

On a decision process with portfolios for value-at-risks

北九州市立大学 経済学部 吉田祐治

Yuji Yoshida

Faculty of Economics and Business Administration,
University of Kitakyushu

1. A portfolio model and VaR

確率空間を (Ω, P) とし, 確率変数の空間を $\mathcal{X}_0 = L^2(\Omega)$ とする. ただし, P は non-atomic 確率測度である. n と T は正の整数とし, n は 資産 (asset) または 株 (stock) の数, T は 最終時刻 (expiration date) を表す. 資産 (株) 番号は $i = 1, 2, \dots, n$ で表す. 時刻は $t = 1, 2, \dots, T$ で表す. ただし, 初期時刻は $t = 0$ と表す. 資産 (株) $i (= 1, 2, \dots, n)$ について 初期株価を S_0^i とする. ただし S_0^i は実数とする. 資産 (株) $i (= 1, 2, \dots, n)$ について 時刻 t での株価を S_t^i で表し, 次の式で与えられるとする.

$$S_t^i = S_{t-1}^i(1 + R_t^i) \quad (1)$$

($t = 1, 2, \dots, T$). ただし, $R_t^i \in \mathcal{X}_0$ であり, $R_t^i (i = 1, 2, \dots, n, t = 1, 2, \dots, T)$ は独立な 確率変数とする. R_t^i は 収益率 (rate of return) と呼ばれている. $\{S_t^i\}_{t=0}^T$ は 株価過程 (stock price process) と呼ばれる. このとき,

$$S_t^i = S_0^i \prod_{s=1}^t (1 + R_s^i) \quad (2)$$

($t = 1, 2, \dots, T$). 投資戦略 (trading strategies) は ポートフォリオ・ウエイト (portfolio weight) $w_t = (w_t^1, w_t^2, \dots, w_t^n) \in \mathbb{R}^n$ で与える. ただし, $w_t^1 + w_t^2 + \dots + w_t^n = 1$ かつ $w_t^i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ を満たす. 投資戦略が ポートフォリオ・ウエイト $w_t = (w_t^1, w_t^2, \dots, w_t^n)$ のとき, 収益率 (rate of return) は

$$R_t = w_t^1 R_t^1 + w_t^2 R_t^2 + \dots + w_t^n R_t^n. \quad (3)$$

このとき, 確率 p に対して 収益率 (rate of return) R_t^i の value-at-risk (VaR) は 次の式を満たす $v (\in \mathbb{R})$ である.

$$P(\omega \in \Omega \mid R_t(\omega) \leq v) = p. \quad (4)$$

この VaR v は, ‘リスク確率 p で 最悪のことが起きる場合の 収益率 (rate of return) R_t^i の 上限値’ を表わしている. この節では, VaR v を 最大にする 投資を考える. ここで, (4) の v が 次の式であらわされるモデルを考える.

$$(\text{VaR } v) = \text{平均 (期待値)} - \text{正の定数 } \kappa \times \text{標準偏差}. \quad (5)$$

ここで, 定数 κ は 確率 p に対応して決まる. たとえば, 収益率 (rate of return) R_t が正規分布に従う場合は, この仮定 (5) は満たされる.

2. A VaR portfolio selection model

資産(株) $i(=1, 2, \dots, n)$ 時刻 t について, 収益率 (rate of return) R_t^i の平均 (期待値), 分散, 共分散は

$$\begin{aligned}\mu_t^i &= E(R_t^i), \\ \sigma_t^{ii} &= E((R_t^i - \mu_t^i)^2), \\ \sigma_t^{ij} &= E((R_t^i - \mu_t^i)(R_t^j - \mu_t^j))\end{aligned}$$

($i, j = 1, 2, \dots, n$). ここで, 平均ベクトル μ と 分散・共分散行列 Σ を次のようにおく.

