数理解析研究所講究録
第1990巻 2016年 105-112

ルンドベリ・モデルに資産運用を考慮した場合における破産確率の研究

大内 康裕 [*1], 穴太 克則 [*2]
[*1]: 芝浦工業大学大学院 理工学研究科 システム理工学専攻 数理科学部門
[*2]: 芝浦工業大学 システム理工学部 数理科学学科
Yasuhiro Ouchi [*1], Katsunori Ano [*2]
[*1]: Graduate School of Engineering and Science, Shibaura Institute of Technology
[*2]: Department of Mathematical Sciences, Shibaura Institute of Technology

概 要

保険会社のサープラスを表現する古典的なモデルとしてルンドベリ・モデルがある。このモデルでは保険会社の資産運用を考慮していないため十分なモデルとはいえない。そこで今回保険会社の資産運用を考慮したサープラス過程をモデル化し破産確率をシミュレーションする。

1 ルンドベリ・モデル

定義 1.1 破産をある時刻 t でサープラス $U(t)$ が負になる事象と定義する.

破産の定義から, 初期資産 u_0 で時刻 T が経過するまでに破産する確率は

$$\varepsilon(u_0,T)=P\left(\inf_{0\leq t\leq T}U(t)<0\middle|U(0)=u_0\right).$$

となる. 以降, この有限期間破産確率をリスクの指標とする.

以下では, ポアソン過程のパラメータ λ, 個々の支払保険金の期待値 $E(X)$ を μ とする. ルンドベリ・モデルでは収入保険料 $P(t)$ は経過期間に比例して収入するものと仮定する. 期間 $[0,t]$ で受け取る収入保険料総額は, $[0,t]$ での支払保険金の期待値 $\lambda\mu t$(純保険料) に対し, 保険会社の安全性のために純保険料の安全割増率 θ 倍を上乗せして, $P(t)=(1+\theta)\lambda t\mu$ として表される.

ルンドベリ・モデルをまとめると次のようになる.

ルンドベリ・モデル

$$\text{サープラス}:U(t)=u_0+(1+\theta)\lambda\mu t-S(t)$$

ただし,

u_0 : 初期資産
$\{S(t)\}$: 支払保険金総額過程 (複合ポアソン過程)
λ : 支払件数過程 (ポアソン過程) のパラメータ
μ : 個々の支払保険金額の期待値
θ : 保険料に対する安全割増率

ルンドベリ・モデルにおいて微小時間 Δt に着目し差分方程式を立てると次のようになる.

$$\Delta U(t)=(1+\theta)\lambda\mu\Delta t-\Delta S(t)$$

ここで $\Delta S(t)$ は, 確率 $\lambda\Delta t$ で支払保険金の確率変数 X, 確率 $(1-\lambda\Delta t)$ で 0 の値をとる確率変数.

この差分方程式と初期資産 $U(0)=u_0$ を用いてルンドベリ・モデルのサンプルパスを発生させ, 解析的に解くことができない問題もモンテカルロ法を用いて算出することができる. しかし, ルンドベリ・モデルは保険会社の資産運用の要素を考慮していないため実務上十分なモデルとはいえない. 以下で, 保険会社の資産運用の考慮したモデルを構築していく.

2 ルンドベリ・モデルに資産運用を考慮した場合のサープラス $U(t)$ のモデル

資産運用は危険資産 (株式) と安全資産 (国債) の 2 つの資産のみで運用し, 微小時間 Δt での危険資産のみで運用した場合のサープラス $U(t)$ の変化量は $U(t)(\alpha(t)\Delta t+\sigma(t)\Delta t)$ に従うとする.

$\alpha(t)$: 時刻 t での危険資産 (株式) の期待収益率.
$\sigma(t)$: 時刻 t での危険資産 (株式) のボラティリティ.
$\Delta W_1(t)$: 平均 0, 標準偏差 $\sqrt{\Delta t}$ の正規確率変数.
r_f : 安全資産の利子率.
β : 危険資産への投資比率.
$\alpha(t)$, $\sigma(t)$,$\Delta W_1(t)$ はそれぞれ独立.

