略は $\mathcal{S}$ で表される．ここに，$\mathcal{S} = \{i \in \mathcal{N} : A_i = s\}$ は strong search を行う点の集合である．$\mathcal{N} \setminus \mathcal{S}$ は weak search を行う点の集合である．$|\mathcal{S}|$ および $\overline{A}$ は所与であり，$|\mathcal{S}|s + |\mathcal{N} \setminus \mathcal{S}|w = \overline{A}$ であるとする．探索者の純粋戦略の個数は $\binom{n}{|\mathcal{S}|}$ となる．両 player の純粋戦略の対 $(\mathcal{S}, (i, \mathcal{H}))$ に対し，探索者の利得は

$$f(\mathcal{S}, (i, \mathcal{H})) = a_i e^{-\delta_i D_i}(1 - e^{-\alpha_i A_i})$$

であるとする．ここに，

$$D_i = \begin{cases} h, & \text{if } i \in \mathcal{H}; \\ \ell, & \text{if } i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{H}, \end{cases} \quad \text{かつ} \quad A_i = \begin{cases} s, & \text{if } i \in \mathcal{S}; \\ w, & \text{if } i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{S}. \end{cases}$$

すぐにわかるように，$i \notin \mathcal{H}$ であれば，任意の $j \in \mathcal{H}$ に対し，

$$\begin{aligned} f(\mathcal{S}, (i, \mathcal{H})) &= a_i e^{-\delta_i \ell}(1 - e^{-\alpha_i A_i}) > a_i e^{-\delta_i h}(1 - e^{-\alpha_i A_i}) \\ &= f(\mathcal{S}, (i, \mathcal{H} \cup \{i\} \setminus \{j\})), \end{aligned}$$

であるから hider の戦略 $(i, \mathcal{H})$ は $(i, \mathcal{H} \cup \{i\} \setminus \{j\})$ によって支配される．以後は，hider の純粋戦略 $(i, \mathcal{H})$ として $i \in \mathcal{H}$ であるようなもののみ考えることにする．さらに，各 $i \in \mathcal{N}$ に対し，$b_i(x) \equiv a_i e^{-\delta_i h}(1 - e^{-\alpha_i x})$ とおくと，これは増加関数であり $f(\mathcal{S}, (i, \mathcal{H})) = b_i(A_i)$ を得る．これより，

$$f(\mathcal{S}, (i, \mathcal{H})) = f(\mathcal{S}, (i, \mathcal{H}')), \forall \mathcal{H}, \mathcal{H}' \text{ s. t. } |\mathcal{H}| = |\mathcal{H}'| \text{ かつ } i \in \mathcal{H} \cap \mathcal{H}'.$$

がわかる．よって，hider の純粋戦略は i と表され，純粋戦略の総数は n となり，$\binom{n}{n_s} \times n$ の行列ゲームを得る．以後，

$$b_1(s) > b_2(s) > \ldots > b_n(s) \text{ かつ } b_1(w) > b_2(w) > \ldots > b_n(w) \tag{1}$$

を仮定する．

例 1. $n=3$ とする．$|\mathcal{S}|=1$ かつ $|\mathcal{H}|=1$ とする．条件：$h+2\ell=\overline{D}$ かつ $s+2w=\overline{A}$ は満たされていると想定する．ゲームの行列は 3×3 であり，

表 4.1

	1	2	3
$\{1\}$	$b_1(s)$	$b_2(w)$	$b_3(w)$
$\{2\}$	$b_1(w)$	$b_2(s)$	$b_3(w)$
$\{3\}$	$b_1(w)$	$b_2(w)$	$b_3(s)$

となる．仮定 (1) と b_i が増加関数であることから行列式の値は正でありこの行列は正則である．3 個の部分行列ゲーム：

表 4.2

	2	3
$\{2\}$	$b_2(s)$	$b_3(w)$
$\{3\}$	$b_2(w)$	$b_3(s)$

	1	3
$\{1\}$	$b_1(s)$	$b_3(w)$
$\{3\}$	$b_1(w)$	$b_3(s)$

	1	2
$\{1\}$	$b_1(s)$	$b_2(w)$
$\{2\}$	$b_1(w)$	$b_2(s)$

の値をそれぞれ v_{-1}, v_{-2}, v_{-3} とする．例えば

$$v_{-1}=\frac{b_2(s)b_3(s)-b_2(w)b_3(w)}{b_2(s)+b_3(s)-b_2(w)-b_3(w)}$$

である．すると，

$$b_3(s)<b_2(w)\Longleftrightarrow b_3(s)<v_{-1}\Longleftrightarrow v_{-1}<b_2(w)$$