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_t^1 \\ \mu_t^2 \\ \vdots \\ \mu_t^n \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_t^{11} & \sigma_t^{12} & \cdots & \sigma_t^{1n} \\ \sigma_t^{21} & \sigma_t^{22} & \cdots & \sigma_t^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_t^{n1} & \sigma_t^{n2} & \cdots & \sigma_t^{nn} \end{bmatrix}.$$

分散・共分散行列 Σ の行列式は 0 でないと仮定する. (この仮定は, 資産の組み合わせによって自然に満たされる). したがって, 逆行列 Σ^{-1} が存在する. この節では, 時刻 t を省略し $w^1 + w^2 + \cdots + w^n = 1$ と $w^i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を満たすポートフォリオ・ウエイト $w = (w^1, w^2, \dots, w^n)$ について, 収益率 (rate of return) $R_t = w^1 R_t^1 + w^2 R_t^2 + \cdots + w^n R_t^n$ の平均 (期待値) μ_t と分散 v_t は

$$\mu_t = E(R_t) = \sum_{i=1}^n w^i E(R_t^i) = \sum_{i=1}^n w^i \mu_t^i, \quad (6)$$

$$v_t = E((R_t - \mu_t)^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w^i w^j \sigma_t^{ij}. \quad (7)$$

任意の正の確率 p について (5) に対応する定数 κ をとると, 収益率 (rate of return) R_t の value-at-risk $\text{VaR}_p(R_t)$ は (6)(7) より 次の式になる.

$$\text{VaR}_p(R_t) = \sum_{i=1}^n w^i \mu_t^i - \kappa \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w^i w^j \sigma_t^{ij}}. \quad (8)$$

これから, (8) に関する最適な投資戦略を 3 ステップで考える. まず γ を定数とし, 平均 (期待値) μ_t を γ に固定して, 分散 v_t を最小にする問題を扱う ([1]).

Variance-minimizing problem (P1): Minimize

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w^i w^j \sigma_t^{ij} \quad (9)$$

w.r.t. $w = (w^1, w^2, \dots, w^n)$ s.t. $w^1 + w^2 + \cdots + w^n = 1$ under

$$\sum_{i=1}^n w^i \mu_t^i = \gamma. \quad (10)$$

Theorem 1. $A > 0, \Delta > 0$ とする. (P1) の解は

$$w = \xi \Sigma^{-1} \mathbf{1} + \eta \Sigma^{-1} \mu. \quad (11)$$

そのとき, 対応する (9) の最小値は

$$\rho = \frac{A\gamma^2 - 2B\gamma + C}{\Delta}. \quad (12)$$

ただし

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_t^1 \\ \mu_t^2 \\ \vdots \\ \mu_t^n \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_t^{11} & \sigma_t^{12} & \cdots & \sigma_t^{1n} \\ \sigma_t^{21} & \sigma_t^{22} & \cdots & \sigma_t^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_t^{n1} & \sigma_t^{n2} & \cdots & \sigma_t^{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\xi = \frac{C - B\gamma}{\Delta}, \quad \eta = \frac{A\gamma - B}{\Delta},$$

$$A = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}, \quad B = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mu, \quad C = \mu^T \Sigma^{-1} \mu, \quad \Delta = AC - B^2.$$

ただし τ はベクトルの転置を表す.

Theorem 1 において, 解 w は 極小リスク・ポートフォリオ (*minimal risk portfolio*) と呼ばれる. このとき, 次の集合を 効率的フロンティア (*efficient frontier*) という ([7, 8]).

$$\mathcal{E} = \left\{ (\rho, \mu) \mid \rho = \frac{A(\mu)^2 - 2B\mu + C}{\Delta} \text{ and } \mu \geq \frac{B}{A} \right\}. \quad (13)$$

次に, γ は定数とし, κ を正の定数として平均 (期待値) μ_t を γ に固定して, つぎの最大化問題を扱う.

Risk-sensitive problem (P2): Maximize

$$\sum_{i=1}^n w^i \mu_t^i - \kappa \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w^i w^j \sigma_t^{ij}} \quad (14)$$

w.r.t. $w = (w^1, w^2, \dots, w^n)$ ($w^1 + w^2 + \dots + w^n = 1$) under

$$\sum_{i=1}^n w^i \mu_t^i = \gamma. \quad (15)$$

(P2) について, Theorem 1 から 次の結果が得られる.