資産運用を考慮した場合のサープラス $U(t)$ の従う確率差分方程式

$$\Delta U(t)=(1+\theta)\lambda\mu\Delta t+U(t)\Big(\big((1-\beta)r_f+\beta\alpha(t)\big)\Delta t+\beta\sigma(t)\Delta W_1(t)\Big)-\Delta S(t),$$
$$U(0)=u_0,\ \alpha(0)=\alpha_0,\ \sigma(0)=\sigma_0.$$

$(\alpha(t),\sigma(t),\beta)=(0,0,1)$ の場合がルンドベリ・モデルになっていることがわかる.

この差分方程式からサンプルパスを生成することができるので, 資産運用が破産確率に与える影響をシミュレーションすることができる.

2.1 時刻 t での危険資産の期待収益率 $\alpha(t)$ のモデル化

時刻 t の危険資産の期待収益率 $\alpha(t)$ は時刻によらず定数ではなく, 経済の変化の影響を受け時刻 t と共に変化すると考える方が自然である. また, 不景気の時期には瞬間的な期待収益率 $\alpha(t)$ が負の値になることも考えられる. そこで, 危険資産の期待収益率 $\alpha(t)$ は以下の Vasicek モデルに従うとする.

$$\Delta\alpha(t)=a_1(a_2-\alpha(t))\Delta(t)+a_3\Delta W_2(t),\ \alpha(0)=\alpha_0.$$

ただし, a_1, a_2, a_3 は定数. $\Delta W_2(t)$ は平均 0, 標準偏差 $\sqrt{\Delta t}$ の正規確率変数とする.

2.2 時刻 t での危険資産のボラティリティ $\sigma(t)$ のモデル化

時刻 t の危険資産のボラティリティ $\sigma(t)$ は期待収益率 $\alpha(t)$ と同様に時刻によらず定数ではなく, 経済の変化の影響を受け時刻 t と共に変化すると考える方が自然である. また, ボラティリティは負の値をとることはない. そこで, 危険資産のボラティリティ $\sigma(t)$ は以下の CIR(Cox-Ingersoll-Ross) モデルに従うとする.

$$\Delta\sigma(t)=b_1(b_2-\sigma(t))\Delta(t)+b_3\sqrt{\sigma(t)}\Delta W_3(t),\ \sigma(0)=\sigma_0.$$

ただし, b_1, b_2, b_3 は定数. $\Delta W_3(t)$ は平均 0, 標準偏差 $\sqrt{\Delta t}$ の正規確率変数とする.

3 シミュレーション

資産運用を考慮したサープラス $U(t)$ を用いて, 時刻 T が経過するまでに破産する確率をモンテカルロ法を用いて算出する.

3.1 計算アルゴリズム

$U(t), \alpha(t)$,$\sigma(t)$ が次の確率差分方程式に従うとする.

$$\Delta U(t) = (1+\theta)\lambda\mu\Delta t + U(t)\Big(\big((1-\beta)r_f + \beta\alpha(t)\big)\Delta t + \beta\sigma(t)\Delta W_1(t)\Big) - \Delta S(t),\ U(0) = u_0.$$

$$\Delta\alpha(t) = a_1(a_2 - \alpha(t))\Delta(t) + a_3\Delta W_2(t),\ \alpha(0) = \alpha_0.$$

$$\Delta\sigma(t) = b_1(b_2 - \sigma(t))\Delta(t) + b_3\sqrt{\sigma(t)}\Delta W_3(t),\ \sigma(0) = \sigma_0.$$

(手順 1) : サープラス U を時間幅 $\Delta t = 1/n$ で離散近似を行い, 上の確率差分方程式に従うサンプル　　　　　パスを発生させる.
(手順 2) : 発生させたサンプルパスで $^{\exists}t \in \{0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, T\}$ $s.t.$ $U(t) < 0$ ならば破産したとして　　　　　カウントする.
(手順 3) : (手順 1),(手順 2) を N 回繰り返し行い, (N 回中の破産回数)/N で破産確率を推定する.