であることがわかる．これと，仮定 (1) に注意して次のようなことがわかる．

[I] $b_3(s)<b_2(w)$ であれば，$(\{3\},3)$ は唯一の鞍点である．ゲームの値は $b_3(s)$ である．

[II] $b_1(w)>b_3(s)>v_{-1}>b_2(w)$ であれば，鞍点は存在しないが，hider の戦略"1"は戦略"3"に支配される．結局，表 4.2 の左端の行列ゲームを考えることになる．ゲームの値は v_{-1} である．

[III] $b_3(s)>b_1(w)>v_{-1}>b_2(w)$ であれば，表 4.2 の左端の行列ゲームに縮約される．ゲームの値は v_{-1} である．

[IV] $b_3(s)>b_1(w)$ かつ $v_{-1}>b_1(w)$ であれば，ゲームは単純解を持つ．

条件 $b_3(s)>b_1(w)$ はゲームが単純解を持つための必要十分条件ではないことに注意する．例 1 の分析の一部は n 個の点の場合へと拡張できる．

命題 1．$|\mathcal{S}|=1$ かつ $|\mathcal{H}|=1$ とする．条件：$h+(n-1)\ell=\overline{D}$ かつ $s+(n-1)w=\overline{A}$ は満たされていると想定する．探索者の純粋戦略を $\{i\}, 1\le i\le n$, と表す．探索者，hider の純粋戦略からそれぞれ $\{1\}$ および 1 を除いた $(n-1)\times(n-1)$ 行列ゲームを G^{-1} とし，その値を v_{-1} とする．

$$f(\{i\},(j,\{j\}))=\begin{cases}b_j(s), & \text{if } j=i;\\ b_j(w), & \text{if } j\neq i\end{cases}$$

であり次が成立する.

(i) $b_n(s) < b_{n-1}(w)$ であれば, $(\{n\}, n)$ は唯一の鞍点である.

(ii) $b_1(w) > b_n(s)$ であれば, ゲーム G^{-1} に帰着する.

(iii) $b_1(w) > v_{-1}$ であれば, ゲーム G^{-1} に帰着する.

略証 (i) hider の戦略"n"が他のすべての純粋戦略を支配することからわかる. (ii) hider の戦略"1"は戦略"n"に支配される. すると, 探索者の戦略 $\{1\}$ は他の戦略に弱支配される. (iii) ゲーム G^{-1} における探索者, hider の最適戦略を p, q とするとき, $(0,p), (0,q)$ が元のゲームにおける最適戦略であることを示せばよい.

5 おわりに

本稿では Garnaev/Kikuta[4] の一部を第1, 3節で紹介した. 第4節では, 特殊ケースとして, hider の screening 努力配分と探索者の探索努力配分が各点において2通りしかない場合のモデルを考察した. 一方, hider は隠すべき手持ち資源を一つの点のみに隠すとした. 今後の課題として次のような点があげられる.

(1) 命題1の (i) は (ii) の一部である. 命題1の (ii) でも (iii) でもない場合, つまり $b_n(s) > b_1(w)$ かつ $v_{-1} > b_1(w)$ のときに分析を行うこと.

(2) ゲームの離散バージョンつまり資源や努力の配分の仕方が無限分割可能でない場合の分析.

(3) 第1節のモデルの特殊ケースを第4節で述べたが, これ以外にも hider, 探索者の戦略集合の設定によって様々なモデルが考えられる.

References

[1] S. Alpern and S.Gal (2003), *The theory of search games and rendezvous.* Kluwer's INTERNATIONAL SERIES.

[2] J.S.Croucher (1975), Application of the fundamental theorem of game to an example concerning antiballistic missle defense. *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.22, pp.197-203.

[3] J.M. Danskin.(1967), *The Theory of Max-Min.* Springer-Verlag,Berlin.

[4] A.Garnaev and K.Kikuta (2014) Screening and hiding versus search. *Mathematical Method of Operations Research.* Vol.80, pp.255-265.

[5] A. Garnaev (2000). *Search games and other applications of game theory.* Lecture Notes in EMS 485, Springer.

[6] W. Ruckle (1983), *Geometric games and their applications*, Pitman Research Notes in Mathematics 82, Boston.