Corollary 1. (P2) の解は

$$w = \xi \Sigma^{-1} \mathbf{1} + \eta \Sigma^{-1} \mu. \quad (15)$$

そのとき, (14) の最大値は 次のように書ける.

$$v(\gamma) = \gamma - \kappa \sqrt{\frac{A\gamma^2 - 2B\gamma + C}{\Delta}}. \quad (16)$$

Lemma 1. $A > 0, \Delta > 0$ とし, κ は $\kappa^2 > \Delta/A$ を満たす定数とする. このとき, 実数値関数

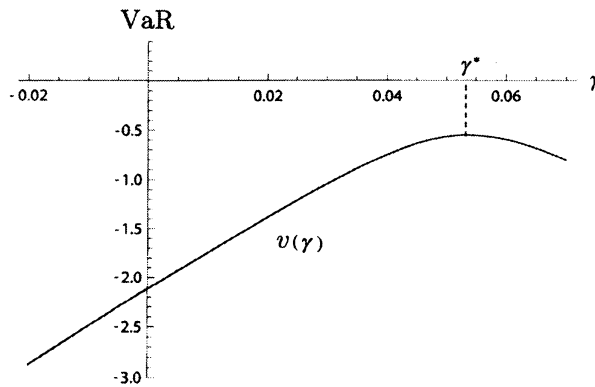
$$\gamma(\in \mathbb{R}) \mapsto v(\gamma) = \gamma - \kappa \sqrt{\frac{A\gamma^2 - 2B\gamma + C}{\Delta}} \quad (17)$$

は凹関数で, 最大値

$$v(\gamma^*) = \frac{B - \sqrt{A\kappa^2 - \Delta}}{A} \quad (18)$$

をもつ. ただし

$$\gamma^* = \frac{B}{A} + \frac{\Delta}{A\sqrt{A\kappa^2 - \Delta}}. \quad (19)$$



VaR $v(\gamma)$ ($\kappa = 2.326$).

最後に, κ を正の定数としてつぎの value-at-risk (VaR) を最大にする問題を扱う.

VaR-portfolio problem (P3): Maximize

$$\text{VaR}_p(R_t) = \sum_{i=1}^n w^i \mu_t^i - \kappa \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w^i w^j \sigma_t^{ij}} \quad (20)$$

w.r.t. $w = (w^1, w^2, \dots, w^n)$ s.t. $w^1 + w^2 + \dots + w^n = 1$ かつ $w^i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

ここで, 次の関係に注意する.

$$\sup_w (20) = \sup_{\gamma} \left\{ \sup_{w: \sum_{i=1}^n w^i \mu_t^i = \gamma} (20) \right\} = \sup_{\gamma} (14).$$

Theorem 2. $A > 0, \Delta > 0$ とし, κ は $\kappa^2 > C$ を満たす定数とする. このとき, つぎの (i) (ii) が成り立つ.

(i) (P3) の解は

$$w^* = \xi \Sigma^{-1} \mathbf{1} + \eta \Sigma^{-1} \mu. \quad (21)$$

そのとき VaR の値は

$$v(\gamma^*) = \frac{B - \sqrt{A\kappa^2 - \Delta}}{A} \quad (22)$$

で 期待収益率 (expected rate of return) は

$$\gamma^* = \frac{B}{A} + \frac{\Delta}{A\sqrt{A\kappa^2 - \Delta}}. \quad (23)$$

ただし $\xi = \frac{C - B\gamma^*}{\Delta}$ and $\eta = \frac{A\gamma^* - B}{\Delta}$.

(ii) さらに, $\Sigma^{-1} \mathbf{1} \geq \mathbf{0}$ and $\Sigma^{-1} \mu \geq \mathbf{0}$ が成り立つならば, (21) の w^* は $w^* \geq \mathbf{0}$ を満たす. ただし $\mathbf{0}$ はゼロベクトルを表す.