3.2 実際の問題への適用

例) 現在保険会社が次のような状況にあるとする.

- 初期サープラス u_0 : 1500 (百万円)
- 契約者数 : 50000 (人)
- 契約者 1 人あたり年 1.0% で事故が発生する.
- 損害額 X は平均 10(百万円) の指数分布に従うとする.
- 安全割増率 θ : 1.5%
- 時刻 t での市場ポートフォリオの期待収益率 $\alpha(t)$ は次の確率差分方程式に従う.

$$\Delta\alpha(t) = 2.0(0.06 - \alpha(t))\Delta(t) + 0.05\Delta W_2(t),\ \alpha(0) = 0.06$$

- 時刻 t での市場ポートフォリオのボラティリティ $\sigma(t)$ は次の確率差分方程式に従う.

$$\Delta\sigma(t) = 2.0(0.2 - \sigma(t))\Delta(t) + 0.3\sqrt{\sigma(t)}\Delta W_3(t),\ \sigma(0) = 0.2$$

- 安全資産の利子率 r_f : 0.5 %

保険会社は 50 年以内に破産する確率をリスクの指標とし, これを最小にするように現在のサープラスを運用をしたいと思っている. この時, 保険会社「どのような資産運用ポートフォリオを組むべきか.」という問題を考える. そして, 微小時間 $\Delta t = 0.0004$, サンプルパスの本数 $N = 50000$ としてシミュレーションをした結果は次の図である.

次の図から保険会社は国債に 60%, 株式に 40% の割合で投資をすることで破産確率を最小にできることがわかる. また, リスクのない国債だけで運用したり, 期待収益率の高い株式だけで運用すると破産確率が大きくなることがわかる.

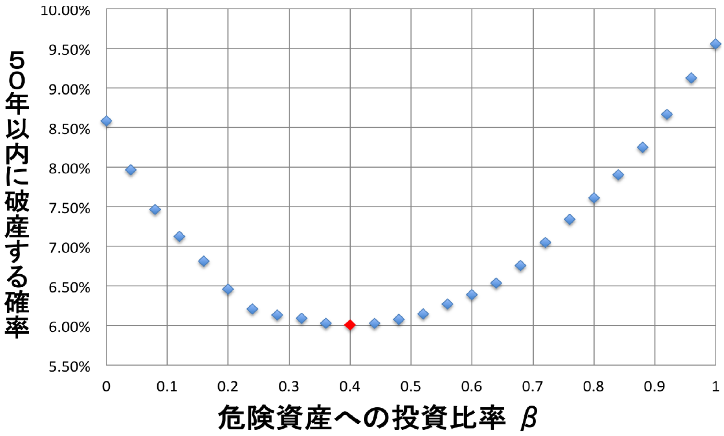


図 1: 破産確率のシミュレーション結果

3.2.1 初期サープラス u_0 を変化させた場合の影響

例の状況で初期サープラス u_0 を変化させた場合のシミュレーション結果は次のようになる.

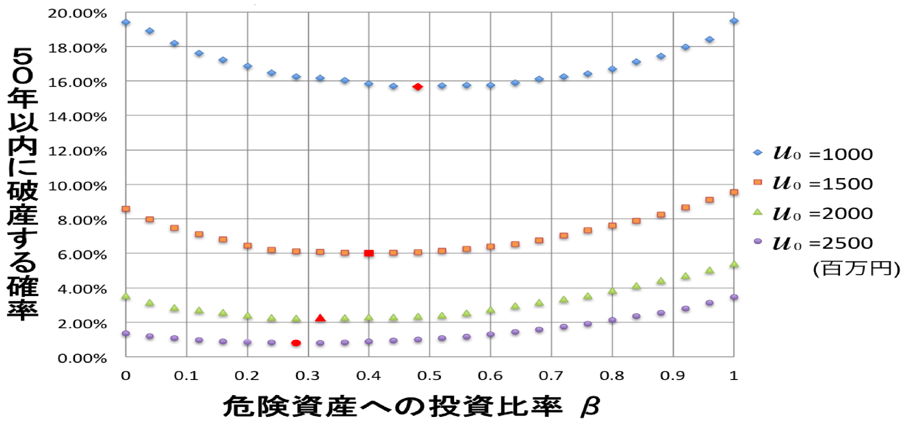


図 2: 初期サープラス u_0 だけを変化させた場合の影響

この図から初期サープラスが異なれば破産確率を最小にする株式への投資比率も異なってくることがわかる. さらには初期サープラスの量が多ければ多いほど破産確率を最小にする株式の比率は低くなることもわかる.

3.2.2 安全割増率 θ を変化させた場合の影響

例の状況で安全割増率 θ だけを変化させた場合のシミュレーション結果は次のようになる. 次の図から安全割増率の値を大きくすればするほど破産確率は低くなっていることがわかる. 安全割増率の値に応じて破産確率を最小にする株式への投資比率は異なる. また安全割増率を大きくすると破産確率を最小にする株式への投資比率は低くなることもわかる.

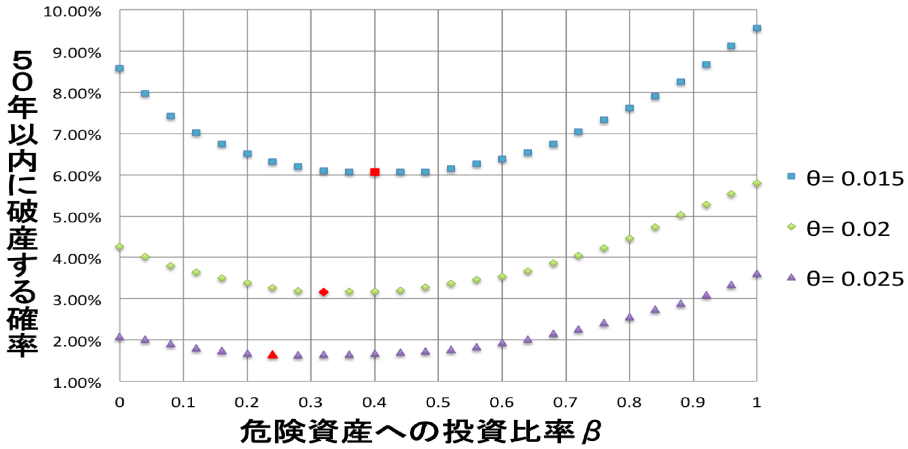


図 3: 安全割増率 θ だけを変化させた場合の影響

3.2.3　シミュレーション期間 T を変化させた場合の影響

例の状況でシミュレーション期間 T だけを変化させた場合のシミュレーション結果は次のようになる.