Remark. Theorem 2(ii) における条件 $w \geq \mathbf{0}$, つまり $w^i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) は, 金融市場で短期間の空売りを許さないことを意味する.

Theorem 2 において, 定数 κ は初めに与えられている. この定数 κ の与え方について考える. まず, 事象の集合

$$\{\omega \in \Omega | 1 + R_t(\omega) \leq 0\} = \{\omega \in \Omega | R_t(\omega) \leq -1\}$$

は, (2) から破産が起きる場合を表している. そこで, δ を $0 \leq \delta \leq 1$ を満たす定数として次の確率を考える.

$$p_\delta = P(\omega \in \Omega | R_t(\omega) \leq -\delta). \quad (24)$$

- $\delta = 1$ のとき, p_δ は破産確率を表す.
- $\delta = 0$ のとき, p_δ は元本割れの確率を表す.

したがって, p_δ は資産が現在の $100(1 - \delta)\%$ 以下になる確率を表し, 下落率 (*falling rate*) と呼ばれる. (3.28) (14) (29) (24) より, Theorem 2 の最適な投資戦略 w^* について VaR は

$$v(\gamma_\delta) = \text{VaR}_{p_\delta}(R_t) = -\delta. \quad (25)$$

ここで, δ に対して, (25) より $v(\gamma_\delta) = -\delta$ が求まる. Theorem 2 の最適な投資戦略 w^* について $\gamma^* = \gamma_\delta$ なので, $v(\gamma^*) = -\delta$. (22) より, κ が求まる. これを κ_δ とおく. さらに, (23) より γ^* が求まる. これを γ_δ とおく. また, リスク確率 p_δ は (24) で求まる. これらをまとめると, 次の結果が得られる.

Theorem 3. $A > 0, \Delta > 0$ とし, δ は $\delta > -2B/A$ を満たす定数とする. Theorem 2 と同じ仮定のもとに つぎの結果が成り立つ.

(i) 任意の下落率 δ について, 定数 κ_δ と 期待投資収益率 (expected rate of return) γ_δ は 次の式で与えられる.

$$\kappa_\delta = \sqrt{A\delta^2 + 2B\delta + C}, \quad \gamma_\delta = \frac{B\delta + C}{A\delta + B}. \quad (26)$$

また, リスク確率 p_δ は (25) で与えられる.

(ii) R_t^i ($i = 1, 2, \dots, n$) が正規分布に従うならば, (i) のリスク確率 p_δ は

$$p_\delta = \Phi(-\kappa_\delta). \quad (27)$$

ただし κ_δ は (26) で与えられ, Φ はつぎの標準正規分布の分布関数である:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad -\infty < z < \infty. \quad (28)$$

3. A dynamic value-at-risk portfolio model

(Ω, P) は確率空間で, P は non-atomic な確率とする. この節では, \mathcal{X} を確率変数 $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ で連続な分布関数 $x \mapsto F_X(x) = P(X < x)$ を持つもの全体を表すとする. このとき, $F_X(\cdot) : I \mapsto (0, 1)$ が狭義増加かつ onto である空でない開区間 I が存在する. また, 狭義増加連続逆関数 $F_X^{-1} : (0, 1) \mapsto I$ が存在する. ここで, $F_X(\cdot) : I \mapsto (0, 1)$ と $F_X^{-1} : (0, 1) \mapsto I$ は one-to-one かつ onto である. このとき, $\lim_{x \downarrow \inf I} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \uparrow \sup I} F_X(x) = 1$ である. I の閉包を $\bar{I} = [\inf I, \sup I]$ とすると, それは X の値域である. 確率変数 $X \in \mathcal{X}$ とし, p を正の確率とする. リスク確率 p での確率変数 X の value-at-risk (VaR) とは, 確率分布関数 F_X のパーセンタイルで, 次のものいう.

$$\text{VaR}_p(X) = \begin{cases} \inf I & \text{if } p = 0 \\ \sup\{x \in I \mid F_X(x) \leq p\} & \text{if } 0 < p < 1 \\ \sup I & \text{if } p = 1. \end{cases} \quad (29)$$

ここで, $F_X(\text{VaR}_p(X)) = p$ かつ $\text{VaR}_p(X) = F_X^{-1}(p)$ ($0 < p < 1$) である. VaR はパーセンタイルに基づく risk-sensitive 評価基準で経済学では標準的な評価基準の一つとして知られている.