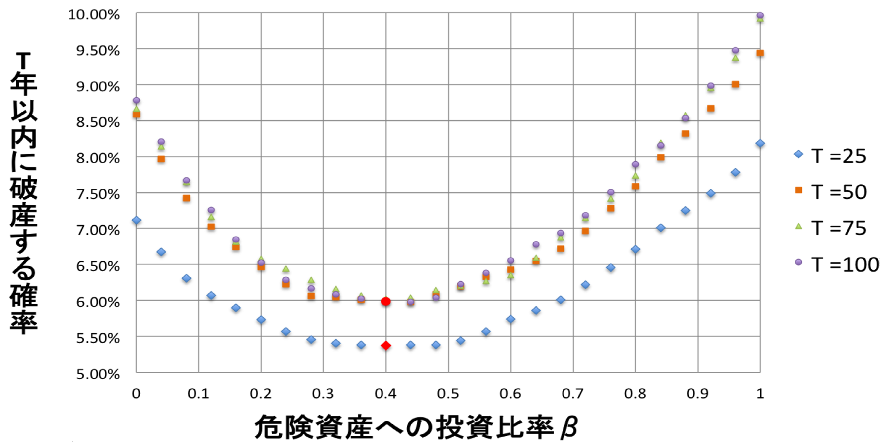


図 4: シミュレーション期間 T だけを変化させた場合の影響

この図からシミュレーション期間の長さが 50 年以上の場合破産確率に大きな違いがでないことがわかる. つまり, 保険会社が破産する場合はシミュレーションを始めてすぐに破産していることがわかる.

3.2.4　2 つのモデルの比較

例の状況において「ボラティリティと期待収益率を常に一定にしたモデル」と「ボラティリティと期待収益率を時間とともに変動するモデル」を比較したシミュレーション結果は次の通りである. 次の図から「ボラティリティと期待収益率を時間とともに変動するモデル」の方が破産確率が高くなっている. また, ボラティリティと期待収益率を常に一定と考えるのは現実的に無理があり, 変動するリスクを考慮し破産確率を算出しているので「ボラティリティと期待収益率を常に一定にしたモデル」より「ボラティリティと期待収益率を時間とともに変動するモデル」のほうがいいモデルであるといえる.

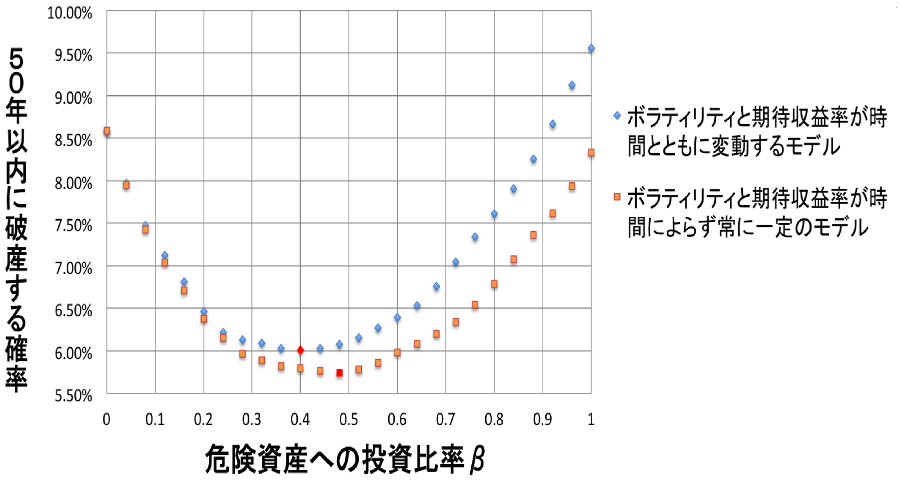


図 5: モデル比較のシミュレーション結果

3.3 定期的に投資ポートフォリオを組み換えることができる場合の破産確率

今までは投資ポートフォリオの選択は最初の 1 回だけであった. 今回は, シミュレーション期間の中で定期的にポートフォリオを組み替えることができる場合の破産確率を算出する.

3.3.1 定期的に投資ポートフォリオを組み替えることができる場合の破産確率の算出方法

最適にポートフォリオを組み替える場合の破産確率の算出方法は基本的にアメリカンプットオプションを後ろ向きに解く解法と同じである. まず, 定期的なポートフォリオの組み替え間隔を δ, 破産確率のシミュレーション期間の長さを T とおく. そして投資可能なパターンを表 1 のように設定する. 図 6 のようにまず, 時刻 $T-\delta$ のサープラス $u_{T-\delta}$ で 1〜21 までの投資パターンを変化させ時刻 $T-\delta$ から δ 以内に破産する確率を算出し, 破産確率が最小になる最適な投資ポートフォリオと破産確率をメモリする. 同様に, 時刻 $T-2\delta$ のサープラス $u_{T-2\delta}$ から時刻 $T-\delta$ までサンプルパスを発生させ, サープラス $u_{T-\delta}$ に応じてメモリしてあった破産確率を用いて時刻 $T-2\delta$ から 2δ 以内に破産する確率を算出する. この操作を順々に行うことで定期的に投資ポートフォリオを組み替えることができる場合の破産確率を算出できる.

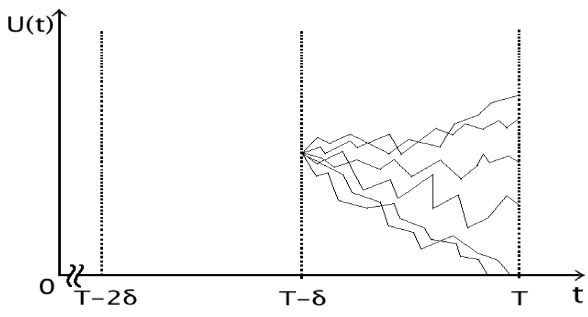


図 6: 破産確率算出のイメージ図

表1:投資比率の具体例

投資パターン	危険資産への投資比率	安全資産への投資比率
1	0%	100%
2	5%	95%
3	10%	90%
⋮	⋮	⋮
20	95%	5%
21	100%	0%

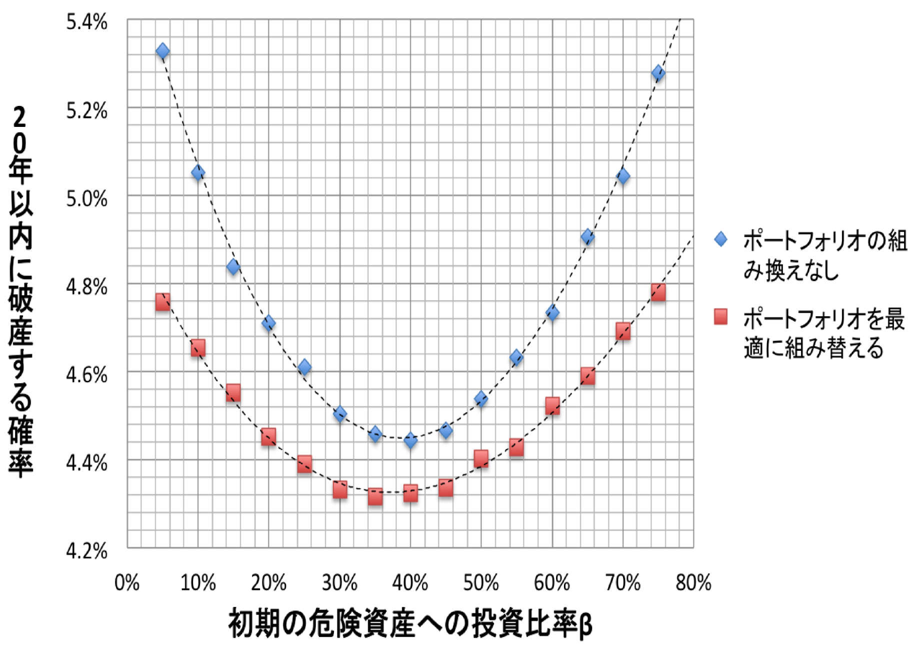
3.3.2 定期的に投資ポートフォリオを組み替えることができる場合の破産確率のシミュレーション

例) 現在保険会社が次のような状況にあるとする.