Lemma 2. 確率変数 $X, Y \in \mathcal{X}$ とし, p を正の確率とする.

- (i) $\text{VaR}_p(X) \leq \text{VaR}_p(Y)$ for $X, Y \in \mathcal{X}$ s.t. $X \leq Y$. (monotonicity)
- (ii) $\text{VaR}_p(X + \theta) = \text{VaR}_p(X) + \theta$ for $X \in \mathcal{X}$, $\theta \in \mathbb{R}$. (translation invariance)
- (iii) $\text{VaR}_p(\lambda X) = \lambda \text{VaR}_p(X)$ for $X \in \mathcal{X}$, $\lambda \geq 0$. (positive homogeneity)

(1) から, 株価 S_t の value-at-risk は $\text{VaR}_p(S_t) = \text{VaR}_p(S_{t-1}(1 + R_t))$ である. ダイナミックスを議論するため, value-at-risk based on conditional expectations を導入する. \mathcal{G} を \mathcal{M} の部分 σ -集合族とし, 写像 $x \mapsto F_X(x | \mathcal{G}) = P(X < x | \mathcal{G}) = E(1_{\{X < x\}} | \mathcal{G})$ を考える. リスク確率を p とし, 条件 \mathcal{G} の下での value-at-risk of $X (\in \mathcal{X})$ を次のようにおく.

$$\text{VaR}_p(X | \mathcal{G}) = \sup\{x \in I \mid F_X(x | \mathcal{G}) \leq p\} \quad (30)$$

($0 < p < 1$). ここで $\text{VaR}_p(X | \mathcal{G})$ は \mathcal{G} -可測確率変数であり, $F_X(\text{VaR}_p(X | \mathcal{G}) | \mathcal{G}) \leq p$ ($0 < p < 1$) が成り立つ. (1) から ポートフォリオ・ウエイトは $w_t = (w_t^1, w_t^2, \dots, w_t^n)$ は predictable に決定される. 条件 \mathcal{M}_{t-1} の下での S_t の value-at-risk は

$$\text{VaR}_p(S_t | \mathcal{M}_{t-1}) = \text{VaR}_p(S_{t-1}(1 + R_t) | \mathcal{M}_{t-1}). \quad (31)$$

ここで

$$\mathcal{W} = \{w_t = (w^1, w^2, \dots, w^n) \in \mathbb{R}^n \mid w^1 + w^2 + \dots + w^n = 1 \text{ かつ } w^i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)\}.$$

とおく. また, 割引率 β を $0 < \beta \leq 1$ を満たす定数とする.

Dynamic Portfolio Problem for VaR 1 (D1): Maximize total value-at-risk

$$S_0 \sum_{t=1}^T \beta^{t-1} \prod_{s=1}^{t-1} (1 + E(R_s)) \cdot (1 + \text{VaR}_p(R_t)) \quad (32)$$

$$\text{w.r.t. ポートフォリオ・ウエイト } w_t = (w_t^1, w_t^2, \dots, w_t^n) \in \mathcal{W} (t = 1, 2, \dots, T).$$

簡単のため $S_0 = 1$ とすると, Dynamic Portfolio Problem for VaR 1 (D1) は次のように簡略化される.

Dynamic Portfolio Problem for VaR 2 (D2): Maximize total value-at-risk

$$\sum_{t=1}^T \beta^{t-1} \prod_{s=1}^{t-1} \left(1 + E \left(\sum_{i=1}^n w_s^i R_s^i \right) \right) \cdot \left(1 + \text{VaR}_p \left(\sum_{i=1}^n w_t^i R_t^i \right) \right) \quad (33)$$

$$\text{w.r.t. ポートフォリオ・ウエイト } w_t = (w_t^1, w_t^2, \dots, w_t^n) \in \mathcal{W} (t = 1, 2, \dots, T).$$

Dynamic programming によって次の結果を得る.