- 初期サープラス u_0:1500 (百万円)
- 契約者数：50000 (人)
- 契約者1人あたり年1.0% で事故が発生する.
- 損害額 X は平均10(百万円) の指数分布に従うとする.
- 安全割増率 θ : 1.5%
- 市場ポートフォリオの期待収益率 $\alpha(t)$: 6.0%
- 市場ポートフォリオのボラティリティ $\sigma(t)$: 20.0%
- 安全資産の利子率 r_f : 1.0 %
- 5年ごとにポートフォリオの組み換えを行う.
- 危険資産への投資比率は右のパターンのどれかとする.

投資パターン	危険資産への投資比率	安全資産への投資比率
1	0%	100%
2	5%	95%
3	10%	90%
⋮	⋮	⋮
20	95%	5%
21	100%	0%

シミュレーション期間の長さ T を20年, 微小時間 $\Delta t = 0.0004$, サンプルパスの本数 N を100000本と設定シミュレーションを行い最適にポートフォリオを組み換えた場合の破産確率を算出した結果が次である.



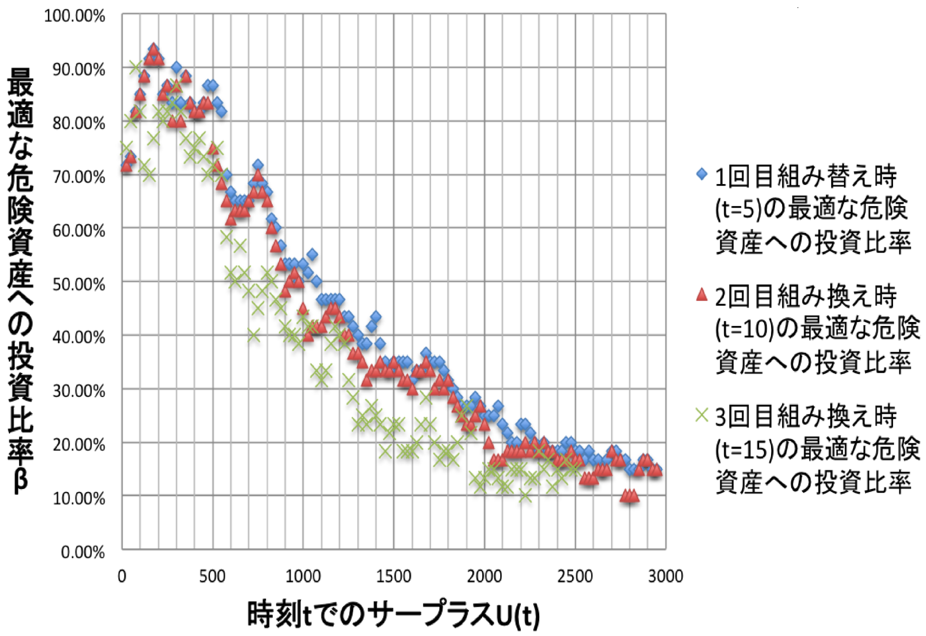


図 7: シミュレーション結果

この図から最適にポートフォリオを組み換えることにより破産確率を低下させることができる. また, ポートフォリオの組み換えができない場合と比較すると破産確率を最小にする初期の危険資産への投資比率が低くなっていることもわかる.

4　今後の課題

現在の保険会社は株式会社化されている場合がある. この場合, 株式配当を考慮することが自然であり, 配当の仕方に応じて破産確率がどう変化するかを研究する. また, 資産運用を考慮する場合, リーマンショックなどのように株式が急落するリスクを考慮したモデルに改良し, 破産確率を算出する.

参考文献

[1] 岩沢宏和, (2010) ,”リスク・セオリーの基礎—不確実性に対処するための数理”, 培風館.

[2] 小暮雅一, 東出純, (2010) ,”損害保険数理” , 共立出版

[3] 日本アクチュアリー会, (2011),”損保数理”.

[4] Søren Asmussen and Hansjörg Albrecher, (2010), ”Ruin Probabilities” , World Scientific.