Theorem 4. 次の最適方程式 (34) と (35) によって定まる数列 $\{v_t\}$ はを考える. このとき, Dynamic Portfolio Problem for VaR 2 (D2) の最適な value-at-risk は v_1 によって求まる.

$$v_{t-1} = \max_{(w_t^1, \dots, w_t^n) \in \mathcal{W}} \left\{ 1 + \text{VaR}_p \left(\sum_{i=1}^n w_t^i R_{t-1}^i \right) + \beta \left(1 + \sum_{i=1}^n w_t^i E(R_{t-1}^i) \right) v_t \right\} \quad (34)$$

$$(t = 2, 3, \dots, T),$$

$$v_T := \max_{(w_T^1, w_T^2, \dots, w_T^n) \in \mathcal{W}} \left\{ 1 + \text{VaR}_p \left(\sum_{i=1}^n w_T^i R_T^i \right) \right\}. \quad (35)$$

Condition (V). すべての $t = 1, 2, \dots, T$ について $1 + \beta v_t > 0$ が成り立つ.

Condition (V) が成り立たない場合は, そのポートフォリオ戦略が時刻 t ですでに破産 (bankrupt) している場合である. Theorem 4 と Lemma 2 から, 次の結果が得られる.

Theorem 5. Condition (V) が満たされるとする. 次の最適方程式 (36) と (37) によって定まる数列 $\{v_t\}$ はを考える. このとき, Dynamic Portfolio Problem for VaR 2 (D2) の最適な value-at-risk は v_1 によって求まる.

$$v_{t-1} = \max_{(w_t^1, \dots, w_t^n) \in \mathcal{W}} (1 + \beta v_t) \left(1 + \sum_{i=1}^n w_t^i \mu_{t-1}^i - \frac{\kappa}{1 + \beta v_t} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_t^i w_t^j \sigma_{t-1}^{ij}} \right) \quad (36)$$

$(t = 2, 3, \dots, T),$

$$v_T := \max_{(w_T^1, w_T^2, \dots, w_T^n) \in \mathcal{W}} \left(1 + \sum_{i=1}^n w_T^i \mu_T^i - \kappa \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_T^i w_T^j \sigma_T^{ij}} \right). \quad (37)$$

References

- [1] J.C.G.Boot, *Quadratic Programming* (North-Holland, Amsterdam, 1964).
- [2] L.El Chaoui, M.Oks and F.Oustry, Worst-case value at risk and robust portfolio optimization: A conic programming approach, *Operations Research* **51** (2003) 543-556.
- [3] P.Jorion, *Value at Risk : The New Benchmark for Managing Financial Risk* (Third Ed.) (McGraw-Hill, New York, 2006).
- [4] P.R.Kumar and V.Ravi, Bankruptcy prediction in banks and firms via statistical and intelligent techniques - A review, *European J. Oper. Res.*, **180** (2007) 1-28.
- [5] H.Markowitz, *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*, (Blackwell, Oxford, 1990).
- [6] A.Meucci, *Risk and Asset Allocation*, (Springer-Verlag, Heidelberg, 2005).
- [7] S.R.Pliska, *Introduction to Mathematical Finance: Discrete-Time Models* (Blackwell Publ., New York, 1997).
- [8] S.M.Ross, *An Introduction to Mathematical Finance* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999).
- [9] M.C.Steinbach, Markowitz revisited: Mean-variance model in financial portfolio analysis, *SIAM Review* **43** (2001) 31-85.
- [10] Y.Yoshida, A risk-minimizing model under uncertainty in portfolio, in: P.Melin et al. eds., *Foundations of Fuzzy Logic and Soft Computing - IFSA2007 Lecture Notes in Artificial Intelligence* 4529 (Springer, June, 2007), 381-391.
- [11] Y.Yoshida, An estimation model of value-at-risk portfolio under uncertainty, *Fuzzy Sets and Systems*, **160** (2009) 3250-3262.